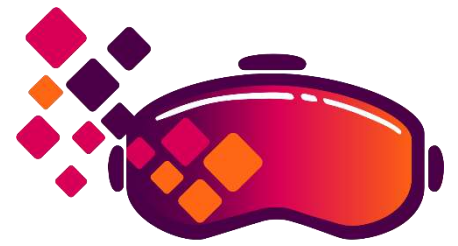




Co-funded by
the European Union



OVR

Õppematerjalid

„Matemaatilised mudelid kolmemõõtmelise geomeetria õpetamiseks kasutades virtuaalset reaalsust”

„Mathematical models for teaching three - dimensional geometry using virtual reality“



EESTIKEELNE VERSIOON



Lodz University
of Technology



universidade de aveiro
theoria poiesis praxis



UNIVERSITY
OF ZILINA



TARTU ÜLIKOOL
UNIVERSITY OF TARTU
1632



UNIVERSITY OF SILESIA
IN KATOWICE



Õppematerjalid "Matemaatilised mudelid kolmemõõtmelise geomeetria õpetamiseks kasutades virtuaalset reaalsust"

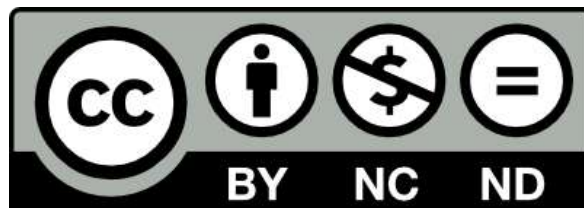
("Mathematical models for teaching three-dimensional geometry using virtual reality")

Loodud Math3DgeoVR konsortsiumi poolt.



Co-funded by
the European Union

Euroopa Liidu kaasrahastus (Math3DgeoVR, project no. 2021-1-PL01-KA220-HED-000030365). Väljendatud seisukohad ja arvamused on siiski ainult autori(te) omad ega pruugi kajastada Euroopa Liidu või Fundacja Rozwoju Systemu Edukacji seisukohti ja arvamusi. Euroopa Liit ega abi andev asutus ei saa nende eest vastutada.



CC litsents

CC litsents võimaldab taaskasutajatel kopeerida ja levitada materjali mis tahes kandjal või formaadis ainult kohandamata kujul, ainult mittekaubanduslikel eesmärkidel ja ainult tingimusel, et autor on korralikult viidatud.



Lodz University
of Technology



universidade de aveiro
theoria poiesis praxis



UNIVERSITY
OF ZILINA



TARTU ÜLIKOOL
UNIVERSITY OF TARTU



UNIVERSITY OF SILESIA
IN KATOWICE



Co-funded by
the European Union



1. TEEMA: Lineaarsete võrrandite süsteemid	1
2. TEEMA: Osalised tuletised	9
3. TEEMA: Skalaarvälja gradient	18
4. TEEMA: Kohalikud, piiratud kohalikud ja globaalsed äärmused	30
5. TEEMA: Tahkete kehade ristlõiked	37
6. TEEMA: Vektorid ja nende omadused	52
7. TEEMA: Polaar-, silindrilised ja sfäärilised koordinaadid	67
8. TEEMA: Trigonomeetrilised funktsioonid	75
9. TEEMA: Eukleidiline geomeetria	92
10. TEEMA: Mõõtmised ja mõõtühikud astronoomias	104



Lodz University
of Technology



universidade de aveiro
theoria poiesis praxis



UNIVERSITY
OF ZILINA



TARTU ÜLIKOOL
UNIVERSITY OF TARTU
1632



UNIVERSITY OF SILESIA
IN KATOWICE



Co-funded by
the European Union



1. TEEMA: Lineaarsete võrrandite süsteemid

1. Teema valiku põhjendus

Matemaatikas on lineaarvõrrandite süsteem (või lineaarne süsteem) ühe või mitme lineaarse võrrandi kogum, mis hõlmab samu muutujaid. Moodul kirjeldab reaalkoefitsientidega lineaarvõrrandite süsteemide lahendamise probleeme ja viitab samal ajal nende geomeetrilisele tõlgendusele.

Lineaarsete süsteemide teooria on lineaaralgebra alus ja põhiline osa, mida kasutatakse enamikus tänapäeva matemaatika harudes. Arvutusalgoritmid lahenduste leidmiseks on oluline osa numbrilisest lineaaralgebrast ning neil on oluline roll inseneriteaduses, füüsikas, keemias, arvutiteaduses ja majanduses. Lisaks - mittelineaarsete võrrandite süsteemi saab sageli lähendada lineaarse süsteemiga (vt lineariseerimine), mis on kasulik tehnika isegi keeruliste süsteemide matemaatilise mudeli või arvutisimulatsiooni loomisel.

Moodul ei toeta mitte ainult võrrandisüsteemi lahenduse leidmist, vaid võimaldab kasutajal ka seostada algebralist väljendit selle geomeetrilise tõlgendusega. Seda saab kasutada ka lineaarsete võrrandisüsteemide kasutamist nõudvate ülesannete lahendamiseks. Harva leidub võrrandeid, mis modelleerivad probleemi täpselt. Pigem on tõenäoline, et õppija satub olukorda, kus ta teab põhiteavet ja peab kohandama võrrandisüsteemi või teab lahendust ja peab muutma süsteemi koefitsiente. Seega võimaldab moodul kasutajal õppida ka ülesande analüütilise lahenduse põhitõdesid. Näiteks:

Kirjutage lineaarsete võrrandite süsteemi kujutav olukord ja leidke selle lahendus.

- Tuvastage probleemi tundmatud suurused ja esitage need muutujatega.
- Kirjutage võrrandisüsteem, mis modelleerib probleemi tingimusi.
- Lahendage süsteem.
- Kontrollige pakutud lahendust.

Lineaarsete võrrandite süsteemi lahendamise standardalgoritm põhineb nn Gaussi eliminatsioonil, mida on muudetud.

2. Ajalooline taust

Umbes 4000 aastat tagasi teadsid babüloomlased, kuidas lahendada lihtsat 2×2 kahe tundmatuga lineaarset võrrandisüsteemi. Umbes 200 eKr avaldasid hiinlased "Üheksa peatükki matemaatilisest kunstist". Nad näitasid võimet lahendada 3×3 võrrandisüsteemi (Perotti: Retrieved from http://www.science.unitn.it/~perotti/History_of_Linear_Algebra.pdf). Lineaaralgebra jõud ja edusammud jõudsid lõpule alles 17. sajandi lõpus. Siis kerkis esile determinantide ja ruutmatriksiga seotud väärtuste teema, mida uuris arvutuste looja Leibnitz. Sajandivahetusel tutvustas Gauss lineaarvõrrandite süsteemi lahendamise protseduuri. Tema töö



Co-funded by
the European Union



käsitles peamiselt lineaarseid võrrandeid ja ei olnud veel tutvustanud maatriksite ideed ega nende märkimist. Ta käsitles erinevate arvude ja muutujate võrrandeid ning analüüsis Euleri, Leibnitzi ja Crameri tööd enne 19. sajandit. Termin "maatriks" võeti kasutusele 1848. aastal J. J. Sylvesteri poolt. Maatriksalgebra teooria alused pärinevad Arthur Cayley 1855. aasta töödest.

Kuigi lineaaralgebra on teiste matemaatiliste praktikatega võrreldes üsna uus teema, on selle kasutamine laialt levinud. Arvutikunstnik Leibnitzi jõupingutustega formaliseeriti tundmatute lahendamiseks lineaarsete võrrandite süsteemide kasutamise kontseptsioon. Teised jõupingutused sellistelt teadlastelt nagu Cayley, Euler, Sylvester ja teised muutsid lineaarseid süsteeme nende kujutamiseks maatriksite kasutuseks. Sõltumata tehnoloogiast, osutub Gaussi kõrvaldamine endiselt parimaks viisiks lineaarsete võrrandite süsteemi lahendamiseks.

Isegi kui teadlased uuendavad oma õpikuid, jäävad põhitõed samaks.

3. Õpitulemused

Selle mooduli läbimisel peaksid üliõpilased olema võimelised mõistma ja õigesti valima teoreetilisi teadmisi, mis võimaldavad neil saavutada:

- Oskus määratleda kahe ja kolme muutujaga lineaarvõrrandite süsteemi tähendust lineaaralgebra notatsiooniga.
- Oskus tuua näiteid koos nende geomeetrilise tõlgendamisega.
- Oskus valida ülesande jaoks õige matemaatiline mudel, kasutades lineaarseid võrrandeid.
- Oskus lahendada lineaarsete võrrandite süsteemi ülesandeid erinevate meetoditega, nt asendamise, kõrvaldamise ja kombineerimise abil.

Õpilased, kes mõistavad matemaatilisi mõisteid, oskavad selgitada õpitud mõisteid, eristada, millised on näited ja millised mitte, lähtudes esitatud definitsioonidest ja materjalidest, ning rakendada õpitud mõisteid seotud probleemide lahendamisel. See tähendab, et õpilane on võimeline:

- Määrake omadusi, mida tuleb lahendada (nt võrrandite arv, kas need on homogeenid).
- Deklareerida lahenduse olemasolu (nt maatriksi auaste, determinant).
- Valige õigesti antud süsteemi lahendamise meetod.
- Määrata geomeetriline esitus (nt toetusena, kui kasutatakse lahendusmeetodit).

4. Teoreetilised alused

Praktilisi probleeme paljudes valdkondades, näiteks bioloogias, ärimises, keemias, arvutiteaduses, majanduses, elektroonikas, inseneriteaduses, füüsikas ja sotsiaalteadustes, saab sageli taandada lineaarsete võrrandite süsteemi lahendamisele. Lineaaralgebra tekkis katsetest leida süstemaatilisi meetodeid nende süsteemide lahendamiseks.



Näiteks - kui a, b ja c on reaalarvud, siis on võrrandi graafik kujul:

$$ax + b = c$$

on sirgjoon (kui a ja b ei ole mõlemad nullid), seega nimetatakse sellist võrrandit lineaarseks võrrandiks muutujas x .

Sageli on siiski mugav kirjutada muutujaid kujul x_1, x_2, \dots, x_n , eriti kui tegemist on rohkem kui kahe muutujaga. Võrdus kujul:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

nimetatakse lineaarseks võrrandiks n muutujatega x_1, x_2, \dots, x_n . Siin a_1, a_2, \dots, a_n tähistavad reaalarvud (mida nimetatakse vastavalt x_1, x_2, \dots, x_n koefitsientideks) ja b on samuti arv (mida nimetatakse võrrandi konstantseks terminiks). Lineaarvõrrandite lõplikku kogumit muutujatega x_1, x_2, \dots, x_n nimetatakse nende muutujate lineaarvõrrandite süsteemiks.

Antud lineaarse võrrandi $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$, jada s_1, s_2, \dots, s_n arvudest n nimetatakse võrrandi lahendiks, kui:

$$a_1s_1 + a_2s_2 + \dots + a_ns_n = b,$$

st kui võrrand on rahuldatud, kui kõik x 'd asendatakse vastavates 'dega ($x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$). Arvude jada nimetatakse võrrandisüsteemi lahendiks, kui see on süsteemi iga võrrandi lahendus.

Määratlus 1.1. Üldine $m \times n$ lineaarsete võrrandite süsteem on kujul:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2,$$

⋮

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m,$$

kus süsteemi koefitsiendid a_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ ja süsteemi konstandid b_j on antud skalarid ja x_1, x_2, \dots, x_n tähistavad süsteemi tundmatuid. Kui $b_i = 0$ kõigi i jaoks, siis nimetatakse süsteemi homogeenseks; vastasel juhul nimetatakse seda mittehomogeenseks.

Määratlus 1.2. Lineaarsete võrrandite süsteemi lahenduse all mõistetakse järjestatud n – skalaaride topelt (c_1, c_2, \dots, c_n) , mille asendamisel x_1, x_2, \dots, x_n süsteemi vasakule poolele saadakse paremal poolel olevad väärtused. Süsteemi kõigi lahendite hulka nimetatakse süsteemi lahendite hulgaks.

Määratlus 1.3. Võrrandisüsteemi, millel on vähemalt üks lahendus, nimetatakse järjepidevaks, samas kui süsteemi, millel ei ole lahendust, nimetatakse vastuoluliseks.

Lõputu arvu lahenditega võrrandite puhul tuleb kasutusele võtta muutujad, mida nimetatakse parameetriteks. Selliselt kirjeldatud lahendite hulk on parameetrilisel kujul ja seda



nimetatakse süsteemi üldiseks lahendiks. Selgub, et mis tahes võrrandisüsteemi lahendused (kui need on olemas) saab esitada parameetrilisel kujul (st muutujad x_1, x_2, \dots on esitatud uute sõltumatute muutujate kujul, t, j ne).

Meie probleemiks on kindlaks teha, kas antud süsteem on järjepidev, ja kui see on, siis leida selle lahenduskoogum.

Määratlus 1.4. Loomulikult on lineaarsete võrrandite süsteemiga seotud järgmised kaks maatriksit:

- *Koefitsientide maatriks* $A = [a_{11} \cdots a_{1n} \cdots a_{m1} \cdots a_{mn}]$.
- *Täiendatud maatriks* $[A|B] = [a_{11} \cdots a_{1n} \cdots a_{m1} \cdots a_{mn} | b_1 \dots b_m]$.

Täiendatud maatriks iseloomustab täielikult võrrandisüsteemi, kuna see sisaldab kõiki süsteemi koefitsiente ja süsteemi konstante. Pange tähele, et koefitsientide maatriks on maatriks, mis koosneb n esimesest veerust. B .

Määratlus 1.5. Maatriksi r_r ridade järjestus on maksimaalne arv ridu, mida peetakse vektoriteks ja mis on lineaarselt sõltumatud. Samamoodi on veeru järjestus r_c lineaarselt sõltumatute veergude maksimaalne arv. See on oluline tulemus, ei ole liiga raske näidata, et maatriksi ridade ja veergude ridad on võrdsed. Seega võib lihtsalt rääkida maatriksi auastmest. $r = r_r = r_c$.

Teoreem 1.1 (Kronecker - Cappelli). *Lineaarsel võrrandite süsteemil on lahendus siis ja ainult siis, kui: $r(A) = r([A|B])$.*

- **Elementaarne ridaoperatsioon**

Elementaarsed reaoperatsioonid koosnevad järgmistest toimingutest:

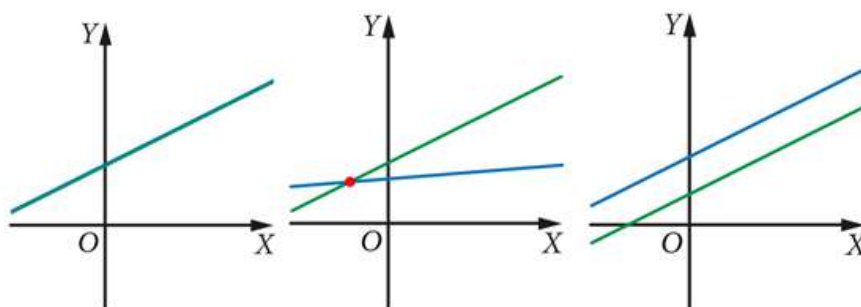
- Vahetage kaks rida.
- Korrutage rida mittenullarvuga.
- Asendab rea mõne teise rea mis tahes kordajaga, mis on sellele lisatud.

Lineaarsete süsteemide geomeetriline tõlgendamine

Kahe tundmatute kahest võrrandist koosneva lineaarse süsteemi geomeetriline tõlgendus on nende võrrandite lineaarfunktsioonidele vastavate kahe sirge geomeetriline esitus. Tavaliselt sisaldavad õpikud järgmise tüüpi skemaatilisi skeeme:



Co-funded by
the European Union



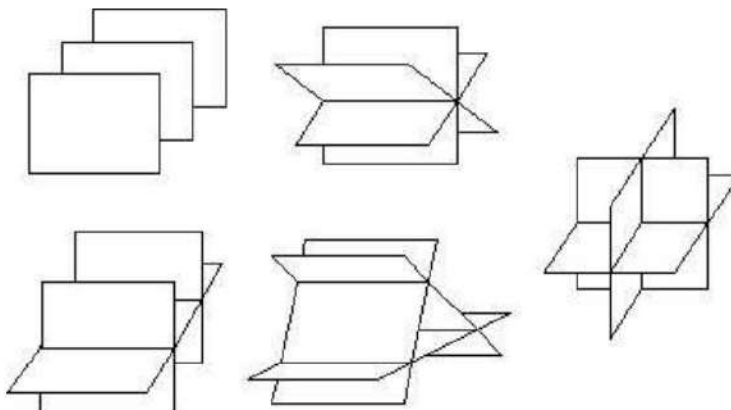
Joonis 1.1.

Ühe võrrandi kolme tundmatuga saab tõlgendada geomeetriliselt kolmemõõtmelises ruumis. Võrdus:

$$Ax + By + Cz = D$$

on lahendus, mis moodustavad tasandi, kui vähemalt üks A, B, C on nullist erinev. Kui me vaatleme selliste lineaarsete võrrandite süsteemi, siis on lahendite hulk kõigi punktide hulk, mis asuvad kõigis vastavates tasandites.

Tavaliselt sisaldavad õpikud järgmise tüüpi skemaatilisi skeeme:



Joonis 1.2. Joonte ja tasapindade vastastikmõju, Dan Sunday, <http://geomalgorithms.com>.

Kaks lineaarsüsteemi, mis kasutavad sama muutujate kogumit, on samaväärsed, kui teise süsteemi kõik võrrandid saab algebraliselt tuletada esimese süsteemi võrranditest ja vastupidi. Kaks süsteemi on ekvivalentsed, kui mõlemad süsteemid on kas mitteühilduvad või kui mõlema süsteemi iga võrrand on teise süsteemi võrrandite lineaarkombinatsioon. Sellest järeldub, et kaks lineaarsüsteemi on samaväärsed, kui neil on sama lahendite hulk.



Co-funded by
the European Union



Matemaatiliste mõistete mõistmine on väga oluline oskus, mille õpilased omandavad matemaatika õppimise ajal. Tulles tagasi lineaarsete võrrandite süsteemi üldise arutelu juurde, käsitleme mõningaid põhiküsimusi:

1. Kas süsteemil on lahendus?
2. Kui vastus esimesele küsimusele on jaatav, siis mitu lahendust on olemas?
3. Kuidas me kõik lahendused kindlaks teeme?



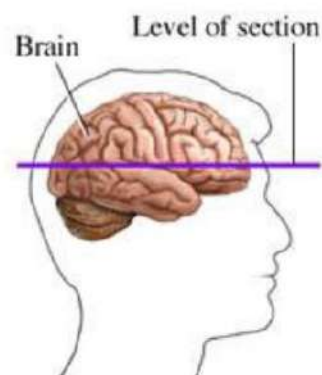
Co-funded by
the European Union



5. Rakendused igapäevaelus

Et siduda lineaarsete võrrandite süsteemid nende geomeetrilise tõlgendamise praktilise rakendamisega, valiti rakendusosa moodulis välja energiakiirte valikuga seotud küsimus. Tänu sellele ei muuda kasutaja mitte ainult võrrandite süsteemi, vaid peab ka jälgima rakendatud algebraliste muudatuste visualiseerimisega seotud muutusi. On olemas palju algoritme, mille abil rekonstrueeritakse kompuutertomograafia (CT) kujutist meediumist. Me keskendusime lineaarsetele algebralistele meetoditele.

Mõnel juhul ei ole lihtsa röntgenuuringu tulemused ühest suunast piisavalt head ja oluline teave võib jääda avastamata (näiteks kasvaja luustiku taga). Kasutades selle asemel kompuutertomograafiat, väheneb selle teabe puudumise võimalus märkimisväärselt, sest kompuutertomograafia kasutab röntgenkiirte mitmest erinevast suunast, et luua ristlõikepilt meediumist, nii et meediumis olevad objektid ei saa üksteist katta.

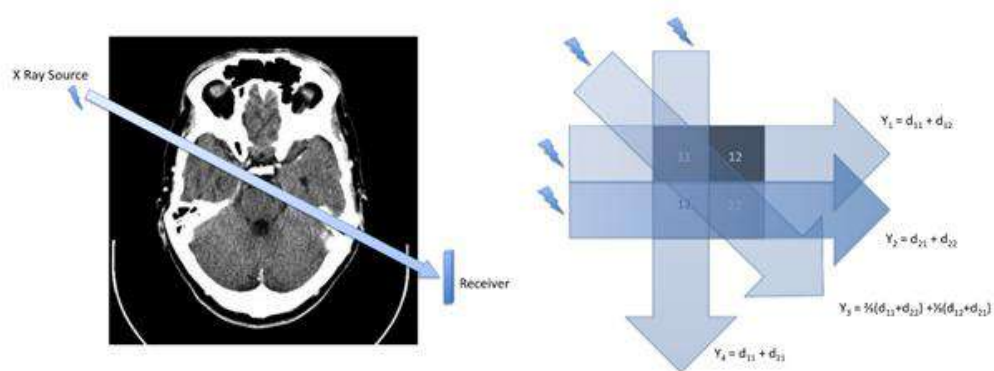


Joonis 1.3. CT-lõige. Allikas: https://dSPACE.Bracu.ac.bd/xmlui/bitstream/handle/10361/10915/13216001_MNS.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Aju viil on lihtsuse huvides ja objektide jaotamiseks ruudustikuga üle kantud. See tähendab, et iga ruudustik sisaldab objekti, mida tuleb skaneerida, analüüsida ja tuvastada.



Co-funded by
the European Union



Joonis 1.4. CT-uuringuga saadud üksiklõige. Iga viil on rekonstrueeritud kujutis, mis saadakse röntgenikiirguse nõrgenemise registreerimisel läbi kudede piki ulatuslikku mitmest suunast. Pildil on kujutatud röntgenikiirguse allikas ja vastav vastuvõtja, mida kasutatakse nõrgenemise mõõtmiseks konkreetses suunas. Paremal - lineaarne seos täheldatud intensiivsussuhete vahel.

Allikas: <https://ecampusontario.pressbooks.pub/linearalgebraandapplications/peatükk/motivatsiooni-näide/>

6. Viited

- [1] <https://ecampusontario.pressbooks.pub/linearalgebrautm/chapter/chapter-1-system-of-linear-equations/>
- [2] <https://linearalgebra.math.umanitoba.ca/math1220/section-14.html>
- [3] https://www.mimuw.edu.pl/~amecel/2021z/2.gal_wyklad_1.pdf
- [4] <https://www.dlauczna.pl/lekcja/matematyka,geometria-analityczna,uklady-rownan-powtorzenie>
- [5] [http://homepage.ntu.edu.tw/~jryanwang/courses/Mathematics%20for%20Management%20\(undergraduate%20level\)/Applications%20in%20Ch1.pdf](http://homepage.ntu.edu.tw/~jryanwang/courses/Mathematics%20for%20Management%20(undergraduate%20level)/Applications%20in%20Ch1.pdf)
- [6] <https://www.studypug.com/linear-algebra-help/applications-of-linear-systems>
- [7] <http://prac.im.pwr.wroc.pl/~kajetano/AM2/fun2var/fun2var-3.html>
- [8] Dąbrowicz-Tlałka, A. M., Guze, H. (2011). Visualiseerimine matemaatikaõpetuses - mõned näited õpilaste hariduse toetamisest. E-õppe kasutamine võtmepädevuste arendamisel. 223-239.



Co-funded by
the European Union



2. TEEMA: Osalised tuletised

1. Teema valiku põhjendus

Ühe muutuja funktsiooni $f(x)$ tuletis ütleb meile, kui palju $f(x)$ muutub, kui x muutub. Kui me räägime $f(x)$ muutumise kiirusest x suhtes, siis ei ole siin mingit ebaselgust, sest x peab olema piiratud, et liikuda piki x -telge. Olukord muutub aga keerulisemaks, kui uurime kahe või enama muutuja funktsiooni muutumise kiirust. Kahe muutuja $f(x, y)$ funktsiooni puhul oleks ilmne analoog, mis ütleks meile, kui kiiresti $f(x, y)$ kasvab, kui x ja y suurenevad. Enamasti sõltub see aga sellest, kui kiiresti muutuvad x ja y üksteise suhtes. Mitme muutuja funktsioonide puhul muutuvad nende väärtused, kui üks või mitu sisendväärtust muutuvad, mistõttu on oluline arvutada muutust funktsioonis endas. Seda saab uurida, hoides kõiki muutujaid peale ühe muutuja konstantsena ja leides funktsiooni muutumise kiiruse ühe allesjäänud muutuja suhtes. Oskus arvutada osalisi tuletisi võimaldab uurida ja mõista mitme muutuja funktsioonide käitumist. Seda protsessi nimetatakse osaliseks diferentseerimiseks. Seda protsessi nimetatakse osaliseks diferentseerimiseks. See avab arvutusele mitmesuguseid rakendusi, näiteks puutetasandid, ...

2. Ajalooline taust

Üks esimesi teadaolevaid selle sümboli ∂ kasutusi matemaatikas on markiis de Condorcet'i poolt 1770, kes kasutas seda osaliste erinevuste puhul. Kaasaegse osalise tuletise märkimise lõi Adrien-Marie Legendre (1786), kuigi ta loobus sellest hiljem; Carl Gustav Jacob Jacobi võttis selle sümboli uuesti kasutusele aastal 1841.

3. Õpitulemused

Selle mooduli läbimisel peaksid üliõpilased olema võimelised

- esimese ja kõrgema osalise määratlus ja arvutustehnika, nii konkreetsetes punktis kui ka konkreetsetes punktis
- osalise diferentseerimise mõiste mõistmine
- funktsiooni tuletis osaliselt kõigi muutujate suhtes kordamööda
- esimese osalise tuletise hindamine
- teise osalise tuletise formuleerimine

Eeltingimused: Enne selle mooduli alustamist peaksid üliõpilased tegema järgmist.

- teavad ühe muutuja funktsiooni diferentseerimise põhimõtet

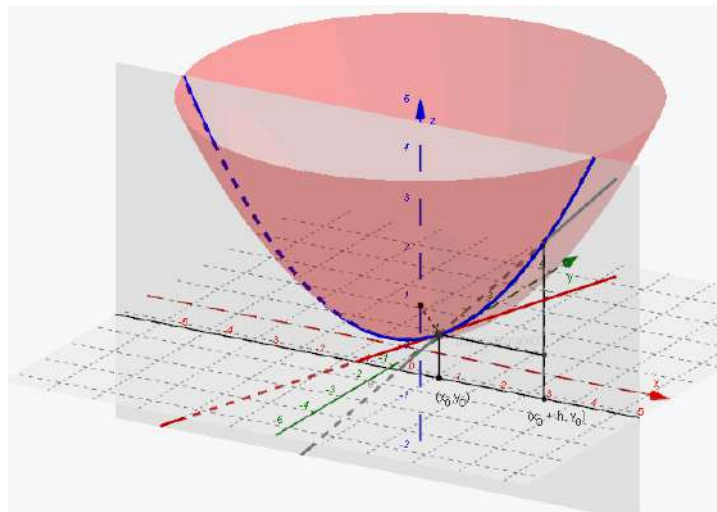


4. Teoreetilised alused

- Funktsiooni $f(x, y)$ osaline tuletis x suhtes.

Seoses $z = f(x, y)$ on sõltumatud muutujad x ja y ning sõltuv muutuja z . Kahe muutuja funktsiooni geomeetrisest tõlgendamisel teame, et iga muutuja x või y väärtuse muutmisel saame järjestikku kõverad, millest igaüks asub erinevas tasapinnas ja millest igaüks on osa pinnast, mida tahame visandada. Nüüd võivad mõlemad muutujad x ja y muutuda samaaegselt, põhjustades muutuse z suhtes. Selle asemel, et seda üldist olukorda käsitleda, hoiame aga esialgu ühe sõltumatutest muutujatest fikseerituna. See on samaväärne liikumisega piki kõverat, mis saadakse pinna lõikamisel ühe koordinaattasandiga. Hoides y konstantsena ja muutes ainult x , muutub z ainult x funktsiooniks.

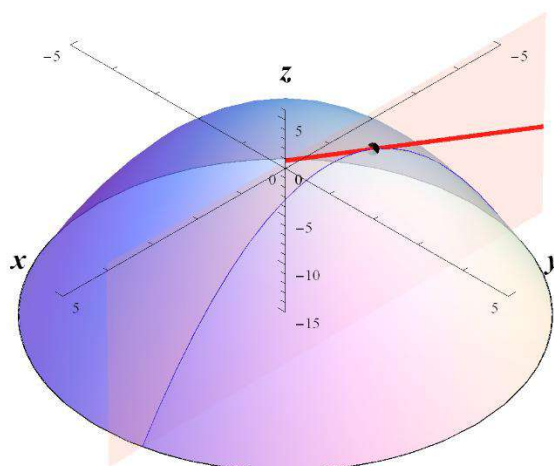
Määratlus 2.1. Oletame, et $z = f(x, y)$ on kahe muutuja funktsioon. Siis on $f(x, y)$ esimene osaline tuletis x suhtes aadressil (x_0, y_0) antud järgmiselt.
$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$



Joonis 2.1.

Funktsiooni z tuletis x suhtes (y hoitakse konstantsena) nimetatakse funktsiooni osaliseks tuletiseks x suhtes ja seda tähistatakse $\frac{dz}{dx}$, $\frac{df}{dx}$, f'_x või $D_x f$.

Graafiliselt näitab $\frac{df(x, y)}{dx}$ funktsiooni hetkelist muutumise kiirust, kui me hoiame y paigal ja liigume paralleelselt x -telgiga positiivses suunas.



Joonis 2.2.

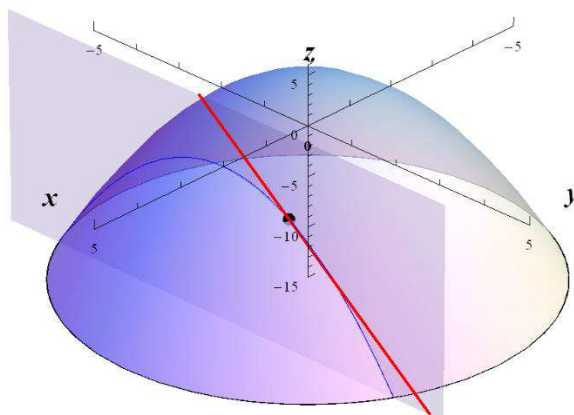
Joonis 2.2 näitab, et kui me liigume $+x$ -suunda $(-1, 1)$, $\frac{df(x, y)}{dx}(-1, 1)$ on positiivne, siis $f(x, y)$ suureneb selles suunas.

- Funktsiooni $f(x, y)$ osaline tuletis suhtes.

Analoogiliselt, kui hoida x konstantsena ja muuta ainult y , muutub z ainult funktsiooniks. Nüüd saame defineerida:

Määratlus 2.2. Oletame, et $z = f(x, y)$ on kahe muutuja funktsioon. Siis on $f(x, y)$ esimene osaline tuletis suhtes aadressil $[x_0, y_0]$ antud järgmiselt. $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$ tingimusel, et piirang on olemas.

Samamoodi nimetatakse funktsiooni z tuletis suhtes (x hoitakse konstantsena) funktsiooni osaliseks tuletiseks suhtes ja seda tähistatakse $\frac{dz}{dy}$, $\frac{df}{dy}$, f'_y või $D_y f$.



Joonis 2.3.

Joonisel 2.3 on näha, et kui me liigume $+y$ -suunda $\left(2, \frac{2}{3}\right)$, $\frac{df(x,y)}{dx} \left(2, \frac{2}{3}\right)$ on negatiivne, siis $f(x, y)$ suureneb selles suunas.

Graafiliselt näitab $\frac{df(x,y)}{dy}$ funktsiooni hetkelist muutumise kiirust, kui me hoiame x paigal ja liigume paralleelselt y -telgiga positiivses suunas.

Märkus 2.1. Mitmemuutujaarvutuses kasutame sümbolit ∂ (seda keerdkäigulist d sümbolit, ∂ , mida sageli nimetatakse "del", kasutatakse, et eristada osalisi tuletisi tavalistest ühe muutuja tuletistest, kus me kasutame sümbolit d).

Selleks, et hinnata funktsiooni $f(x, y)$ osalist tuletist x suhtes, peame vaid teesklema, et kõik teised muutujad (st kõik peale x), millest $f(x, y)$ sõltub, on konstandid, ja siis lihtsalt hindame $f(x, y)$ tuletist x suhtes kui tavalist ühe muutuja tuletist.

Kõik tuletamise reeglid (korrutisreegel, korrutisreegel, ahelareegel jne) ühe muutuja arvutusest jäävad kehtima: lihtsalt seal on täiendavad muutujad, mis hõljuvad ringi.

Üks võimalik väärarusaam on, et osaline tuletis konkreetse muutuja suhtes sõltub ainult sellest muutujast. See ei ole tõsi. Osatuletise avaldis x suhtes sõltub potentsiaalselt nii x kui y . Mis tähendab, et osalise tuletise väärtus sõltub punkti asukohast, ka teisest koordinaadist.

Erandiks on additiivselt eraldatavad funktsioonid. Teisisõnu, kui me võime kirjutada $F(x, y)$ kui $f(x) + g(y)$, kus $f(x)$ on ühe muutuja x funktsioon ja $g(y)$ on ühe muutuja y funktsioon. Siis on $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = f'(x)$ ja sõltumatu y ja $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = g'(y)$ ja sõltumatu muutujast x .

Me võime üldistada osalisi tuletisi rohkem kui kahe muutuja funktsioonidele: iga sisendmuutuja kohta saame osalise tuletise selle muutuja suhtes. Protseduur jääb samaks:



käsitleme kõiki muutujaid peale huvipakkuva muutuja konstantidena ja seejärel diferentseerime huvipakkuva muutuja suhtes.

Geomeetriliselt saab osalisi tuletisi tõlgendada kui ühe muutuja suhtes diferentseeritavate funktsioonide graafikute puutujate kallakuid, kui me fikseerime teise muutuja väärtuse.

Osaline tuletis f'_x näitab, kui kiiresti funktsioon $f(x, y)$ muutub suunas x ja f'_y näitab, kui kiiresti funktsioon $f(x, y)$ muutub y suunas.

Üldiselt, kui $z = f(x, y)$ on rohkem kui kahe sõltumatu muutuja funktsioon, siis $z = f(x, y)$ osaline tuletis ühe muutuja suhtes, jättes kõik teised muutujad konstantseks, z osaline tuletis selle muutuja suhtes.

- **Mitme muutujast koosneva funktsiooni kõrgema astme osalised tuletised**

Nagu ühe muutuja puhul, on meil ka siin kõrgema astme osalised tuletised iteratiivse osalise diferentseerimise abil. Üldiselt saab esimese astme osatuletisi $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ ja $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ diferentseerida järjestikku kõrgema astme osatuletisteks.

Näiteks $\frac{\partial f^2(x,y)}{\partial x^2}$ on $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ tuletis x suhtes. Kahe muutuja x ja y funktsiooni jaoks on meil neli teise astme osatuletist: $\frac{\partial f^2(x,y)}{\partial x^2}, \frac{\partial f^2(x,y)}{\partial x \partial y}, \frac{\partial f^2(x,y)}{\partial y \partial x}, \frac{\partial f^2(x,y)}{\partial y^2}$

Märkus 2.1. Osatuletisi tuletisi rakendatakse indekse märkimises vasakult paremale, samas kui tuletisi diferentsiaaloperaatorite märkimises rakendatakse paremalt vasakule. Praktikas on osaliste tuletiste järjekord harva oluline.

Teoreem 2.2. Kui mõlemad osalised tuletised $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ ja $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ on pidevad, siis on nad võrdsed.

Märkus 2.3.

- Teisisõnu, see segatud osaline tuletis on alati võrdne (arvestades kergeid eeldusi pidevuse kohta), nii et tegelikult on ainult kolm teise astme osalist tuletist.
- Seda teoreemi saab tõestada, kasutades tuletise piirmääratlust ja keskvaartuse teoreemi. Tõestuse üksikasjad ei ole valgustavad, seega jätame need välja.
- Me võime jätkata ja võtta teise astme tuletisväärtustest kõrgema astme osalisi tuletisi.

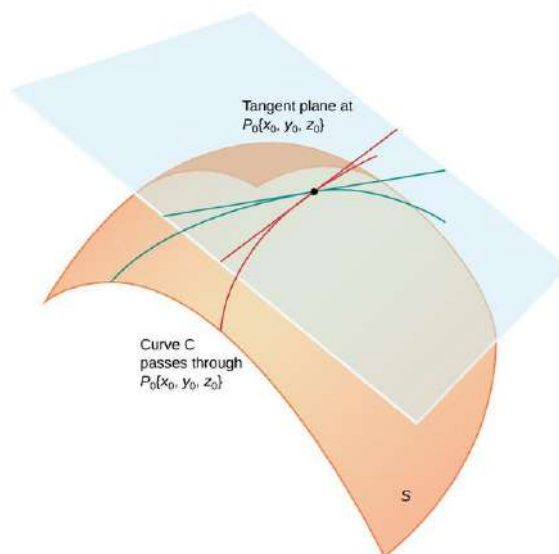
5. Rakendused igapäevaelus

Tangentsidel on palju rakendusi igapäevaelus, alates arhitektuurist kuni inseneriteaduseni ja füüsikani. Me ütleme, et puutuja on sirge, mis puudutab kõverat välise punkti juures. Geomeetrias on puutuja sirge, mis puudutab kõverat ühes punktis.



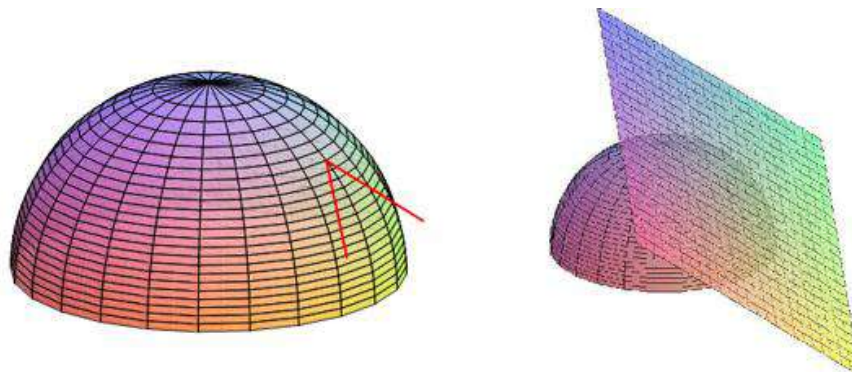
Tangentsitasand kujutab pinda, mis sisaldab kõiki kõvera puutujaid punktis $P_0 = [x_0, y_0, z_0]$, mis asub pinnal ja läbib seda punkti. Seega võimaldab puutetasand ennustada pindade käitumist funktsiooni teatud punktides.

Määratlus 2.3. Olgu $P_0 = [x_0, y_0, z_0]$ punkt pinnal S ja olgu C kõver, mis läbib P_0 ja asub täielikult punktis S . Kui kõigi selliste kõverate puutujate sirgjooned punktis P_0 jäävad samale tasandile, siis nimetatakse seda tasandit punkti P_0 puutuja tasandiks punktile S .



Joonis 2.4 Pinna S puutetasapind punktis P_0 sisaldab järgmist kõik kõverate puutujate sirgjooned S , mis lähevad läbi pindala P_0 .

Määratlus 2.4. Olgu S pind, mis on defineeritud diferentseeritava funktsiooniga $z = f(x, y)$, ja olgu $P_0 = [x_0, y_0]$ punkt $f(x, y)$. Siis on S puutetasandi võrrand punktis P_0 antud järgmiselt. $z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$



Joonis 2.5. Tangentsvektorid ja puutetasand



Co-funded by
the European Union



Tangentsidel on mitmeid olulisi rakendusi erinevates valdkondades, eriti matemaatikas, füüsikas, inseneriteaduses ja geomeetrias. Mõned tangentside rakendused on järgmised:

- Geomeetria ja trigonomeetria
- Arhitektuur
- Tehnika ja projekteerimine
- Füüsika

- **Geomeetria ja trigonomeetria**

Tangentsidel on oluline roll kõverate uurimisel. Need on jooned, mis puudutavad kõverat ühes punktis, mis on risti kõvera raadiusega selles punktis. Tangente kasutatakse geomeetriliste omaduste, näiteks raadiuse, läbimõõdu, akordi ja ringjoone pikkuse määramiseks.

- **Arhitektuur**

Tangente kasutatakse ehitiste, näiteks võlvide ja kupplite, kõverate kujundamiseks. Arhitektid kasutavad tangente, et luua silmale meeldivaid kõverusi.

- **Tehnika ja projekteerimine**

Tangente kasutatakse teede, sildade ja muude konstruktsioonide kurvide projekteerimiseks. Tangentide abil saavad insenerid luua kurve, mis on ohutud ja tõhusad liiklemiseks. Tangente kasutatakse autotööstuses, lennunduses ja tsiviilehituses, et projekteerida teede, sildade ja muude konstruktsioonide sujuvate üleminekute ja tõhusate kurvidega teede, sildade ja muude konstruktsioonide projekteerimiseks.

- **Füüsika**

Tangente kasutatakse objektide liikumise analüüsimiseks, näiteks mürsu trajektoori puutuja mõnes punktis näitab mürsu kiiruse suunda selles punktis.

- **Tangent igapäevases elusituatsioonis**

- Paraboolkaare projekteerimine - Paraboolkaar on paraboolikujuline kõver. Parabooli kasutatakse arhitektuuris sageli kaarte ja kuppelde loomiseks.
- Ringikujulise silla projekteerimine - Ringikujuline sild on sild, mis on ringikujuline. Ringikujulisi silde kasutatakse sageli jõgede ja muude takistuste ületamiseks.
- Veeremi projekteerimine - Veeremid on loodud selleks, et pakkuda sõitjatele põnevat elamust. Rööbastee projekteerimiseks kasutavad insenerid rööbastee kuju määramiseks puutujaid. Tangentsid tagavad, et rollercoaster on ohutu ja pakub sõitjatele sujuvat sõitu.



Co-funded by
the European Union



- Auringraja projekteerimine - Auringrajad on loodud selleks, et pakkuda sõitjatele väljakutseid ja põnevaid kogemusi. Auringraja projekteerimiseks kasutavad insenerid raja kuju määramiseks puutujaid. Tangendid tagavad, et rada on ohutu ja pakub sõitjatele ausat võistlust.
- Golfiväljaku projekteerimine - Golfiväljakud on loodud selleks, et pakkuda golfimängijatele väljakutset ja nauditavat elamust. Golfiväljaku projekteerimiseks kasutavad arhitektid tangentsid, et määrata faarvaatrite ja haljasalade kuju. Tangendid tagavad, et
- Skateboardparkide projekteerimine - Skateboardipargid on mõeldud selleks, et pakkuda rulatajatele turvalist ja lõbusat kohta oma oskuste harjutamiseks. Rula- ja rulapargi projekteerimiseks kasutavad arhitektid rampide ja kausside kuju määramiseks puutujaid. Tangentsid tagavad, et rula pargis on turvaline ja pakub rulatajatele erinevaid väljakutseid.



Co-funded by
the European Union



6. Viited

- [1] https://www.sfu.ca/math-coursenotes/Math%20157%20Course%20Notes/sec_PartialDifferentiation.html
- [2] https://web.northeastern.edu/dummit/docs/calc3_2_partial_derivatives.pdf
- [3] <https://vipulnaik.com/math-195/>
- [4] https://nucinkis-lab.cc.ic.ac.uk/HELM/HELM_Workbooks_26-30/WB28-all.pdf
- [5] https://www.sfu.ca/math-coursenotes/Math%20157%20Course%20Notes/sec_PartialDifferentiation.html
- [6] https://math.libretexts.org/Courses/Mount_Royal_University/MATH_3200%3A_Mathematical_Methods/6%3A__Differentiation_of_Functions_of_Several_Variables/6.4%3A__Tangent_Planes_and_Linear_Approximations
- [7] <http://prac.im.pwr.wroc.pl/~kajetano/AM2/fun2var/fun2var-3.html>
- [8] <https://www.storyofmathematics.com/partial-derivatives/>
- [9] Miller, Jeff (2009-06-14). "Arvutuse sümbolite varaseimad kasutusviisid". Erinevate matemaatiliste sümbolite varaseimad kasutused. Välja otsitud 2009-02-20
- [10] <https://www.geeksforgeeks.org/tangents-in-everyday-life/>
- [11] Videod: <https://www.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/multivariable-derivatives/partial-derivatives/v/partial-derivatives-introduction>



Co-funded by
the European Union



3. TEEMA: Skalaarvälja gradient

1. Teema valiku põhjendus

Vektorvälja või skalaarvälja saab diferentseerida asukoha suhtes kolmel viisil, et saada teine vektorväli või skalaarväli. On kolm tuletist: skalaarvälja gradient, vektormälja diverents ja vektormälja kõverus.

See moodul uurib skalaarvälja gradienti.

2. Ajalooline taust

Gradienti tähistas Hamilton 1846. aastal Δ . Aastaks 1870 tähistati seda ∇ , ümberpööratud delta ja seetõttu nimetati seda "atle". 1871. aastal kirjutas Maxwell: "Suurus ∇P on vektor. Ma julgen, kuigi väga kõhklevalt, nimetada seda P . kallakuks." Nimetust "kalle" enam ei kasutata, kuna see on asendatud "gradientiga". "Gradient" läheb tagasi sõnale "grade", tee või pinna kalle. Nimetus "del" ilmus esimest korda trükis 1901. aastal, raamatus "*Vector Analysis, A text-book for the use of students of mathematics and physics founded upon the lectures of J. Willard Gibbs, by E. B. Wilson*".

3. Õpitulemused

Selle mooduli läbimisel peaksid õpilased olema võimelised

- leida skalaarvälja gradienti
- suuna tuletise arvutamiseks

Eeltingimused: Enne selle mooduli alustamist peaksid üliõpilased tegema järgmist.

- olema tuttav kahe või kolme muutuva funktsiooni mõistega
- olema tuttav osalise diferentseerimise mõistega
- olema tuttav skalaar- ja vektorväljadega

4. Teoreetilised alused

- Gradient

Määratlus 3.1. Skalaarvälja $f(x, y, z)$ gradient on vektor $\text{grad} f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$, kus $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ on vastavalt x, y, z koordinaatide suundades olevad standardsed ühikvektorid.

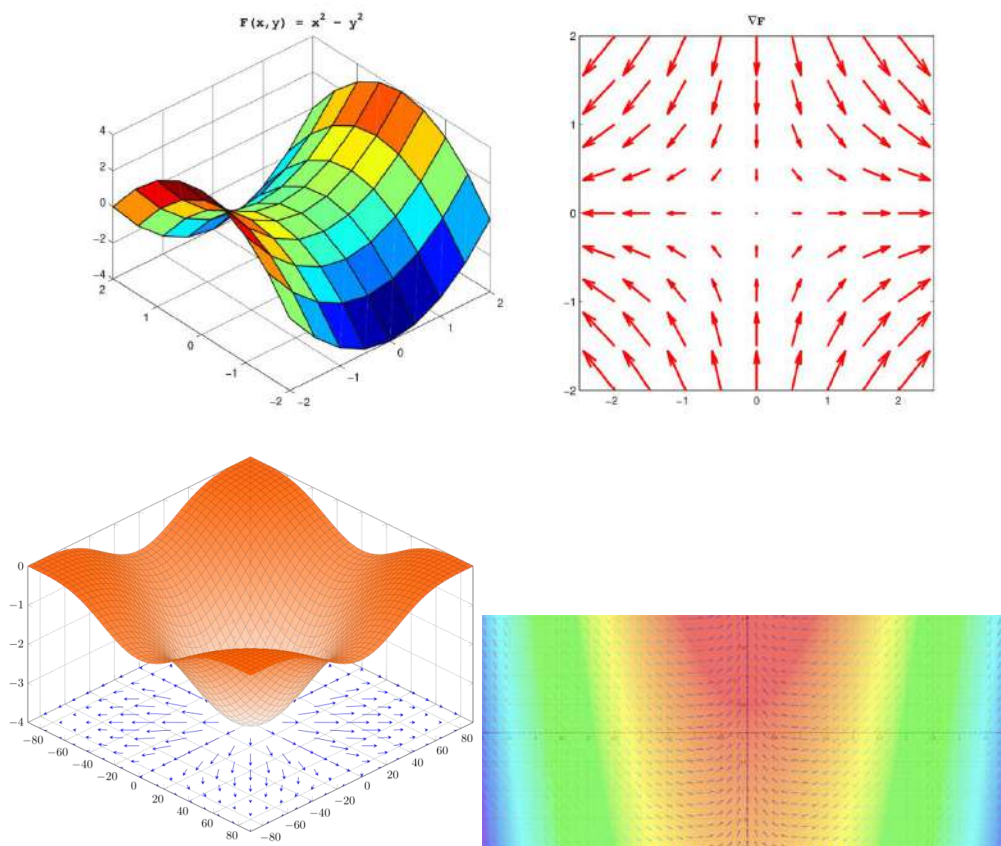


Mõnes rakenduses on kombeks esitada gradienti kui selle komponentide ridade vektorit või veergude vektorit ristkülikukorraksete koordinaatsüsteemis. Sageli kasutatakse $\text{grad} f$, asemel tähistust ∇f . (∇ on vektor-diferentiaaloperaator nimega "del" või "nabla", mis on defineeritud $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$. Vektor-diferentiaaloperaatorina säilitab ta vektori omadused, teostades samal ajal ka diferentseerimist).

Kui f on mõne muu muutuja funktsioon, siis üldiselt n , gradient on defineeritud analoogiliselt: vektori komponent mis tahes koordinaatides x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, on $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ osaline tuletis f suhtes x_i .

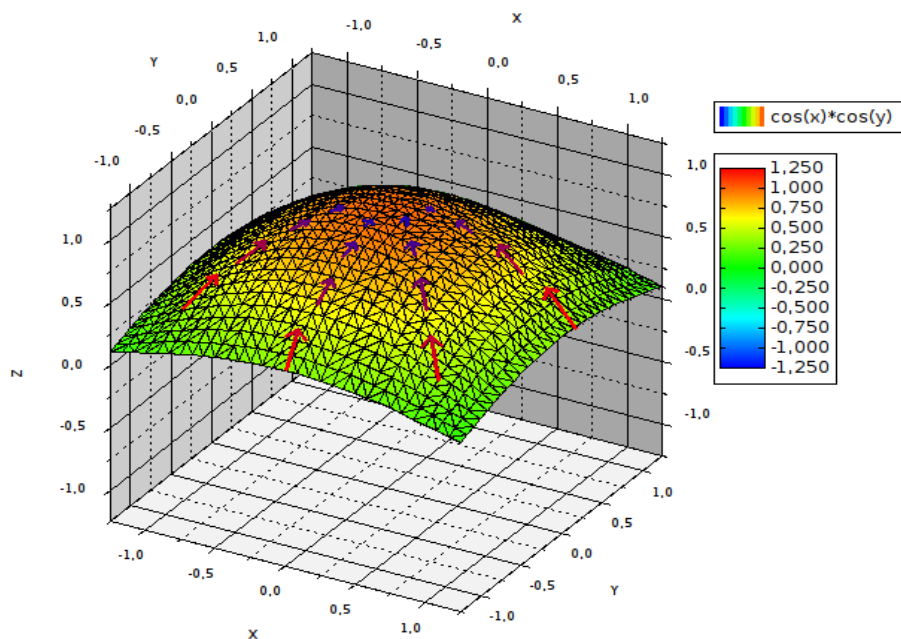
Funktsioon f on skalaarfunktsioon (skalaarväli), kuid $\text{grad} f$, on vektorväärtusega funktsioon (vektorväli): see võtab sama arvu argumente kui f ja väljastab vektori sama arvu koordinaatidega.

Järgnevatel joonistel on esitatud mitu skalaarfunktsioonide ja vastavate gradientide vektorväljade kujutist. Esimene on funktsioon $f(x, y) = x^2 - y^2$, Järgmisel joonisel on funktsioon $f(x, y) = -(\cos^2 x + \cos^2 y)^2$ gradient kujutatud projitseeritud vektoriväljana alumisele tasandile ja gradient, mida kujutavad sinised nooled, tähistab skalaarfunktsiooni suurima muutuse suunda.



Joonis 3.1.

Järgmisel joonisel on pinnal kujutatud gradient - punased nooled tähistavad suurimat tõusu, sinised aeglasemat ning peal on tõus ja gradient null.



Joonis 3.2.

Omadused:

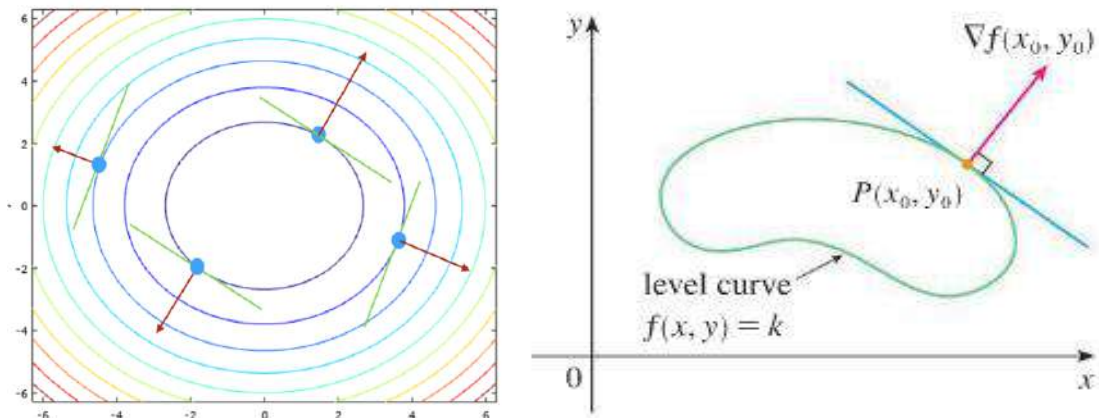
- **Lineaarsus:** Gradient on lineaarne selles mõttes, et kui f_i , $i = 1, 2, \dots, n$ on reaalkäitusega diferentseeritavad funktsioonid ja $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$ on konstandid, siis,

$$\text{grad}(c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_n f_n) = c_1 \text{grad} f_1 + c_2 \text{grad} f_2 + \dots + c_n \text{grad} f_n.$$

- **Toote reegel:** Kui f ja g on reaalkäitusega diferentseeritavad funktsioonid, siis väidab tootereegel, et korrutis $f g$ on diferentseeritav ja

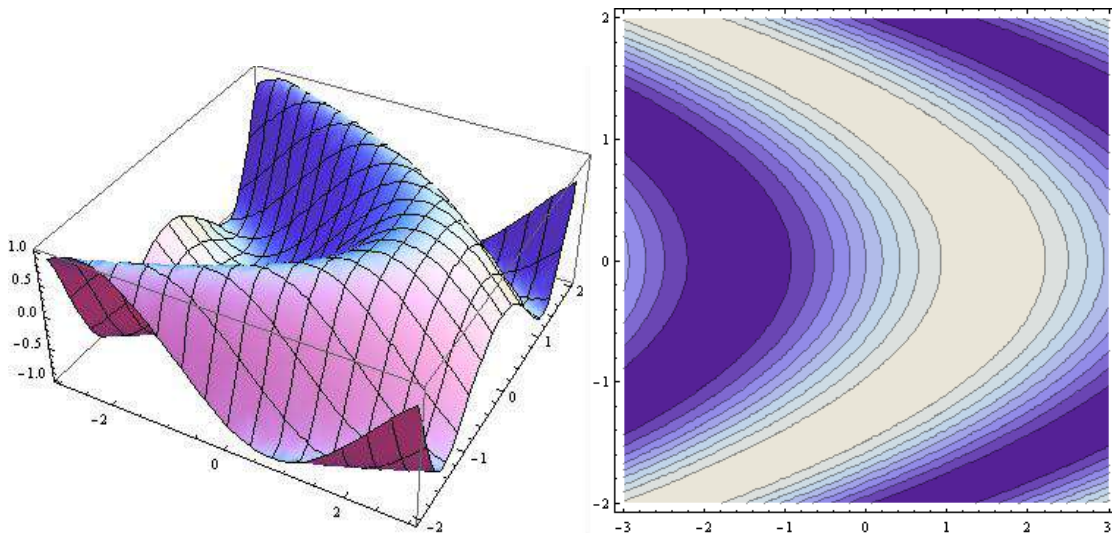
$$\text{grad}(f g) = f \text{grad} g + g \text{grad} f.$$

Vektorgrad f annab f suurima muutumiskiiruse suuruse ja suuna igas punktis A . Gradientvektor $\nabla f(x_0, y_0)$ on ortogonaalne (või risti) tasemekõveraga $f(x, y) = k$ punktis $A = [x_0, y_0]$. Samamoodi on gradientvektor $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ ortogonaalne tasemepinnaga $f(x, y, z) = k$ punktis $A = [x_0, y_0, z_0]$. Järgneval joonisel on esitatud gradientvektori positiivne suund funktsioonil f_2 . kontuuride erinevates punktides. Positiivse gradienti suund on tähistatud punase noolega. Kontuuri puutujajoon on näidatud rohelse värviga.



Joonis 3.3.

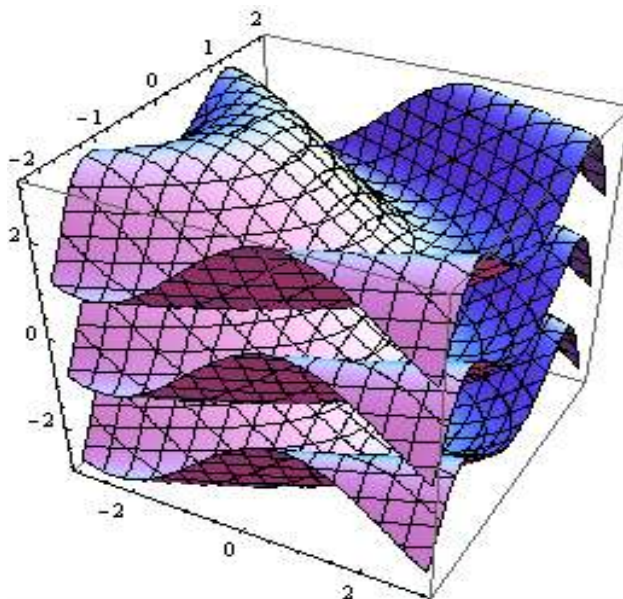
Järgmistel joonistel on funktsioon $f(x, y) = \sin(x + y^2)$ ja selle kontuurijooned.



Joonis 3.4.

Järgmisel joonisel on visualiseeritud ekvipotentsiaalpinnaid funktsiooni

$$f(x, y, z) = \sin(x + y^2) + z.$$



Joonis 3.5.

Kuna gradientvektor on $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$, siis on $f(x, y, z) = k$ antud pinna puutetasandil $A = [x_0, y_0, z_0]$ võrrand

$$\frac{\partial f(A)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(A)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial f(A)}{\partial z}(z - z_0) = 0.$$

Kui meil on vaja sirget, mis on pinna suhtes punktist ortogonaalne - normaaljoon, siis on seda piisavalt lihtne saada, kui meenutame, et joone võrrandiks on vaja ainult punkti ja paralleelvektorit. Kuna me tahame sirget, mis asub punktis $A = [x_0, y_0, z_0]$, siis teame, et see punkt peab samuti olema sirgel ja me teame, et $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ on vektor, mis on pinna suhtes normaalne ja seega on sirgega paralleelne. Seega on normaaljoone võrrand,

$$\begin{aligned} x &= x_0 + t \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} \\ y &= y_0 + t \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} \\ z &= z_0 + t \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}, \quad t \in R \end{aligned}$$

Eelnevalt tutvustasime gradienti kartesiaanlikes koordinaatides. Gradienti võib väljendada ka teistes koordinaatides, nt polaar-, silindri- ja sfäärikoordinaatides. Polaarkoordinaatides on gradient antud järgmiselt

$$\text{grad}f(r, \varphi) = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi,$$



silindrilistes koordinaatides on gradient antud järgmiselt

$$\text{grad}f(r, \varphi, z) = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z,$$

kus r on aksiaalkaugus, φ on asimuut- või asimuutnurk, z on aksiaalkoordinaat ja $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ on piki koordinaatide suunda suunatud ühikvektorid.

Sfäärilistes koordinaatides on gradient antud järgmiselt

$$\text{grad}f(r, \varphi, \theta) = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta,$$

kus r on radiaalkaugus, φ on asimutaalnurk ja θ on polaarnurk ning $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta$ on jällegi koordinaatide suundades paiknevad ühikvektorid.

- Suunatud tuletis

Funktsioon f muutus antud suunas (määratud ühikvektorina \vec{l}) määratakse skalaarproduktiga $\text{grad}f \cdot \vec{l}$ põhjal. Seda skalaarset suurust nimetatakse suunaliseks tuletiseks.

Määratlus 3.2. Kui $\vec{l} = (l_x, l_y)$ on ühikvektor, siis on f suunaline tuletis \vec{l} suunas $A = [x_0, y_0]$, mida tähistatakse $\frac{df(A)}{d\vec{l}}$, defineeritud kui piirväärtus $\frac{df(A)}{d\vec{l}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + hl_x, y_0 + hl_y) - f(x_0, y_0)}{h}$, tingimusel, et piirväärtus on olemas.

Vastav määratlus, kui f on rohkem muutujaid, on analoogne. Kui \vec{l} on ühikvektor ühes koordinaadisuunas, taandub suunaline tuletis vastavaks osaliseks tuletiseks.

Teoreem 3.1. Kui \vec{l} on ükskõik milline ühikvektor ja f on funktsioon, mille kõik osalised tuletised on pidevad, siis rahuldab suunav tuletis $\frac{df}{d\vec{l}} = \text{grad}f \cdot \vec{l}$.

See tulemus eeldab, et suund \vec{l} on ühikvektor. Kui soovitud suund ei ole ühikvektor, tuleb suunavektor kõigepealt normaliseerida.

Mõnikord anname nurgana muutumise suuna α ja γ . Näiteks võime öelda, et tahame f muutumise kiirust suunas α . Ühikvektor, mis näitab selles suunas, on antud $\vec{l} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. Kolmemõõtmelisel juhul $\vec{l} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, kus α, β, γ on nurgad, mida vektor \vec{l} teeb koordinaatteljega, nimetatakse suunakosiniideks. Sellisel juhul arvutatakse suuna tuletis kui



Co-funded by
the European Union



$$\frac{df}{d\vec{l}}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \alpha, \quad \frac{df}{d\vec{l}}(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma.$$

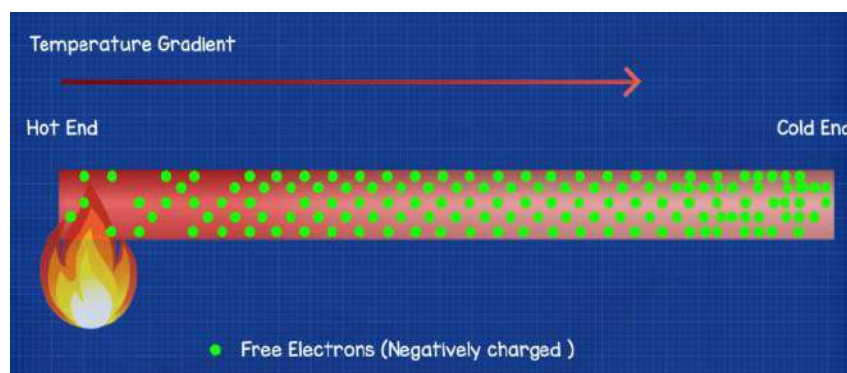
Suundderivaatide arvutamise gradientide teoreemi põhjal saame tuletada mitu järeldust selle kohta, kuidas suundderivaatiivi suurus sõltub suunast. \vec{l} :

Järeldused: Oletame, et f on diferentseeritav funktsioon, mille gradient on $\text{grad} f$ ja \vec{l} on ühikvektor. Siis kehtib järgmine:

- 1) Maksimaalne väärtus $\frac{df}{d\vec{l}}$ tekib siis, kui \vec{l} on ühikvektor, mis näitab suunas $\text{grad} f$, , kui $\text{grad} f \neq 0$, ja maksimaalne väärtus on $|\text{grad} f|$. Teisisõnu, gradient näitab suunas, kus f kasvab kõige kiiremini.
- 2) Minimaalne väärtus $\frac{df}{d\vec{l}}$ tekib siis, kui \vec{l} on ühikvektor, mis osutab $-\text{grad} f$, vastassuunas, kui $\text{grad} f \neq 0$, ja minimaalne väärtus on $-|\text{grad} f|$. Teisisõnu, gradient osutab vastassuunas, kus f väheneb kõige kiiremini.
- 3) $\frac{df}{d\vec{l}}$ väärtus on null, kui ja ainult siis, kui \vec{l} on ortogonaalne $\text{grad} f$.

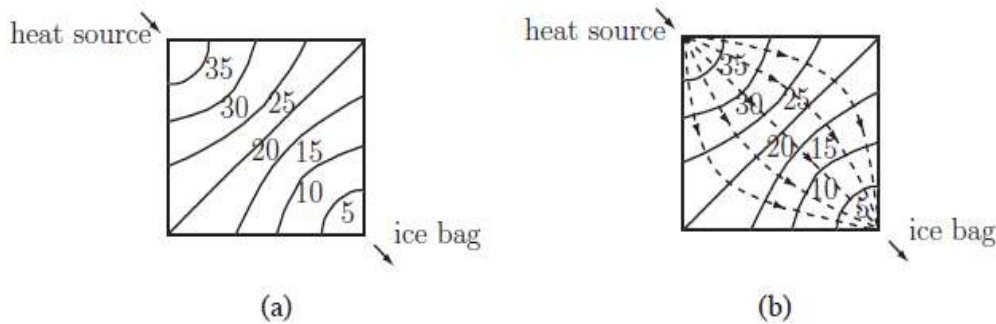
5. Rakendused igapäevaelus

Vaadelda ruumi, kus temperatuur on antud skalaarväljaga T , , nii et igas punktis $[x, y, z]$ on temperatuur $T(x, y, z)$, sõltumata ajast. Igas ruumi punktis näitab $\text{grad} T$ gradient selles punktis, millises suunas temperatuur kõige kiiremini tõuseb, eemaldudes $[x, y, z]$. Gradienti suurus määrab, kui kiiresti temperatuur selles suunas tõuseb.



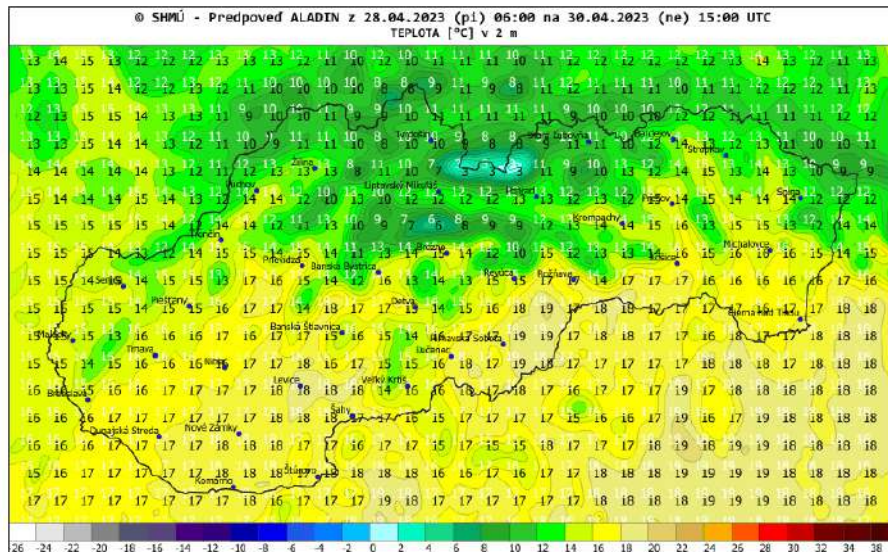
Joonis 3.6.

Järgmisel joonisel on kujutatud temperatuurikontuurid ja soojusvoogude jooned metallplaadi jaoks. Soojusvoolu suund on piki voolujooni, mis on kontuuridega ortogonaalne (joonisel b on katkendlikud jooned); see soojusvoog on proportsionaalne vektorväljaga $\text{grad} f$.



Joonis 3.7.

Samuti on sageli avaldatud päevakaarte, mis näitavad temperatuuri kogu riigis kontuurjoonte abil. Järgmine joonis on näide

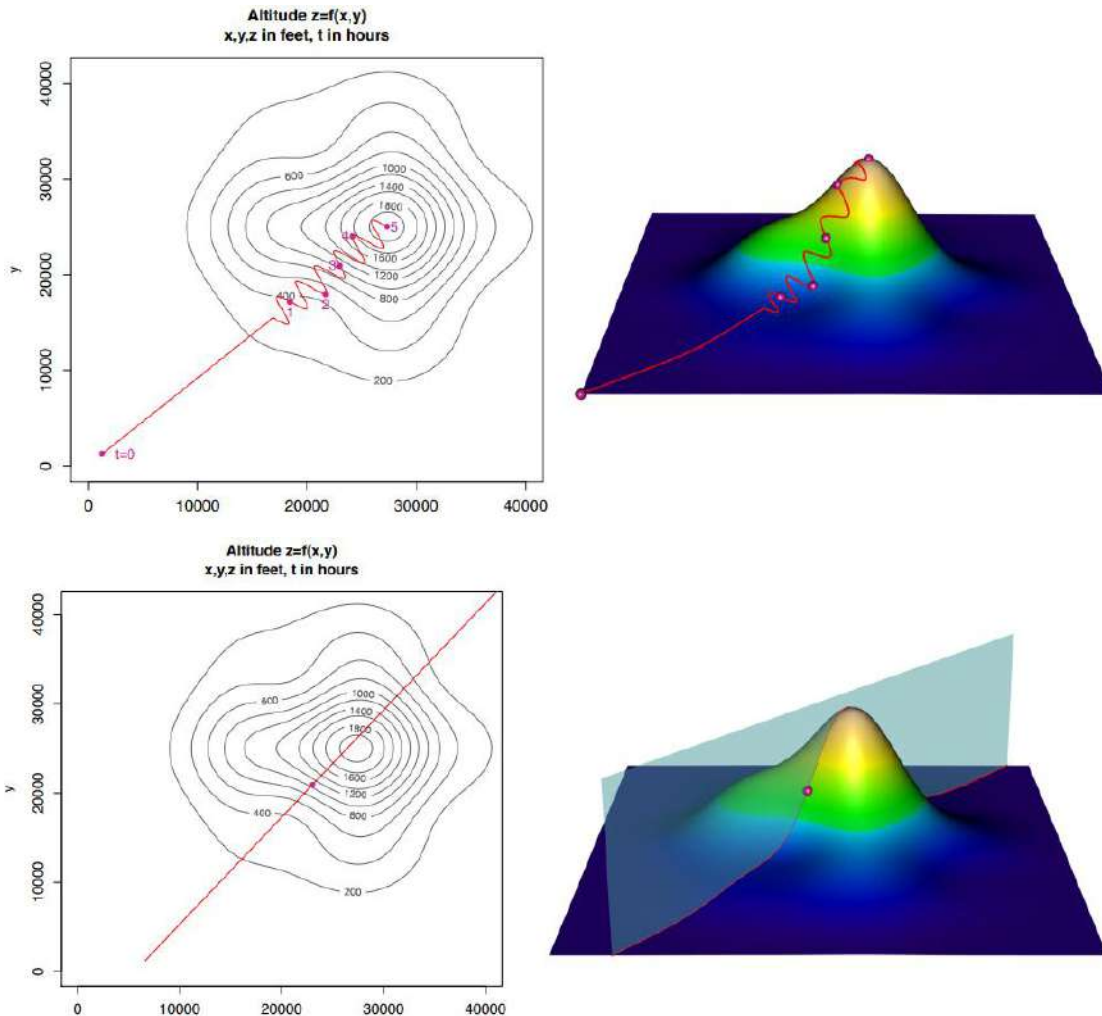


Joonis 3.8.

Vaadeldakse nüüd pinda, mille kõrgus merepinnast punktis $[x, y]$ on $f(x, y)$. Punktif kaldeng on tasapinnaline vektor, mis näitab selles punktis kõige järsema nõlva või tõusu suunas. Kalda järskus selles punktis on antud kaldengivektori suuruse järgi. Gradienti saab kasutada ka skalaarvälja muutumise mõõtmiseks teistes suundades, mitte ainult suurima muutuse suunas, võttes punktprodukti. Oletame, et mäe kõige järsem kalle on 40%. Otse ülesmäe kulgeva tee kalle on 40%, , kuid nurga all ümber mäe kulgeva tee kalle on madalam. Näiteks kui tee on 60° nurga all mäe ülesmäe suunas (kui mõlemad suunad on projitseeritud horisontaaltasandile), siis on tee kalle piki teed kaldevektori ja piki teed kulgeva ühikuvektori punktproduksioon, nimelt 40% korda 60° kosinus või 20%.



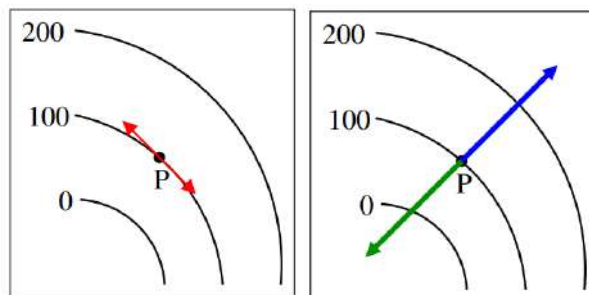
Üldisemalt, kui mäekõrguse funktsioon f on diferentseeritav, siis annab ühikvektoriga punktiiritud f gradient mäe tõusu vektori suunas, f suunaline tuletis piki ühikvektorit \vec{l} .



Joonis 3.9.

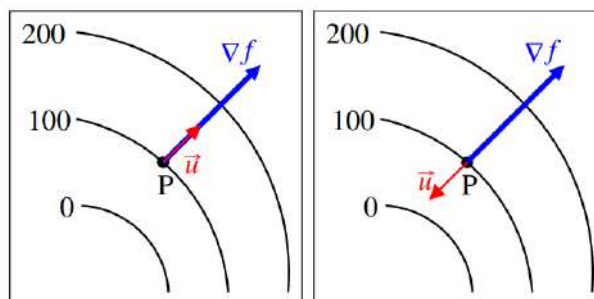
Punktis P , mis suunas \vec{u}

- **Võimsa matkaja** tahab kõige järsemat ülesmäge.
- **Võimsa suusataja** soovib kõige järsemat laskumisrada.
- **Laisk matkaja** tahab vältida igasugust kõrguse muutust.



Joonis 3.10.

Kõrguse muutuste vältimiseks kõnnib laisk matkaja mööda tasast kõverust. Punktis P , on suund \vec{u} puutub kokku tasanduskõveraga, mis annab kaks ülaltoodud võimalust. Sellel teekonnal ei toimu mingit kõrguse muutust, st $\frac{df}{d\vec{u}} = 0$, niigrad $f \cdot \vec{u} = 0$, niigrad $f \perp \vec{u}$ - tõus on risti tasanduskõveraga.



Joonis 3.11.

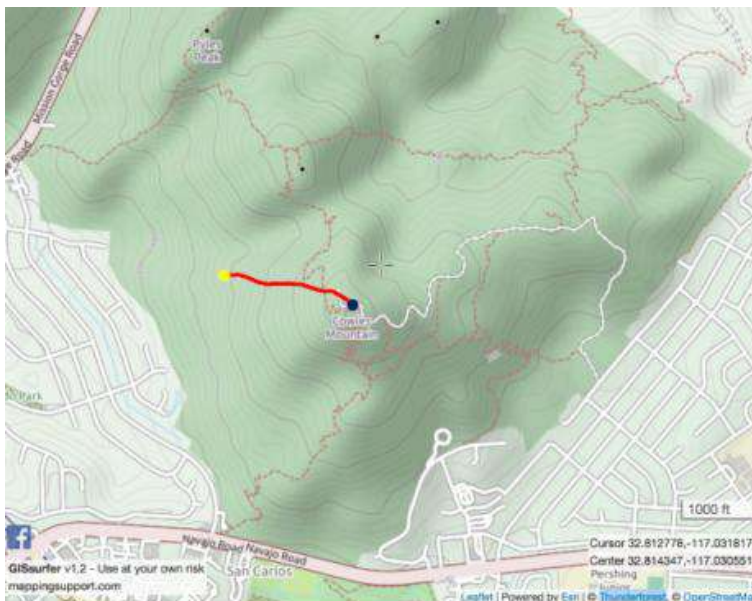
Võimsuse matkaja puhul on $\frac{df}{d\vec{u}}$ maksimaalne väärtus $+|\text{grad}f|$, seega on \vec{u} ühikvektor samas suunas nagu $\text{grad}f$ ja $\vec{u} = \frac{\text{grad}f}{|\text{grad}f|}$. See on kõige järsema tõusu ehk kiireima tõusu suund. Võimsate suusatajate puhul on \vec{u} ühikvektor, mis on vastupidises suunas nagu $\text{grad}f$ ja $\vec{u} = -\frac{\text{grad}f}{|\text{grad}f|}$. See on kõige järsema laskumise ehk kiireima languse suund.

Ülesanded:

- Kõige järsema tõusu tee: Joonistage tee, mis algab punktist (kollane), muutes pidevalt suunda, et jääda risti kontuuriga ülesmäge (kasvavas suunas).
- Kõige järsema laskumise tee: Sarnane, kuid allamäge minev.



Co-funded by
the European Union



Joonis 3.12.

Näide 3.1. Oletame, et mäe kõrgus merepinnast on antud $f(x, y) = 1000 - 0.01x^2 - 0.02y^2$. Kui te olete punktis $(60, 100)$, siis millises suunas muutub kõrgus kõige kiiremini? Kui suur on kõrguse maksimaalne muutumise kiirus selles punktis?

Lahendus. Maksimaalne kõrguse muutumise kiirus toimub siis kaldengvektori suunas.

$$\text{grad}f(x, y) = (-0.02x, -0.04y), \text{grad}f(60, 100) = (-1.2, -4)$$

Maksimaalne kõrguse muutumise kiirus selles punktis on,

$$|\text{grad}f(60, 100)| = \sqrt{(-1.2)^2 + 4^2} = \sqrt{17.44} = 4.176.$$

Märkame, et oleme punktis $(60, 100)$ ja kõrguse suurima muutumiskiiruse suund selles punktis on antud vektoriga $(-1.2, -4)$. Kuna mõlemad komponendid on negatiivsed, siis tundub, et suurima muutumiskiiruse suund näitab pigem mäe keskme suunas ülespoole kui mäest eemale.



Co-funded by
the European Union



6. Viited

- [1] <https://en.wikipedia.org/wiki/Gradient>
- [2] <https://machinelearningmastery.com/a-gentle-introduction-to-partial-derivatives-and-gradient-vectors/>
- [3] https://mathweb.ucsd.edu/~gptesler/20c/slides/20c_dirderiv_f18-handout.pdf
- [4] https://nucinkis-lab.cc.ic.ac.uk/HELM/HELM_Workbooks_26-30/WB28-all.pdf
- [5] https://web.northeastern.edu/dummit/docs/calc3_2_partial_derivatives.pdf
- [6] <https://tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcIII/PartialDerivAppsIntro.aspx>
- [7] <https://people.math.sc.edu/meade/PROJECT/DRAFTS/SMch16.pdf>
- [8] https://theengineeringmindset.com/temperature-sensors-explained/temperature-gradient/#google_vignette
- [9] **Videod:** <https://www.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/multivariable-derivatives/gradient-and-directional-derivatives/v/gradient>



Co-funded by
the European Union



4. TEEMA: Kohalikud, piiratud kohalikud ja globaalsed äärmused

1. Teema valiku põhjendus

Mitmemõõtmeliste funktsioonide piiratud ekstreemide kasutamine esineb sageli optimeerimisprobleemides, kus on vaja maksimeerida või minimeerida antud funktsiooni teatud tingimustel. Praktikas esinevad mitme muutuja funktsioonide piiratud ekstreemid sageli majandus-, insener- ja matemaatikaprobleemides, samuti nende valdkondade antud probleemidele matemaatilise mudeli leidmisel.

2. Ajalooline taust

Mitme muutuja funktsioon on funktsioon, millel on rohkem kui üks sisendargument. See mõiste võeti kasutusele Vana-Kreekas, kus matemaatikud, nagu Archimedes ja Eukleidese, kasutasid geomeetriliste kujundite ja liikumise kirjeldamiseks mitut muutujat. Diferentsiaalarvutuse au võib omistada India matemaatikule Bhaskarale (1114-1185), kes demonstreeris näiteks seda, mida me praegu teame diferentsiaalkoefitsiendina, ja andis ka tänase Rolle'i teoreemi põhiidee. India matemaatik Madhava tegi koos teiste 14. sajandi Kerala koolkonna matemaikutega palju huvitavaid ekskursioone diferentsiaal- ja integraalarvutuse alal. Tõeline läbimurre toimus siiski 17. sajandil, kui Leibniz ja Newton töötasid selle kallal, mida praegu peetakse diferentsiaal- ja integraalarvutuse avastuseks. Esimese kirjaliku märkuse diferentsiaalarvutusest võib leida Leibnizi ja L'Hospitali 1695. aastal vahetatud kirjadest, kus Leibniz mainis 0,5. järje tuletamist. Sel ajal ei osanud ta veel ennustada selle tähtsust ega arvutamismeetodit. Siiski märkis ta, et sellest paradoksist saab ühel päeval kasulikke praktilisi järeldusi. Ka teised olulised teadlased järgisid seda ideed, sealhulgas sellised suurkujud nagu Bernoulli, Euler, Laplace, Fourier, Abel, Riemann ja Cauchy. Tänapäeval on mitme muutuja funktsioonidel oluline roll paljudes valdkondades, näiteks matemaatikas, füüsikas, majanduses, arvutiteaduses, inseneriteaduses ja paljudes teistes teadustes. Mitmemõõtmelisi funktsioone kasutatakse reaalse olukordade modelleerimiseks ja võimaldavad arvutada keerulisi süsteeme ja protsesse, mida oleks raske või võimatu lahendada ühe muutuja funktsiooni abil.

3. Õpiväljundid

Selle mooduli läbimisel peaksid õpilased olema võimelised

- mitmest muutujast koosnevate funktsioonide lokaalsete ekstreemide määratlus ja arvutusmeetodid
- kuidas määrata kahe muutuja funktsiooni piiratud lokaalsed ekstreemid
- leida mitme muutuja funktsiooni maksimaalne ja minimaalne väärtus antud alamhulga M alal



- teadmiste rakendamine praktikas

Eeltingimused: Enne selle mooduli alustamist peaksid üliõpilased teadma järgmist.

- ühe muutuja funktsiooni diferentseerimise põhimõte
- rohkemate muutujate funktsioonid
- mitme muutuja funktsioonide osalised tuletised

4. Teoreetilised alused

- Kahe muutuja funktsioonide kohalik äärmus

Kahe muutuja funktsiooni lokaalseid ekstreeme on kahte tüüpi: lokaalne maksimum ja lokaalne miinimum. Funktsioon $f(x, y)$ lokaalne maksimum esineb punktis (a, b) domeenist, kui iga punkti (x, y) kohta domeenist teatavas naabruses (a, b) kehtib, et $f(x, y) \leq f(a, b)$.

Funktsioon $f(x, y)$ lokaalne miinimum esineb punktis (a, b) domeenist, kui iga punkti (x, y) kohta domeenist teatavas naabruses (a, b) , kehtib, et $f(x, y) \geq f(a, b)$.

Kahe muutuja funktsiooni lokaalsete ekstreemide leidmiseks on erinevaid meetodeid, näiteks osaliste tuletiste meetod, Hessi maatriks või Lagrange'i korrutajad. Need meetodid võimaldavad määrata punkte, kus funktsioon muutub kasvavast vähenevaks või vähenevast kasvavaks, ja seega kindlaks teha, kas tegemist on lokaalse maksimumi või miinimumiga.

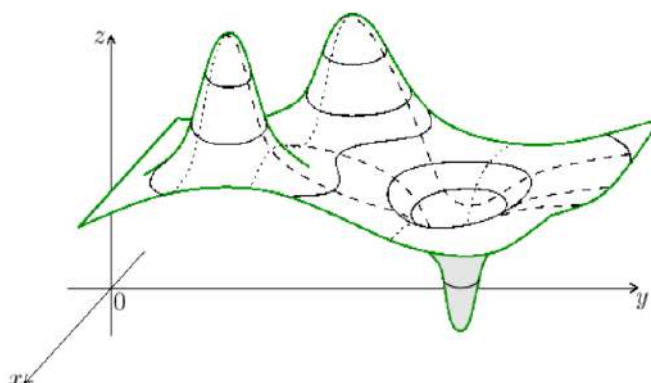
Olguf (x, y) funktsioon, millel on pidev teine osaline tuletis punkti (a, b) . naabruses. f funktsiooni Hessi maatriks on teise osalise tuletise maatriks ja Hessi maatriksi determinant (Hessi) arvutatakse järgmiselt:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

Siis on see nii: Kui funktsioon f Hessiuse determinant punktis (a, b) on positiivne ja teine osaline tuletis punktis (a, b) on positiivne, siis on f kohalik miinimum punktis (a, b) .

Kui funktsioon f Hessiuse determinant punktis (a, b) on positiivne ja teine osaline tuletis punktis (a, b) on negatiivne, siis on f kohalik maksimum punktis (a, b) .

Kui funktsioon f Hessiuse determinant punktis (a, b) on negatiivne, siis ei ole f punktis (a, b) lokaalset ekstreemumit. See test võimaldab määrata kahe muutuja funktsiooni lokaalseid ekstreemumeid, kui funktsioon on piisavalt sile ja tal on punkti (a, b) naabruses pidevad teised osalised tuletised. Kui Hessiuse determinant on null, siis on lokaalsete ekstreemumite määramiseks vaja teisi meetodeid.



Joonis 4.1.

- Kahe muutuja funktsioonide piiratud lokaalne äärmus

Ülesanne on leida selline punkt A kogumis M , mille funktsionaalne väärtus $f(A)$ on suurim või väiksem, võrreldes f väärtustega kogumi M punktides, mis asuvad punkti A lähedal. Punkti A nimetatakse piiratud äärmuse punktiks. Määratleme kahe muutuja funktsioonide piiratud äärmuse:

Olgu f kahe muutujaga funktsioon, mis on defineeritud aadressil $D(f) \subset E^2$, ja olgu set

$V = \{x, y\} \in D(f): g(x, y) = 0 \subset D(f)$ antakse. Võrrandiga määratud tingimus

$g(x, y) = 0$ mida täidavad kõigi funktsiooni f määratlusalal $D(f)$ punktide koordinaadid, mis asuvad kogumis V , nimetatakse piiranguks. Funktsiooni f , ekstreemid, mis on saavutatud piiranguga määratud kogumis $V \subset D(f)$, on funktsiooni piiratud lokaalsed ekstreemid. f .

Punkti $A = [x_0, y_0]$ nimetatakse piirangu $g(x, y) = 0$, piirangu f piiratud lokaalse maksimumi (miinimumi) punktiks, kui on olemas selline punkti $O_\epsilon(A)$ naabus A , et kõigi $X \in O_\epsilon(A)$, koordinaatide puhul, mille koordinaadid vastavad antud piirangule, kehtib $f(X) \leq f(A)$ ($f(X) \geq f(A)$). . Rangete ebavõrdsuste korral räägime rangest piiratud lokaalsest maksimumist või miinimumist. Funktsiooni piiratud kohaliku miinimumi ja maksimumi nimetatakse koos funktsiooni piiratud kohalikeks ekstreemideks. Kuidas määrata funktsiooni piiratud lokaalseid ekstreemasid? $f(x, y)$?

1. Muutujat y saab eraldada piirangust $g(x, y) = 0$ ja määrata muutujat $x, y = h(x)$ funktsioonina. See funktsioon saab asendada funktsiooniga $f(x, y)$, samas kui ühe muutujat x komposiitfunktsioon, mis on määratud kogumis V , on võimalik saada.

$f(x, h(x)) = F(x)$. Kõik funktsiooni $F(x)$ lokaalsed ekstreemid kogumis V on ka funktsiooni $f(x, y)$ piiratud lokaalsed ekstreemid kahe muutujaga kogumis V .

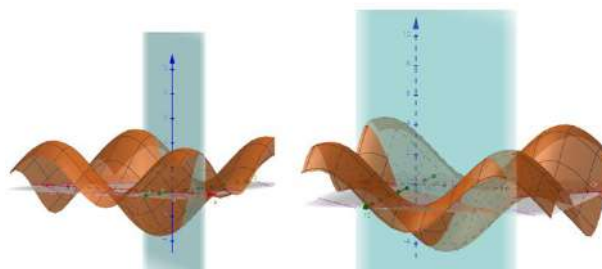
2. Muutujat x saab eraldada piirangust $g(x, y) = 0$ ja määrata muutujat $x = h(y)$ funktsioonina. Selle funktsiooni saab asendada funktsiooniga $f(x, y)$, samas kui ühe muutuja y komposiitfunktsioon, mis on määratud kogumis V , on võimalik saada järgmiselt.



$f(h(y), y) = F(y)$ Kõik funktsiooni $F(y)$ lokaalsed ekstreemid kogumis V on ka funktsiooni $f(x, y)$ piiratud lokaalsed ekstreemid kahe muutujaga kogumis V .

- Juhul, kui ühtegi muutujat x või y ei ole võimalik eraldada piirangust $g(x, y) = 0$ ja väljendada teise suhtes, võib kasutada Lagrange'i korrutajate meetodit. Määratleme abifunktsiooni, mida nimetatakse Lagrange'i funktsiooniks $L(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$, kus λ on suvaline konstant, mida nimetatakse Lagrange'i kordajaks. Funktsioon $L(x, y)$ on defineeritud kogumis $D(f)$, ja lisaks sellele kehtib kõigis kogumi V punktides $L(x, y) = f(x, y)$ nagu $g(x, y) = 0$ kogumi punktides V .

Kui mõni punkt $A = [x_0, y_0] \in V$ on funktsiooni $L = f + \lambda g$, lokaalse ekstreemumi punkt, siis punkt A on funktsiooni f piiratud lokaalse ekstreemumi punkt piirangu $g(x, y) = 0$. Jaoks Geomeetriline tõlgendus Funktsiooni f piiratud lokaalsed ekstreemid on z äärmuslikult paiknevate punktide koordinaadid kõveral, mis on funktsiooni $G(f)$ graafiku f löikepunkt silindrilise pinnaga, mis on määratud kõveraga, mis on määratletud tasapinnal xy piiranguga, kusjuures jooned sellel pinnal on koordinaattelje suunas. z.



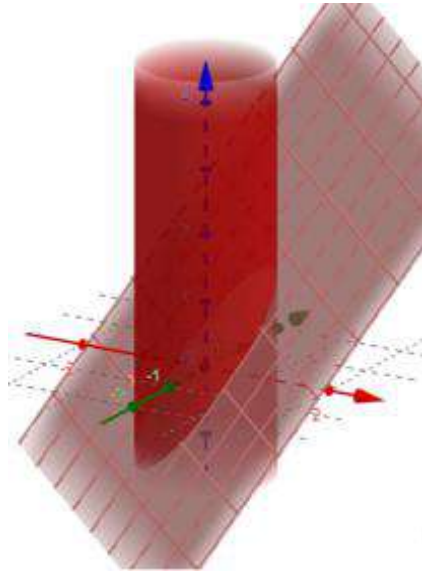
Joonis 4.2.

- Mitmemõõtmelise funktsiooni globaalsed ekstreemid

Mitmemõõtmelise funktsiooni maksimaalse ja minimaalse väärtuse leidmine selle domeeni antud alamhulgal M . Määrata ja valida funktsiooni maksimaalsed ja minimaalsed väärtused aadressil M , kasutades: i) kõiki kahe muutuja funktsiooni lokaalseid ekstreemumeid alamhulgal M ii) kõiki piiratud lokaalseid ekstreemumeid M piiril iii) leida väärtused M piiril, kus funktsioon saavutab oma maksimaalse ja minimaalse väärtuse.



Co-funded by
the European Union



Joonis 4.3.



5. Rakendused igapäevaelus

- Kauplemisel võib olla kasulik pöörata erilist tähelepanu äärmuslikele hinnatasemetele - näiteks turu kõrgeimatele ja madalaimatele hindadele -, et reageerida ostu- või müügivõimalustele. Rahanduses võivad äärmuslikud väärtused olla seotud ka riskiga. Näiteks võib riskikapitali kasutada uute ja innovaatiliste projektide rahastamiseks, kuid see võib olla seotud ka suurte kahjude ja ebaõnnestumistega.
- Meditsiinipraktikas on äärmuslikud juhtumid sageli otsustava tähtsusega patsiendi diagnoosi ja ravi määramisel. Arstid peavad suutma ära tunda ja ravida kõige raskemate sümptomite või seisunditega patsiente.
- Tööstuslikus tootmises võivad äärmuslikud väärtused olla osa kvaliteedikontrolli- ja järelevalveprotsessidest. Näiteks võivad tööstusseadmed olla projekteeritud töötama äärmuslikel temperatuuridel või rõhu all, et tagada kõrge tootmiskvaliteet.
- Arvutiturbe valdkonnas võivad äärmuslikud juhtumid olla seotud kõige ohtlikumate ohtude ja süsteemidele suunatud rünnakutega. Turvarühmad peavad olema võimelised neid kõige tõsisemaid ohte ära tundma ja nendega tegelema.
- Turunduses võivad äärmuslikud juhtumid olla seotud kõige edukamate kampaaniate ja strateegiatega, mis tõid kaasa müügi või brändi tuntuse kasvu. Nende juhtumite analüüs võib olla kasulik uute kampaaniate kavandamisel.
- Kindlustuse ja finantsplaneerimise puhul võivad õnnetusjuhtumite või vara kaotamisega seotud äärmuslikud juhtumid olla riski hindamisel ja kindlustusplaani kindlaksmääramisel võtmetähtsusega.
- Meteoroloogias on äärmuslikud juhtumid, nagu orkaanid, tornaadod või üleujutused, olulised ilmaprognooside tegemiseks ja hoiatuste avaldamiseks. Meteoroloogiameeskonnad peavad olema võimelised tuvastama äärmuslikke juhtumeid ja nendega tegelema, et vähendada kahju.
- Teaduses ja teadusuuringutes võivad äärmuslikud juhtumid olla otsustava tähtsusega uute teadmiste avastamisel ja teaduslike teooriate väljatöötamisel. Näiteks saab äärmuslikke tingimusi, nagu väga madalad või kõrged temperatuurid, kasutada materjalide omaduste testimiseks ja uute teaduslike läbimurrete avastamiseks.
- Spordis ja fitnessis on äärmuslikud juhtumid seotud parimate saavutuste ja rekorditega. Treeningplaane võib koostada nii, et need maksimeeriks sportlaste sooritust ja viiksid ekstreemsete tulemusteni, näiteks olümpiamedalite või maailmarekorditeni.



Co-funded by
the European Union



6. Viited

- [1] Velichová D.: Matemaatika II, STU Bratislava 2016, ISBN 978-80-227-4532-1
- [2] <https://www.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/applications-of-multivariable-derivatives/constrained-optimization/a/lagrange-multipliers-single-constraint>
- [3] <https://riunet.upv.es/bitstream/handle/10251/82485/Herrero%20-%20Constrained%20extrema%20of%20two%20variables%20functions.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- [4] <http://evlm.stuba.sk/~partner1/DBfiles/Lec6.pdf>
- [5] <https://www.youtube.com/watch?v=CQnZy4n85fE>
- [6] <https://math.fel.cvut.cz/en/people/habala/teaching/veci-ma2/ema2r3.pdf>
- [7] <https://sites.und.edu/timothy.prescott/apex/web/apex.Ch13.S8.html>
- [8] https://math.libretexts.org/Courses/Georgia_State_University_-_Perimeter_College/MATH_2215%3A_Calculus_III/14%3A_Functions_of_Multiple_Variables_and_Partial_Derivatives/Constrained_Optimization
- [9] <https://math.stackexchange.com/questions/3689844/finding-extrema-with-a-constraint-of-the-function>
- [10] <https://math.fel.cvut.cz/mt/txtz/1/txe3za1c.htm>



Co-funded by
the European Union



5. TEEMA: Tahkete kehade ristlõiked

1. Teema valiku põhjendus

Polüeedri ristlõiked (lõiked, mis on määratletud tasapinna ja polüeedri lõikumisel) on geomeetria põhikontseptsioon. Seda tehnikat kasutatakse laialdaselt tahkete kehade geomeetriliste omaduste uurimiseks ning saadud tasapinnalõikude kuju ja struktuuri analüüsimiseks [Anwar, N., and Najam, F. A. (2017)]. See parandab õpilaste arusaamist kolmemõõtmelisest geomeetriast, luues olulise seose 2D- ja 3D-geomeetria vahel, edendades ruumiliste seoste sügavamalt tõlgendamist. Ristlõiked on väga olulised paljudes STEM-valdkondades. Nagu märkis P. Lewis, [P.Lewis,2016], pakub ristlõike perspektiiv korraga kahte erinevat arhitektuurset kujutist: ristlõige paljastab varjatud üksikasjad, nagu seinapaksus ja vertikaalne korraldus, samas kui perspektiiv võimaldab vaatajal tõlgendada ristlõike mõju ühest vaatepunktist. Ristlõikeid kasutatakse laialdaselt ka inseneriteaduses, need on olulised erinevate ristlõike kujude struktuuri ja käitumise mõistmiseks. Nii parameetriliste kui ka üldiste meetodite abil arvutavad insenerid geomeetrilisi omadusi ja analüüsivad keerukaid ja komposiitprofiile, mis on olulised tehnosüsteemide toimivuse parandamiseks [Smith, 2019]. Lisaks kasutatakse ristlõikeid arvutigraafikas [Schumaker, 1990], eriti realistlike ja üksikasjalike 3D-mudelite loomiseks. 3D-objekti viilutades saame olulised andmed, et arvutada konkreetsed mõõtmised, mida on vaja konkreetsel eesmärgil.

2. Ajalooline taust

Vanaegsed egiptlased ja mesopotaamid olid ühed esimesed, kes kasutasid geomeetriat praktiliselt, eriti maa mõõtmisel ja arhitektuuris. Egiptlased, kes olid tuntud oma oskuste poolest monumentaalsete ehitiste, näiteks püramiidide ehitamisel, olid tõenäoliselt kaudselt kursis ristlõikega. Kuigi nende teadmised omandati peamiselt rakendusteadusena, panid need aluse geomeetrilistele mõistetele, mis hiljem laienesid kreeka ja hellenistlike mõtlejate kaudu. Geomeetria uurimine muutus formaalsemaks selliste matemaatikute nagu Eukleidese, kes töötas välja süstemaatilise lähenemise geomeetria, mida ta väljendas oma väärtuslikus teoses "Elemendid". Eukleidese uurimused hõlmasid kujundite tükeldamist, et uurida nende omadusi, mis pani aluse hilisemale tööle ristlõikete kohta. Kreeka matemaatikud nägid geomeetrilisi kujundeid matemaatilise analüüsi objektidena ja filosoofilise mõtlemise sümbolitena ning võime "läbi lõigata" kujundeid, et uurida nende sisemust, oli radikaalne idee, mis peegeldas nende laiemat püüdlust mõista reaalsuse nähtamatuid struktuure. Renessansiajastul, kui kunst, teadus ja arhitektuur õitsesid, arenes läbilõigete uurimine veelgi edasi. Kunstnikud ja teadlased, nagu Leonardo da Vinci, ning toonased arhitektid kasutasid ristlõikeid ehitiste planeerimiseks, anatoomia uurimiseks ja täpsemate jooniste loomiseks. Leonardo anatoomilised uuringud hõlmasid näiteks nii kehade kui ka esemete lahkamist, mis andis talle ülevaate nende toimimisest seestpoolt väljapoole. Ka arhitektid hakkasid kasutama ristlõikeid, et visualiseerida keeruliste ehitiste sisemist struktuuri, aidates neil luua projekte, mis ei olnud mitte ainult ilusad, vaid ka



Co-funded by
the European Union



konstruktsiooniliselt usaldusväärsed. Kepleri töö hõlmas ka ristlõikete uurimist ja analüüsimist. Kuigi Kepler on laialdaselt tuntud oma panuse poolest planeetide liikumisse, mängis tema vähemtuntud töö mahtude mõõtmise alal, eriti ebakorrapäraste tahkete kehade puhul, olulist rolli matemaatiliste meetodite arendamisel, mis ennetasid integraalarvutust. Oma teoses "*Nova Stereometria Doliorum Vinariorum*" käsitles Kepler keerulise, kumera kujuga veinitünnide mahu määramise probleemi. Kepler mõistis, et traditsioonilised geomeetrised mahuvormelid ei ole nende ebakorrapärase kujuga tünnide puhul hästi rakendatavad. Selle probleemi lahendamiseks hakkas ta tünne kontseptuaalselt "tükeldama", jagades need lõputuks hulgaks õhukesteks ristlõikudeks. Nende ristlõikete pindalade summeerimise teel sai ta ligikaudselt määrata kogu tünni ruumala. See meetod, mille kohaselt arvutatakse ruumala viilude summeerimise teel, sarnaneb integratsiooni kontseptsiooniga, mille hiljem vormistasid Isaac Newton ja Gottfried Leibniz arvutuste väljatöötamisel. Tänapäeval on ristlõiked tänapäeva elu oluline osa, mis ulatub kaugemale matemaatikast ja füüsikast. Tehnoloogia integreerimine võimaldab näiteks arhitektidel ja inseneridel luua üksikasjalikke digitaalseid ristlõike mudeleid, mis võimaldab suuremat vastupidavust konstruktsioonidele, millega nad töötavad. Lühidalt öeldes on ristlõiked arenenud vormide mõistmise allikast oluliseks kaasaegseks ressursiks, mis ühendab meie minevikku ja olevikku, edendades uuendusi nii erinevates valdkondades nagu tervishoid, tehnoloogia ja disain.

3. Õpitulemused

Pärast selle mooduli läbimist peaksid õpilased olema võimelised:

- Arendada oskust visualiseerida ja tõlgendada kujundeid, mis moodustuvad tasapinna ja hulktahuka ristumiskohast;
- Teha tahkete kehade pööramisi ja vaimseid manipulatsioone, ennustades polüeedrile tekitatud ristlõike kuju, ilma füüsilisi või digitaalseid esemeid kasutamata;
- Tunda kolmemõõtmeliste kujundite ja nende kahemõõtmeliste lõikude vahelist seost;
- Tunnistage, kuidas hulktahuka sümmeetria mõjutab saadud ristlõike kuju;
- Mõtle ja arutle geomeetriselt, et modelleerida hulktahukas erinevate lõikude tulemusel saadud tahkeid kehi.
- Kirjeldada ristlõikeid täpselt, kasutades geomeetrisel terminoloogiat (nt hulknurk, paralleel, risti);
- Teavitage tulemusi ja prognoose ristlõikete kohta suuliste selgituste, jooniste või mudelite abil.
- Lahendage ülesandeid, mis on seotud ristlõikete meetriliste ja geomeetriseliste omadustega.
- Uurige erinevaid meetodeid kongruentsete ristlõikete saavutamiseks.
- Analüüsige kriitiliselt tasandi orientatsiooni mõju saadavale ristlõikele.



Co-funded by
the European Union



- Uurige ootamatute tulemustega juhtumeid.

Eeltingimused: Eeltingimusteks on (1) 2D geomeetriliste põhikujude (nagu hulknurgad ja ringid) ja 3D tahkete kehade (nagu kuubikud, silindrid, koonused ja kerad) tundmine; (2) arusaam pindade, servade ja tippude vahelistest suhetest, mis on olulised 3D kujude visualiseerimiseks ja kirjeldamiseks; (3) teadmised geomeetriliste tulemuste kohta, mis hõlmavad tasapinnalisi ristumisi. Ristlõikete edasijõudnute õppimiseks, (4) 3D koordinaatsüsteemi (x, y, z) põhiteadmised võivad olla kasulikud, et analüüsida, kus ja kuidas tasapind lõikab tahkku. See on eriti kasulik, kui liigutakse ebakorrapärase kujuga ristlõikedele või kui mõistetakse matemaatikat lõikamise taga. (6) Esialgne arusaam transformatsioonidest, näiteks pööretest ja peegeldustest 2D- ja 3D-ruumis, võib samuti olla abiks. Need mõisted on aluseks edasijõudnute geomeetria teemadele, sealhulgas sümmeetriale ja hiljem ristlõikete klassifitseerimisele erinevates olukordades, kus (7) sfäärilised koordinaadid on väga olulised.

4. Teoreetilised alused

Polüeedrite ristlõigete mõistmiseks on väga oluline kaaluda lauseid, mis hõlmavad joonte ja tasandite vahelisi seoseid. Põhilised teoreemid on loetletud allpool.

Teoreem 5.1. *Mis tahes kahe tasapinna ristumiskoht ruumis on tühi või sirge.*

Teoreem 5.2. *Joonel on paralleelne tasandiga α , kui ja ainult siis, kui on olemas selline joon $m \subset \alpha$, et l on paralleelne joonega m .*

Otsene tulemus on:

- *Kui sirge l on paralleelne kahe tasandi lõikepunktiga, siis on ka l paralleelne mõlema tasandiga.*

Teoreem 5.3. *Kui sirge on paralleelne tasandiga, siis iga tasand, mis sisaldab sirget ja lõikab algset tasandit, teeb seda mööda sirget, mis on paralleelne algse sirgega.*

See väide aitab prognoosida ristlõikete orientatsiooni. Näiteks kui lõiketasand lõikab hulktahuka ja on paralleelne ühe selle servaga, siis on saadud ristlõike jooned paralleelsed selle servaga, vt joonis 5.1.

Teoreem 5.4. *Kaks tasandit on paralleelsed, kui ja ainult siis, kui üks neist sisaldab paari samaaegseid sirgeid, mis on paralleelsed teise tasandiga.*



Teoreem 5.5. *Kui tasand lõikab kahte paralleelset tasandit, siis on lõikepunktid kaks paralleelset sirget.*

Uurime mõningaid ristlõikeid, mis tekivad tasandi lõikamisel tetraeedri, kuubi või dodekaeedriga. Need kumerad hulktahukad kuuluvad viie Platoni tahkise perekonda, mille tahkised on kongruentsed korrapärased hulktahukad. See perekond koosneb tetraeedritest, kuubikutest, oktaeedritest, dodekaeedritest ja ikosaeedritest, vt joonis 2. Neid tahkeid kehi on tuntud juba antiikajast alates, ja neid uuris põhjalikult Platon, kes seostas igaühele neist looduse põhielemente: maa (kuup), õhk (oktaeder), tuli (tetraeder), vesi (ikosaeeder) ja kosmos (dodekaeder).

Igale platoonilisele kehale võime omistada **Schläfli sümboli**, mis koosneb kahest kirjest: p, q , kusp on iga tahu külgede arv ja q on igas tipus kohtuvate tahkude arv. Näiteks ikosaeedril on Schläfli sümbol $3,5$, kuna iga tahk on võrdkülgne kolmnurk (3) ja igas tipus kohtuvad viis võrdkülgset kolmnurka. Dodekaeedri puhul on Schläfli sümbol $5,3$, sest iga tahk on korrapärane viisnurk (5), millest 3 kohtuvad igas tipus. Samuti võime seostada igaühele neist oma **tipukonfiguratsiooni**, s.t. nägude järjestust ümber tipu. Seega on ikosaeedri **tipukonfiguratsioon** $3.3.3.3.3$ ja dodekaeedri **tipukonfiguratsioon** $5.5.5$. Platooniliste tahkete kehade kombinatoorne kirjeldus on esitatud järgmises tabelis.

Polyhedron		Vertices	Edges	Faces	Schläfli symbol	Vertex configuration
Regular tetrahedron		4	6	4	{3, 3}	3.3.3
cube		8	12	6	{4, 3}	4.4.4
Regular octahedron		6	12	8	{3, 4}	3.3.3.3
dodecahedron		20	30	12	{5, 3}	5.5.5
icosahedron		12	30	20	{3, 5}	3.3.3.3.3

Joonis 5.1. https://en.wikipedia.org/wiki/Platonic_solid

- Tetraeedri ristlõiked

Esmalt nimetame mõned tetraeedri geomeetrilised omadused.

Teoreem 5.6 *Olgu T tetraeder serva pikkusega a , siis:*



Co-funded by
the European Union



- kõrgus h_T on antud järgmiselt, $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$;
- kogu pindala $A_T T$ on antud, $A_T = a^2\sqrt{3}$
- maht V_T on antud, $V = a^3 \frac{\sqrt{2}}{12}$

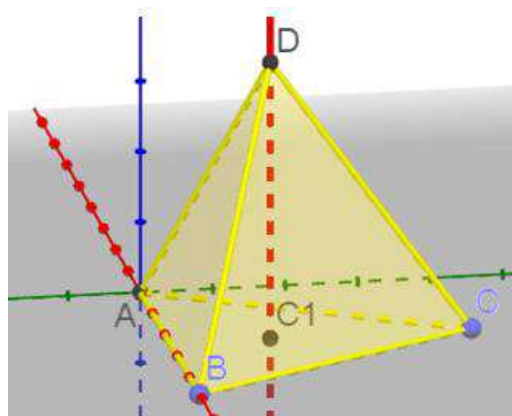
Teoreem 5.7. (Korralisel) tetraedril on 24 erinevat sümmeetriat, mis koosnevad 12 pöörlemissümmeetriast, 6 (puhtast) peegeldusest ja 6 pöörlevast peegeldusest.

Tetraedri mis tahes sümmeetria kaardistab tippu tippudele ja seega saab seda kujutada selle tippude permutatsiooniga. Oletame edaspidi, et T on tippud A, B, C , ja D

- **12 pöörlemissümmeetriat**, mis säilitavad orientatsiooni, on järgmised:
 - a) **identiteet**;
 - b) **8 pööret** 120° ja 240° ümber telgede, mis läbivad kõiki nelja tippu ja vastaskülgede keskpunkte, ning
 - c) **3 pööret** 180° ümber telgede, mis läbivad vastanduvate servade keskpunkte.

(1) **Identiteedisümmeetriat** esindab permutatsioon: $\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & B & C & D \end{pmatrix}$

Iseloomustame nüüd pöörded 120° ja 240° ümber telje, mis läbib tippu D ja vastaskülje keskohta C_1 , $[A, B, C]$, vt joonis 5.2.



Joonis 5.2.

Joonis 5.2. Pöörded ümber telje, mis ühendab tippu vastaskülje keskmega.



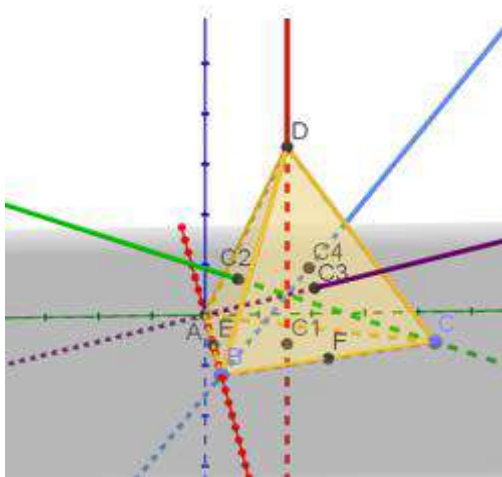
Co-funded by
the European Union



Vastavad esitusviisid permutatsioonidena on järgmised:

$$(2) \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & A & D \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & A & B & D \end{pmatrix}.$$

Tippe on 4, seega on meil neli pöörlemistelge, vt joonis 5.3.



Joonis 5.3. 4 pöörlemistelge, mis ühendavad tippu vastaspoole keskmega.

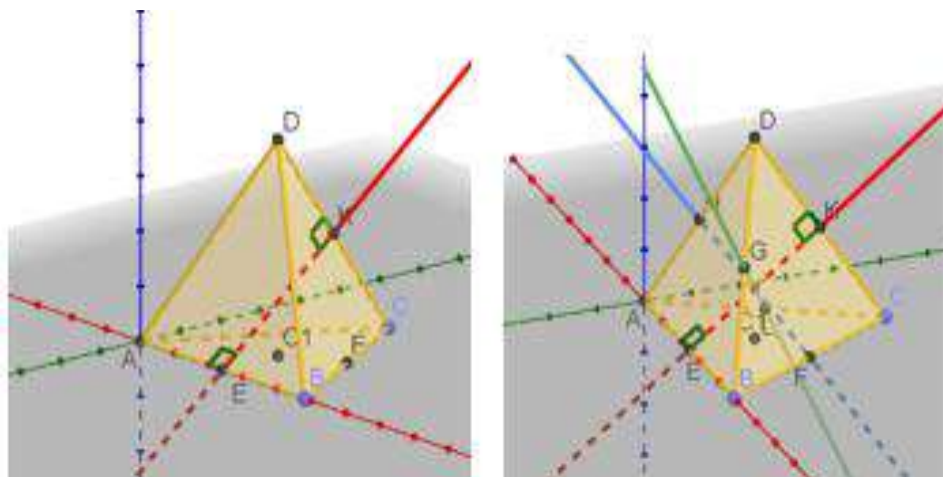
Rohelise, sinise ja violetse telje ümber pöörlemisele vastavad permutatsioonid on järgmised:

$$(4) \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & D & C & A \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & A & C & B \end{pmatrix};$$

$$(6) \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & B & D & A \end{pmatrix} \quad (7) \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & B & A & C \end{pmatrix};$$

$$(8) \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & C & D & B \end{pmatrix} \quad (9) \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & D & B & C \end{pmatrix};$$

Meil on veel kolm poolpöoret, mille teljed läbivad kahe vastandliku serva keskpunkte, vt joonis 5.4.



Joonis 5.4. Pöörded vastaskülgede keskpunkte ühendavate telgede ümber.

Punase, sinise ja roheline telje poolpööretele vastavad permutatsioonid on vastavalt järgmised:

$$(10) \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix} \quad (11) \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & C \end{pmatrix} \quad (12) \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{pmatrix}.$$

12 peegeldussümmeetriat, mis ei säilita orientatsiooni, on järgmised:

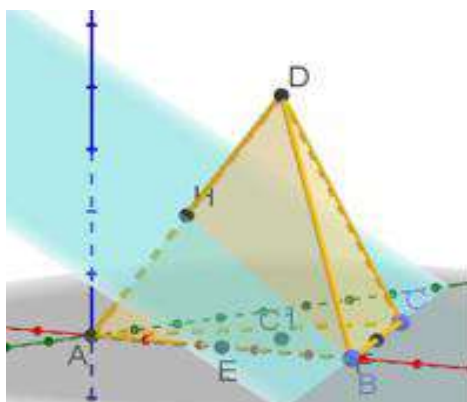
- 6 (puhast) peegeldust**, millest igaüks läbib üht serva ja vastasserva keskpunkti läbivat tasandit, ja
- 6 roteerivat peegeldust**, millest igaüks moodustub roteerimise ja puhta peegelduse kombineerimisel.

Iseloomustame **6 puhast peegeldust**. Vaatleme peegeldust tasandis, mis sisaldab serva $[BC]$ ja $[AD]$ keskpunkti, vt joonis 5.5. See fikseerib B ja C ning muudab ülejäänud kaks tippu. Seetõttu saab seda kujutada permutatsiooniga,

$$(1) \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & B & C & A \end{pmatrix}.$$



Co-funded by
the European Union



Joonis 5.5. Peegeldumine tasandis, mis sisaldab serva ja läbib serva vastaspoolse serva keskpunkti.

Kuna tetraeedril on 6 serva, siis on veel 5 peegeldumistasandit. Järgmised permutatsioonid kujutavad neid täiendavaid peegeldussümmeetriat:

$$(2) \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & B & C & A \end{pmatrix}; \quad (3) \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & B & C & A \end{pmatrix}; \quad (4) \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & B & C & A \end{pmatrix};$$

$$(5) \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & B & C & A \end{pmatrix}; \quad (6) \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & B & C & A \end{pmatrix}.$$

Tetraeedri **6 pöörlevate** peegelduste sümmeetriat on need, mida esindavad allpool esitatud permutatsioonid. Kõigi nende puhul esitame kombinatsiooni, mis hõlmab puhast peegeldust ja pööret.

$$(1) \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & B & C & A \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & A & D \end{pmatrix}.$$

$$(2) \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & D & B & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & B & D & C \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{pmatrix}.$$

$$(3) \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & A & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & B & D & C \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{pmatrix}.$$

$$(4) \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & D & A & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & C & B & D \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{pmatrix}.$$

$$(5) \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & A & D & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & C & B & D \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix}.$$

$$(6) \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & A & B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & C & B & D \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & A & C & B \end{pmatrix}.$$

Kuna neljast elemendist koosnevas permutatsioonigrupis on täpselt 24 elementi, võime järeldada, et tetraeedri sümmeetriarühm on täielikult määratud.



Uurime nüüd, milliseid ristlõikeid saab saada, kui lõikame tasandit tetraeedriga. Selleks kasutame kolme erinevat lähenemist, millest igaüks on kohandatud vastavalt eeldustele, mida selle mooduli lugejad võivad omada. Alustame **naiivse lähenemisega**, mis nõuab vaid minimaalseid eeldusi. Seejärel tutvustame **vahepealset lähenemist**, mis eeldab põhiteadmisi isomeetristest teisendustest ruumis. Lõpuks tutvustame **edasijõudnute lähenemisviisi**, mille puhul on oluline kindel arusaam sümmeetriarühmast ja osavus sfäärilistes koordinaatides.

- Ristlõiked tetraeedris - naiivne lähenemine

Vaatleme tetraeedrit \mathcal{T} , mille tipud on A, B, C , ja D . Kuna \mathcal{T} tahud asuvad tasandis, siis vastavalt teoreemile 4, kui tasand lõikab \mathcal{T} tahku, siis peab ta seda tegema kas ühes tipus või piki joont, mis ühendab selle tahu kaks serva. Järelikult, kuna kolm mittekollineaarset punkti määravad tasandi, piisab lõiketasandi määramiseks määratluspunktide valimisest, mis asuvad tetraeedri (suletud) servadel.

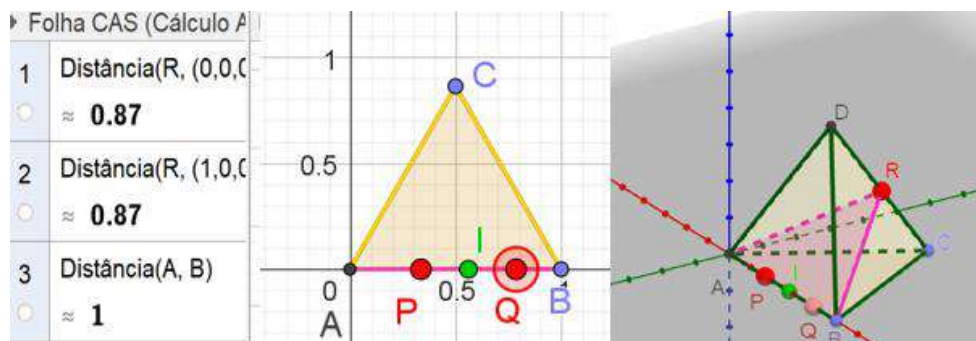
Olgu P, Q ja R kolm mittekollineaarset punkti, mis asuvad aadressil $\mathcal{E} = [AB] \cup [BC] \cup [AC] \cup [AD] \cup [BD] \cup [CD]$, ja π nende poolt määratletud tasandit.

Eeldades, et P ja Q on punktid, mis kuuluvad tetraeedri samale servale e , olles võimaluse korral selle serva lõpp-punktid, siis R asub tingimata vastasküljele e' ja \mathcal{T} tasandi π poolt tekitatud ristlõige on kolmnurk, vt joonis 5.6.

See kolmnurk on alati võrdhaarne, sõltumata sellest, millised on P ja Q konkreetseid asukohad servale ja R serval e' .

Miks see juhtub?

Jälgige, et kolmnurgad $[ADR]$ ja $[BDR]$ on kongruentsed külje-nurga-serva (SAS) kongruentsuskriteeriumi järgi.

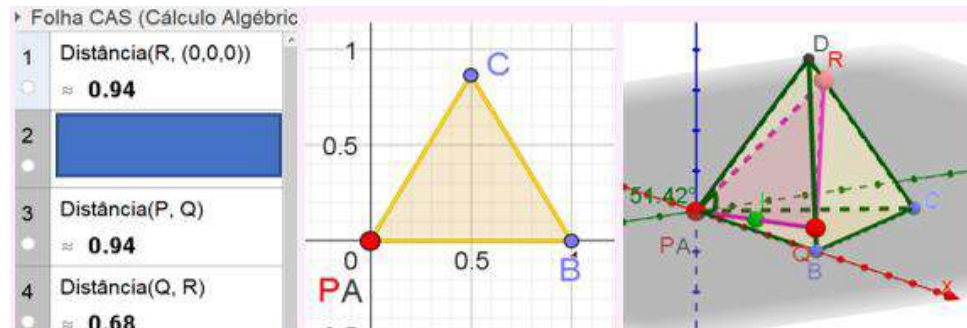


Joonis 5.6. Läbi P, Q ja R kulgeva tasapinna tekitatud ristlõige.
(<https://geogebra.com/m/1478478> - Ana Breda)

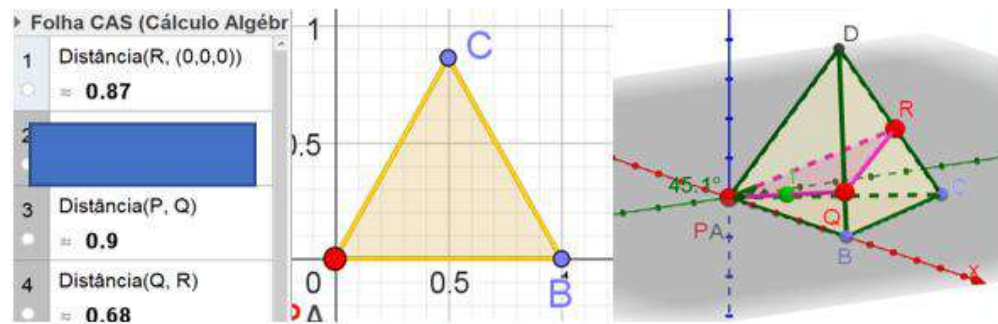


Lisaks sellele ei saa kolmnurkne ristlõige olla võrdkülgne, sest nurk aadressil A on väiksem kui $\frac{\pi}{6}$ rad.

- Oletame nüüd, et P , Q , ja R on kolm punkti, millest kaks ei asu ühel ja samal serval ja üks neist, näiteks P , on tetraeedri tipp. Siis on ristlõige võrdhaarne või skaleeniline kolmnurk, nagu on näidatud vastavalt joonisel 5.7.a ja 5.7.a.



(a)



(b)

Joonis 5.7. Läbi P , Q ja R kulgeva tasapinna tekitatud ristlõige.
(<https://geogebra.com/m/AnaBreda/tetraedro-naive> - Ana Breda)

Kas antud eelduse korral on võimalik saada võrdkülgne kolmnurkne ristlõige? Kasutage aadressil (<https://geogebra.com/m/AnaBreda/tetraedro-naive>) kättesaadavat rakendust, et uurida nurga beeta ja kolmnurga küljepikkuste käitumist ristlõikes. Konstrueerige oma tähelepanekute põhjal matemaatiline põhjendus, mis viib järeldusele, et antud eelduste korral ei ole võimalik saavutada võrdkülgset ristlõiku.

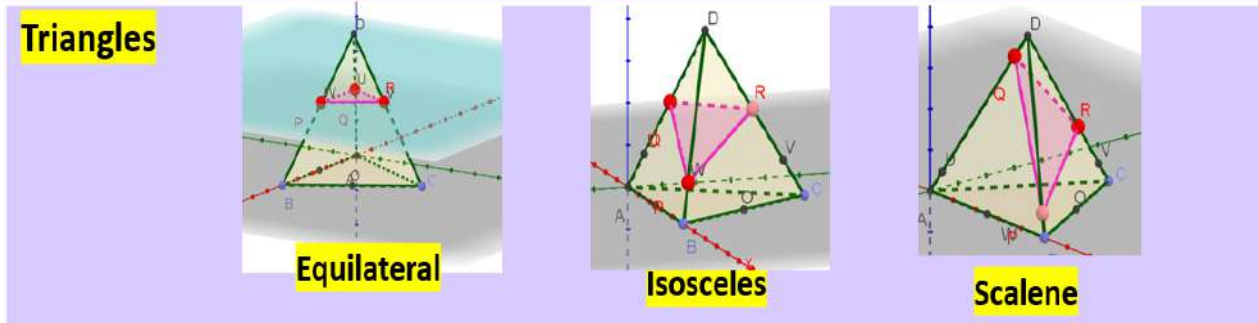
- Oletame nüüd, et P , Q ja R ei asu tetraeedri ühel ja samal serval; ükski neist punktidest ei lange kokku tetraeedri ühegi tipuga ja kõik need punktid asuvad servadel, mis väljuvad samast tipust.

Analüüsige, millise hulknurga moodustab tetraeedri ristlõikes punktide P , Q ja R poolt määratud tasand, kasutades GegoGebra appletti (<https://geogebra.com/m/AnaBreda/tetraedro-naive>).



naive), paigutage punktid P , Q ja R vastavalt vajadusele ja kirjeldage oma tähelepanekuid, vt joonis 5.8. Selgitage täheldatud tulemusi matemaatiliste põhjenduste abil.

Shape of the cross section - Configurations

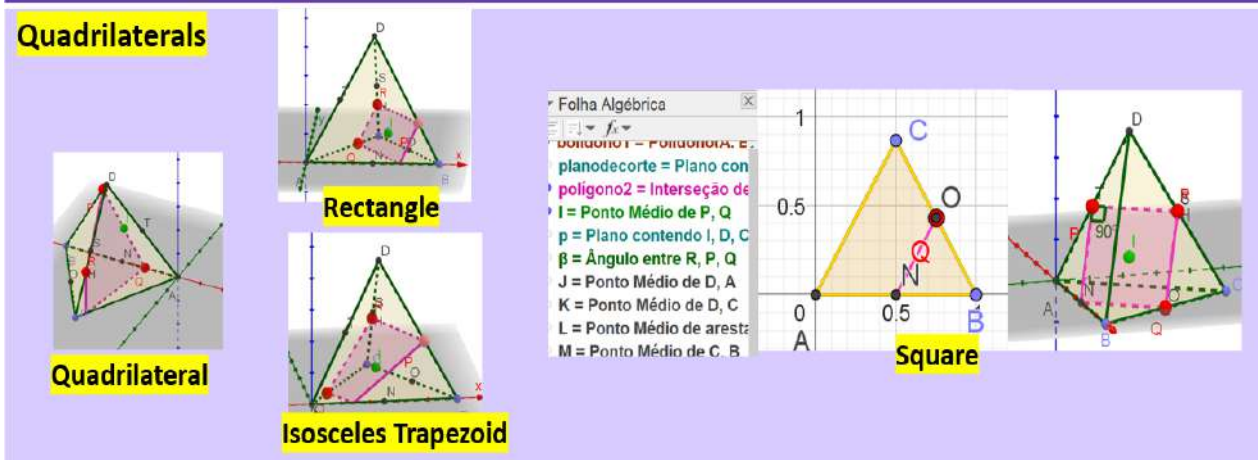


Joonis 5.8. Läbi P , Q ja R kulgeva tasapinna tekitatud ristlõige. (<https://geogebra.com/m/objects/131001> - Ana Breda)

- Lõpuks oletame, et P , Q ja R on sellised, et kaks neist ei asu ühel ja samal serval, ükski neist ei ole tetraeedri tipp ja kõik neist ei kuulu ühest ja samast tipust väljuvatele servadele.

Kasutage sama rakendust ja jälgige hoolikalt ristlõikete teket, vt joonis 5.9.

Shape of the cross section - Configurations

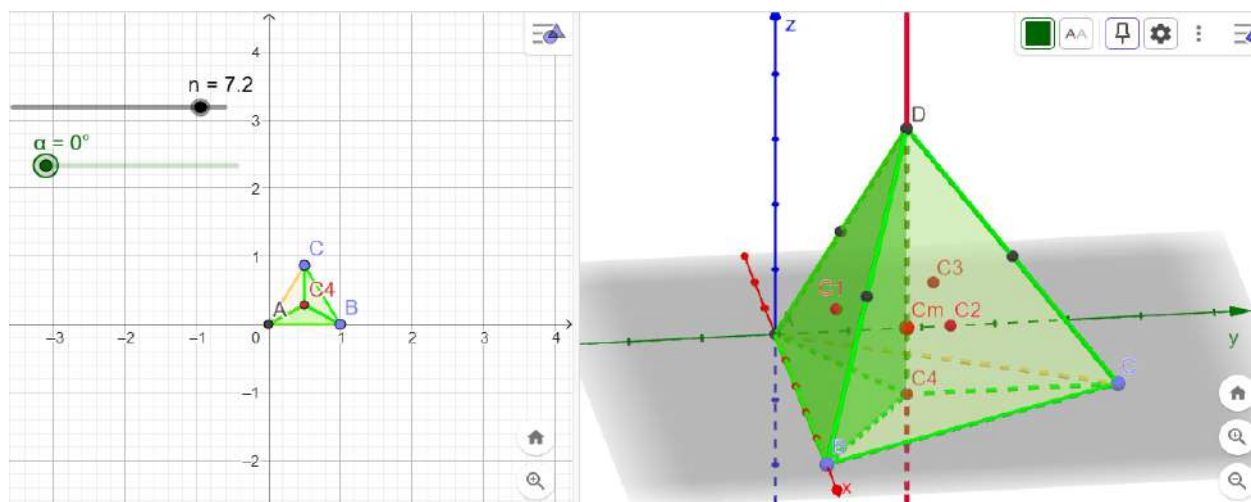


Joonis 5.9. Läbi P , Q ja R kulgeva tasapinna tekitatud ristlõige. (<https://geogebra.com/m/objects/131001> - Ana Breda)

Kas te võiksite oma simulatsioonide ja tähelepanekute põhjal esitada matemaatilisi argumente, mis neid tähelepanekuid toetavad?

- Ristlõiked tetraeedris - vahepealne lähenemine

Tetraeedri ristlõikete uurimist tasandite kaupa saab oluliselt süstematiseerida, kasutades sümmeetria mõistet. Teoreem 5.7 kirjeldasime tetraeedri sümmeetriarühma. Selles käsitluses peame vaatlema ainult ühte selle alarühma, näiteks alarühma, mis tekib 120-kraadise pööramisega ümber telje, mis läbib tippu ja vastaskülje keskpunkti, vt joonis 5.10.



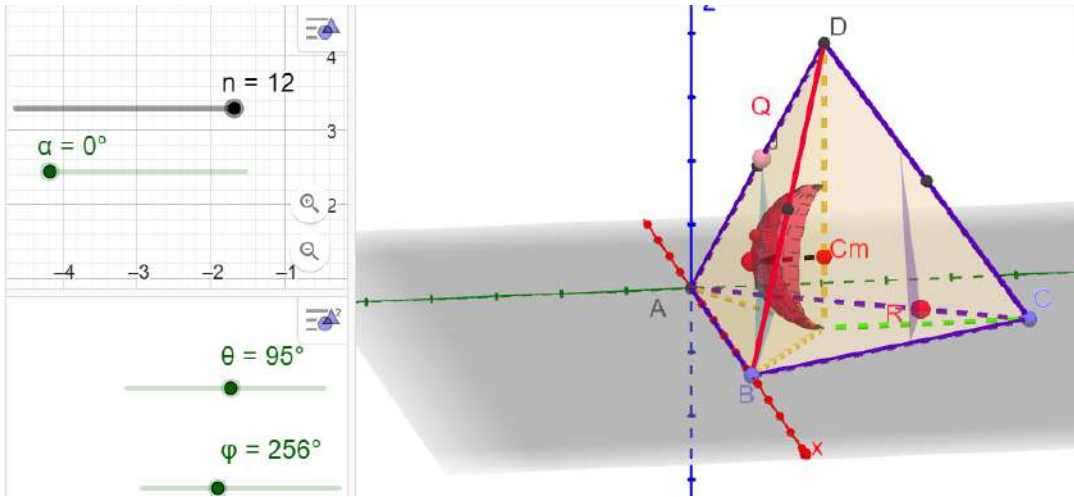
Joonis 5.10: läbilõige, mis saadakse tasandist, mis läbib veebilehti P , Q ja R
<https://geogebra.tools/pages.dev/tetraedro-intermedia> - Ana Breda)

Selleks, et ükski tasand ei unustataks, piisab, kui vaadelda ühikvektoreid sfäärilises piirmääras püramiidi tippudega A , B , C_4 , D . Iga sellise vektori puhul vaadeldakse sellega risti olevat tasandit, mis läbib püramiidi servadesse kuuluvat punkti, ja lõpuks vaadeldakse sellega paralleelsete tasandite perekonda. **Sfäärilise** piirkonna kirjeldamiseks kasutati **sfäärilisi koordinaate**.

Kasutage GeoGebra rakenduse II osa, et jälgida süstemaatiliselt ristlõike teket, vt joonis 5.11.



Co-funded by
the European Union

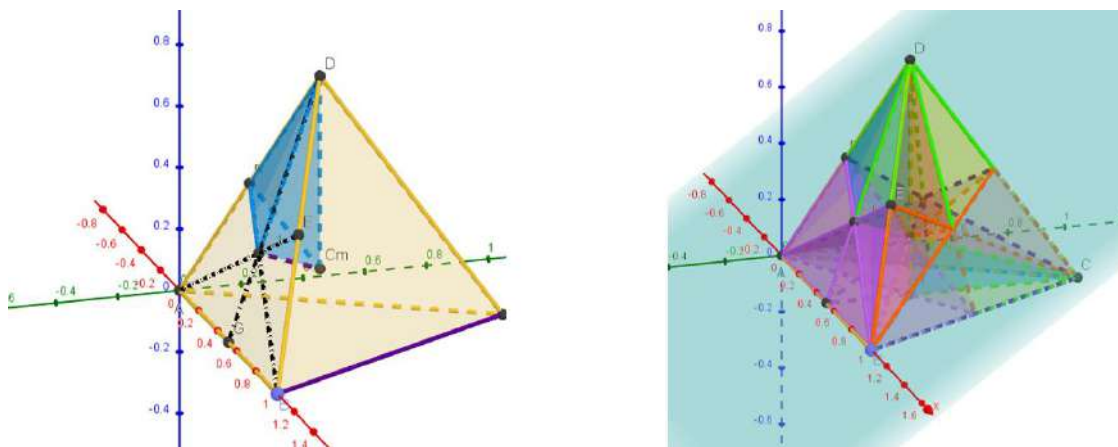


Joonis 5.11. Tetraedri ristlõige - vahepealne lähenemine.
(<https://geogebra.com/m/author/ana-breda> - Ana Breda)

- Ristlõiked tetraedris - Täpsem lähenemisviis

Seda mõttekäiku jätkates saame ristlõikete uurimist veelgi filtreerida, piirates oma analüüsi tetraedri esindusliku piirkonnaga, fundamentaalpiirkonnaga, vähendades oluliselt läbiviidavate simulatsioonijuhtude arvu. Selline lähenemine kasutab ära asjaolu, et kõik võimalikud konfiguratsioonid on võimalik saada, töötades ainult fundamentaalpiirkonnas. See võimaldab saada tõhusamat võimalike ristlõikete klassifikatsiooni, kuna iga konfiguratsioon põhipiirkonnas esindab samaväärsete ristlõikete klassi kogu tetraedri ulatuses.

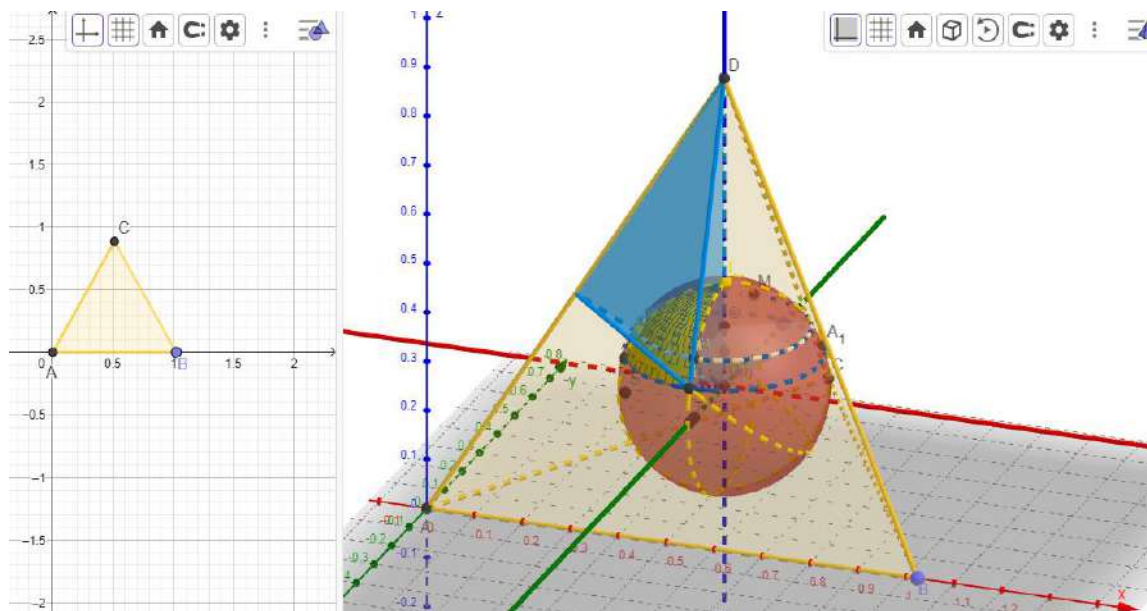
Põhipiirkonda võib kirjeldada püramiidiga, mille tipud asuvad tetraedri keskpunktis, intsentris ja ühe külje keskpunktis, vt joonis 5.12. Liitudes <https://geogebra.com/m/author/ana-breda> saame uurida, kuidas sümmeetriarühm mõjub fundamentaalpiirkonnale.



Joonis 5.12: Tetraedri fundamentaalpiirkond.
(<https://geogebra.com/m/author/ana-breda> - Ana Breda)



Nüüd saame rakendada vahepealse lähenemisviisi käigus läbiviidud menetlusi, mis on ümber paigutatud fundamentaalpiirkonna tasemele. See lähenemisviis võimaldab meil keskenduda tetraeedri väiksemale, kuid täielikult representatiivsele piirkonnale, vähendades arvutuslikku keerukust ja säilitades kogu analüütilise ranguse, vt joonis 5.13. Keskendudes fundamentaalpiirkonnale, kiirendame ristlõikete uurimist, sest iga selle piirkonna teabe põhjal saadud konfiguratsioon esindab tegelikult kogu tetraeedri ekvivalentseid konfiguratsioone.



Joonis 5.13. Tetraeedri ristlõige - edasijõudnute lähenemine.
(<https://geogebra.com/m/AnaBreda/tetraedro-avancado> - Ana Breda)

Kasutades sümmeetria mõistet, ei lihtsusta me mitte ainult matemaatilist käsitlust, vaid ka parandame arusaamist loodavatest kahemõõtmelistest geomeetristest struktuuridest (ristlõikudest).

5. Rakendused igapäevaelus

Tahkete kehade ristlõike mõistmine ei ole mitte ainult inseneride või teadlaste ülesanne, vaid see on mõiste, mis toetab paljusid meie igapäevaelu aspekte. Arhitektuuris ja ehituses aitavad ristlõiked projekteerijatel ja ehitajatel kavandada tugevaid ja stabiilseid konstruktsioone. Kui arhitektid projekteerivad talade või sammaste ristlõikeid, ei võta nad arvesse mitte ainult esteetilisi omadusi, vaid ka konstruktsiooni tugevust ja vastupidavust, tagades, et hooned, sillad ja majad kestavad ja peavad vastu kulumisele, millele nad päevast päeva alluvad. Tervishoius mängivad ristlõiked olulist rolli. Tehnikad nagu *magnetresonantstomograafia* (MRI) ja *kompuutertomograafia* (CT) võimaldavad üksikasjalikku pilti inimkeha sisemusest, andes arstidele



Co-funded by
the European Union



"viilude kaupa" ülevaate meie organitest, kudedest ja luudest. See aitab neil varakult märgata terviseprobleeme ja teha täpseid diagnoose, sageli ilma invasiivse kirurgilise operatsioonita. Tootmises võib toote ristlõike uurimine paljastada varjatud puudusi või nõrkusi. Selline tähelepanu üksikasjadele tähendab lõppkokkuvõttes ohutumaid ja kvaliteetsemaid tooteid tarbijate jaoks. Geoloogid kasutavad Maa kihtide ristlõikeid, et mõista, mis asub maapinna all. Kui kaevandusettevõttes otsivad mineraale või naftat, tuginevad nad nendele ristlõikekaartidele, et teada saada, kus puurida või kaevata. Need teadmised aitavad meil pääseda ligi olulistele ressurssidele, vähendades samal ajal keskkonnakahjustusi. Ristlõiked on võimsad vahendid ka klassiruumis. Need aitavad õpilastel visualiseerida 3D-objektide kuju ja omadusi arusaadavamalt. Paljud igapäevased esemed, näiteks torud, kaablid, purgid ja pudelid, on praktilistel põhjustel konstrueeritud konkreetsete ristlõikekujudega. Näiteks ümmargune toru võimaldab vee sujuvat ja tõhusat voolamist, samas kui silindriline toru võimaldab maksimeerida mahutavust, jäädes samas vastupidavaks.

6. Viited

- [1] Anwar, N., & Najam, F. A. (2017). Ristlõikete mõistmine. En *Elsevier eBooks* (pp. 39-136). <https://doi.org/10.1016/b978-0-12-804443-8.00002-6>.
- [2] Lewis, P. (2016). Aeglane lõik. *Journal of Architectural Education*, 70(1), 42-43. <https://doi.org/10.1080/10464883.2016.1128277>.
<https://doi.org/10.1080/10464883.2016.1128277>
- [3] Schumaker, L.L. (1990). 3D-objektide rekonstrueerimine ristlõikedest. In: Dahmen, W., Gasca, M., Micchelli, C.A. (eds) *Computation of Curves and Surfaces*. NATO ASI Series, vol 307. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-009-2017-0_9



6. TEEMA: Vektorid ja nende omadused

1. Teema valiku põhjendus

Vektoritel on oluline roll erinevates valdkondades, sealhulgas füüsikas, inseneriteaduses, arvutigraafikas ja masinõppes, kus neid kasutatakse füüsikaliste nähtuste arvutamiseks ja modelleerimiseks ning matemaatiliste operatsioonide tegemiseks. Inseneriteaduses viidatakse sageli füüsikalistele suurustele, näiteks jõule, kiirusele ja ajale. Näiteks räägitakse auto kiirusest ja jõust kokkusurutud vedrule. Neid füüsikalisi suurusi on kasulik jagada kahte liiki. Esimese tüübi suurusi nimetatakse skalaarideks. Neid saab täielikult kirjeldada ühe arvuga, mida tuntakse suurusena. Teist tüüpi suurused on need, mille täielikuks kirjeldamiseks on lisaks suurusele vaja määrata ka suund. Neid nimetatakse vektoriteks. Vektor on suurus, millel on suurus ja suund. Vektorite hulka tuleb manipuleerida teatud reeglite kohaselt. Vektorite käsitlemiseks arvutustes on välja töötatud spetsiaalsed meetodid, millest on tekkinud sellised õppeained nagu vektoralgebra, vektorgeomeetria ja vektorarvutus. Peale selle aitavad vektorid määrata punktide asukohta ja asukoha muutust. Erinevates füüsika ja matemaatika valdkondades kasutatakse vektoreid selleks, et mõista suundlike suuruste käitumist kahe- ja kolmemõõtmelistes ruumides.

2. Ajalooline taust

Vektorid sündisid 19. sajandi kahel esimesel aastakümnel koos kompleksarvude geomeetriliste esitusviisidega. Matemaatikud ja teadlased töötasid nende uute arvudega ja rakendasid neid mitmel viisil. William Rowan Hamilton (1805 – 1865) näitas 1837, et kompleksarve võib abstraktselt käsitleda kui reaalarvude järjestatud paare (a, b) . See idee oli osa paljude matemaatikute kampaaniast, mille käigus otsiti võimalust laiendada kahemõõtmelisi "numbreid" kolmemõõtmeliseks; kuid keegi ei suutnud seda saavutada, säilitades samal ajal reaali- ja kompleksarvude põhilised algebralised omadused. Vektorite algebra ja vektoranalüüsi areng, nagu me seda tänapäeval teame, ilmnes esmakordselt J. Willard Gibbs'i (1839 – 1903) märkimisväärsete märkmete kogumites.

Ajalooliselt võeti vektorid kasutusele geomeetrias ja füüsikas (tavaliselt mehaanikas) selliste suuruste jaoks, millel on nii suurus kui ka suund, näiteks nihked, jõud ja kiirus. Selliseid suurusi kujutatakse geomeetriliste vektoritega samamoodi nagu vahemaid, massi ja aega reaalarvudega.

3. Õpitulemused

Selle mooduli läbimisel peaksid õpilased olema võimelised

- liigitada mitmeid tavalisi füüsikalisi suurusi skalaar- või vektorkujuliseks.
- esitada vektorid suunatud joonsegmentidega



Co-funded by
the European Union



- kombineerida ehk liita vektoreid, kasutades kolmnurga seadust
- lahutada vektor kaheks risti asetsevaks komponendiks

Eeltingimused: Enne selle mooduli alustamist peaksid üliõpilased tegema järgmist.

- tundma kõiki algebra põhireegleid

4. Teoreetilised alused

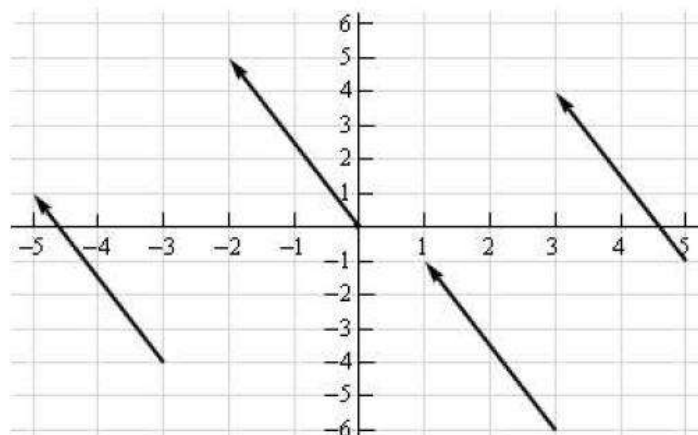
Määratlus 6.1. Vektor on objekt, millel on nii suurus kui ka suund.



Joonis 6.1.

Geomeetriliselt võime kujutada vektorit kui suunatud sirgjoont, mille pikkus on vektori suurus ja mille suunda näitab nool. Vektori suund on tema saba ja pea vahel.

Graafilises mõttes kujutatakse vektoreid suunatud joonsegmentidega. Joonussegmenti pikkus on vektori suurus ja joonussegmenti suund on vektori suund. Kuna aga vektorid ei anna mingit teavet selle kohta, kus suurus rakendub, siis kujutavad kõik sama pikkuse ja suunaga suunatud joonsegmentid sama vektorit.



Joonis 6.2.



Joonisel 6.2 kujutab iga suunatud sirge lõik sama vektorit. Igal juhul algab vektor teatavast punktist ja liigub seejärel 2 ühikut vasakule ja 5 ühikut ülespoole. Notatsioon, mida me kasutame selle vektori jaoks, on järgmine,

$$\vec{v} = (-2, 5)$$

ja iga selle joonise suunatud sirglõike nimetatakse vektori kujutisteks.

Vektori $\vec{v} = (a_1, a_2)$ kujutis kahemõõtmelises ruumis on suvaline suunatud sirgjoon, \overrightarrow{AB} , punktist $A = (x, y)$ punkti $B = (x + a_1, y + a_2)$. Samamoodi on vektori $\vec{v} = (a_1, a_2, a_3)$ kujutis kolmemõõtmelises ruumis mis tahes suunatud sirglõik \overrightarrow{AB} punktist $A = (x, y, z)$ punktini $B = (x + a_1, y + a_2, z + a_3)$

Vektori $\vec{v} = (a_1, a_2, a_3)$ kujutist, mis algab punktist $A = (0, 0, 0)$ ja lõpeb punktis $B = (a_1, a_2, a_3)$, nimetatakse punkti (a_1, a_2, a_3) **asukohavektoriks**. Seega, kui me räägime asukohavektoritest, siis me määrame vektori alg- ja lõpp-punkti.

Peame arutama, kuidas genereerida vektorit, arvestades esituse alg- ja lõpp-punkte. Arvestades kahte punkti $A = (a_1, a_2, a_3)$ ja $B = (b_1, b_2, b_3)$ on vektor koos esitusega \overrightarrow{AB} ,

$$\vec{w} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

Me peame siin olema väga ettevaatlikud suunitlusega. Ülaltoodud vektor on vektor, mis algab adressil A ja lõpeb adressil B . Vektor, mis algab adressil B ja lõpeb adressil A , s.t. esindusega \overrightarrow{BA} on,

$$\vec{w} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

Need kaks vektorit on erinevad ja seega peame alati tähelepanu pöörama sellele, milline punkt on alguspunkt ja milline lõpp-punkt. Kahe punkti vahelise vektori määramisel lahutame alati alguspunkti lõpp-punktist alguspunkti.

Määratlus 6.2. Vektori $\vec{v} = (a_1, a_2, a_3)$ suurus ehk pikkus on antud järgmiselt,

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

Määratlus 6.3. Mis tahes vektorit, mille suurus on 1, st $\|\vec{u}\| = 1$, nimetatakse ühikvektoriks.

Määratlus 6.4. Vektorit $\vec{w} = (0, 0, 0)$, mille suurus on 0, st $\|\vec{w}\| = 0$, nimetatakse nullvektoriks.

Märkus 6.1. Nullvektoreid tähistatakse sageli $\vec{0}$. Olge ettevaatlik, et eristada 0 (arv) ja $\vec{0}$ (vektor). Number 0 tähistab alguspunkti ruumis, samas kui vektor $\vec{0}$ tähistab vektorit, millel puudub suurus ja suund.



Co-funded by
the European Union



Määratlus 6.5. Vektoreid $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$, nimetatakse standardvektoriteks.

Määratlus 6.6. Vektorit, mille suurus on sama suur kui antud vektoril \vec{v} ja mille suund on vastupidine vektori \vec{v} suunale, nimetatakse \vec{v} negatiivseks ja seda tähistatakse $-\vec{v}$.

Määratlus 6.7. Vektorid on sarnased, kui nad on ühesuunalised, ja ebasuunalised, kui nad on vastassuunalised.

Määratlus 6.8. Vektoreid, millel on samad või paralleelsed kandjad, nimetatakse kollineaarseteks vektoriteks.

Määratlus 6.9. Vektoreid, millel on sama alguspunkt, nimetatakse koinitsiaalvektoriteks.

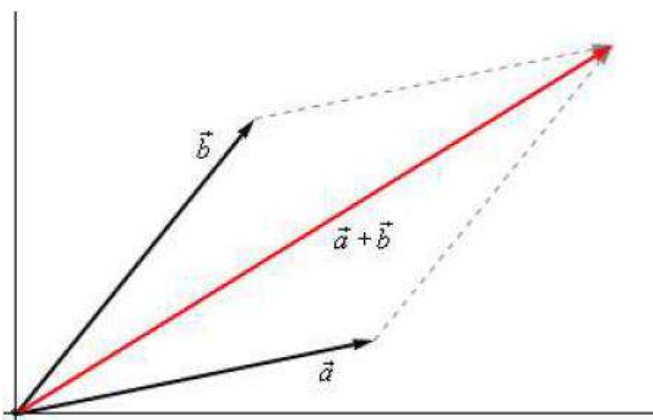
Määratlus 6.10. Vektoreid, millel on sama lõpp-punkt, nimetatakse ühispunktivektoriteks.

Määratlus 6.11. Vektorit, mis tõmmatakse paralleelselt antud vektoriga läbi kindla punkti ruumis, nimetatakse lokaliseeritud vektoriks.

Määratlus 6.12. Vektorite süsteem on koplanaarne, kui nende tugipunktid on paralleelsed sama tasandiga. Vastasel juhul nimetatakse neid mittekoplaneaarseteks vektoriteks.

Märkus 6.2. Vektorid võivad eksisteerida üldises n -mõõtmelises ruumis. Üldine tähendus n -mõõtmeline vektor on $\vec{v} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ ja iga (a_i) 'i nimetatakse vektori komponentideks.

Määratlus 6.13. Olgu $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ja $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ kaks mis tahes vektorit. Nende kahe vektori liitmine on antud järgmise valemiga $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$



Joonis 6.3. Kahe vektori liitmise geomeetriline tõlgendus.

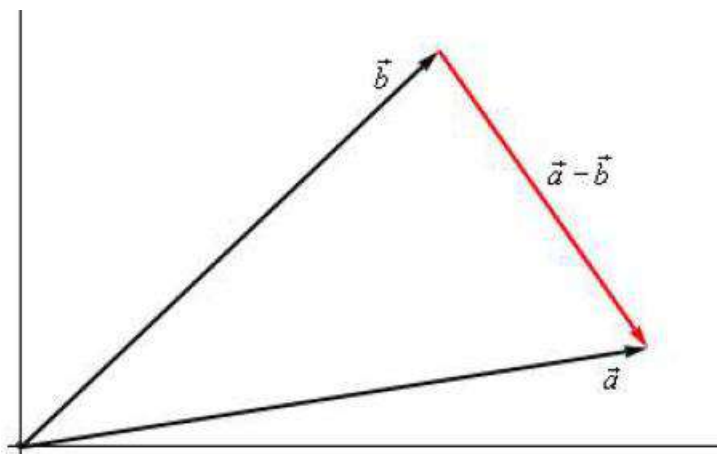
Märkus 6.3. Seda nimetatakse mõnikord parallelogrammi seaduseks või kolmnurga seaduseks.

Vektorite liitmise omadused

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (kommutatiivsus)
- $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ (assotsiatiivsus)
- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ (aditiivne identiteet)
- $\vec{a} + \overline{\vec{a}} = 0$ (aditiivne pöördväärtus)
- $(k_1 + k_2)\vec{a} = k_1\vec{a} + k_2\vec{a}$ (korrutamine skalaaridega)
- $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ (korrutamine skalaaridega)
- $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ ja $|\vec{a} - \vec{b}| \geq |\vec{a}| - |\vec{b}|$

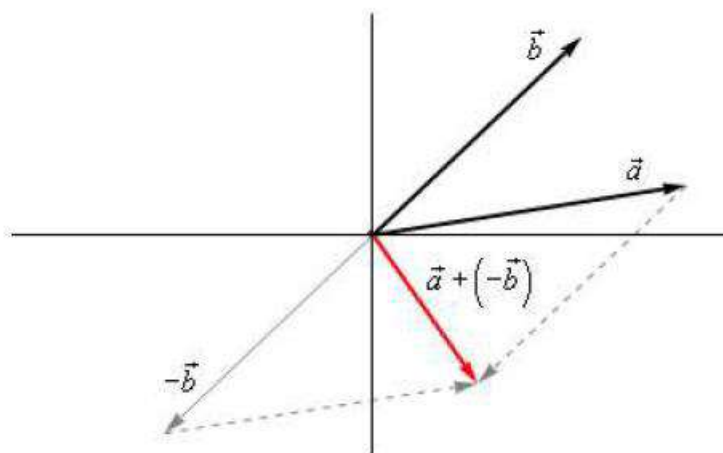
Määratlus 6.14. Olgu $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ja $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ kaks mis tahes vektorit. Nende kahe vektori vahe (lahutamise) saadakse järgmise valemiga

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$



Joonis 6.4. Kahe vektori erinevuse geomeetiline tõlgendus.

Seda geomeetrilist tõlgendust on veidi raskem näha. Selle nägemise hõlbustamiseks mõelgem hoopis lahutamist kui \vec{a} ja $-\vec{b}$ liitmisest. Esiteks, nagu me kohe näeme, on $-\vec{b}$ sama vektor kui \vec{b} , mille kõik komponendid on vastupidiste märkidega. Teisisõnu, $-\vec{b}$ läheb vastupidises suunas kui \vec{b} . Siin on vektor, mis on loodud $\vec{a} + (-\vec{b})$ jaoks.



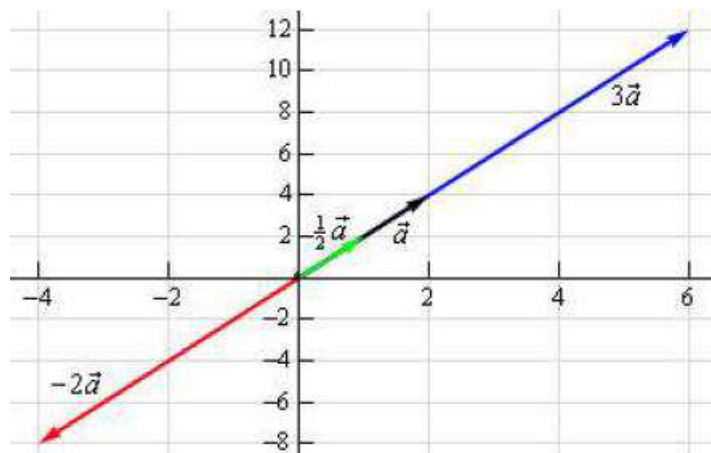
Joonis 6.5. Subtraktsiooni geomeetiline tõlgendamine kahe vektori liitmise teel.

Määratlus 6.15. Olgu $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ antud vektor ja λ skalaar. Siis on vektori \vec{a} ja skalaari λ korrutis ja skalaari korrutis.

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$$



ja seda nimetatakse vektori korrutamiseks skalaariga.



Joonis 6.6. Vektori korrutamise skalaariga geomeetriline tõlgendus.

Kui λ on positiivne, siis kõik skalaarkordistused venitavad (kui $\lambda > 1$) või kahandavad (kui $\lambda < 1$) algset vektori, kuid ei muuda selle suunda. Samamoodi, kui λ on negatiivne, muudab skalaarkordistamine suuna nii, et vektor näitab täpselt vastupidises suunas, ja see jällegi venitab või kahandab vektori suurust sõltuvalt λ suurusest.

Skalaarkordistusel on mitmeid rakendusi. Esimene neist on paralleelsed vektorid. Kaks vektori on paralleelsed, kui nad on ühesuunalised või täpselt vastassuunalised.

Oletame, et \vec{a} ja \vec{b} on paralleelsed vektorid. Kui nad on paralleelsed, siis peab olema arv λ nii, et,

$$\vec{a} = \lambda \vec{b}$$

Seega on kaks vektori paralleelsed, kui üks neist on teise skalaarkordaja.

Olulised omadused

- $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|$
- $|\lambda \vec{0}| = \vec{0}$
- $l(-\vec{a}) = -l\vec{a} = -(l\vec{a})$
- $(-l)(-\vec{a}) = l\vec{a}$
- $l_1(l_2\vec{a}) = l_1l_2\vec{a} = l_2(l_1\vec{a})$
- $(l_1 + l_2)\vec{a} = l_1\vec{a} + l_2\vec{a}$



- $l(\vec{a} + \vec{b}) = l\vec{a} + l\vec{b}$

Eespool tutvustasime standardsete baasvektorite ideed. Olgu vektor

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

Me võime kasutada vektorite liitmist, et seda jaotada järgmiselt,

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (a_1, a_2, a_3) \\ &= (a_1, 0, 0) + (0, a_2, 0) + (0, 0, a_3)\end{aligned}$$

Kasutades skalaarset korrutamist saame vektori ümber kirjutada järgmiselt,

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (a_1, 0, 0) + (0, a_2, 0) + (0, 0, a_3) \\ &= a_1(1, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1)\end{aligned}$$

Lõpuks märkame, et need kolm uut vektorit on lihtsalt kolm standardset kolmemõõtmelise ruumi baasvektorit.

$$(a_1, a_2, a_3) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

Määratlus 6.16. Olgu $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ja $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ kaks mis tahes vektorit. Punktproduktsioon on, $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

Märkus 6.4. Mõnikord nimetatakse punktprodukti skalaarprodukti. Punktproduktsioon on ka sisemise korrutise näide ja seetõttu võib seda mõnikord kuulda sisemise korrutise nimetust.

- **Skalaarprodukti omadused**

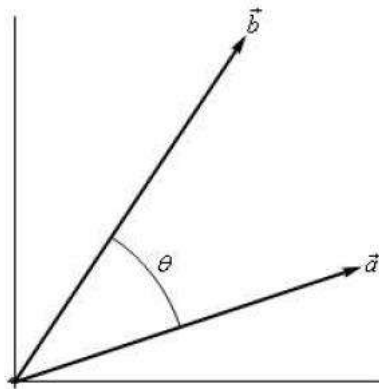
Olgu $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ja $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ kolm mis tahes vektorit. Siis

- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- $\vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2$
- $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$
- $\vec{a} \cdot \vec{0} = 0$



- Kui $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$ siis $\vec{a} = \vec{0}$

Punktproduktile on olemas ka kena geomeetiline tõlgendus. Esmalt oletame, et θ on nurk \vec{a} ja \vec{b} vahel, nii et $0 \leq \theta \leq 0\pi$, nagu on näidatud alloleval pildil.



Joonis 6.7.

Seejärel saame järgmise teoreemi.

Teoreem 6.1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos\theta$

Märkus 6.5. Selle teoreemi valemit kasutatakse sageli mitte punktprodukti arvutamiseks, vaid kahe vektori vahelise nurga leidmiseks.

Punktproduktisioon annab meile väga hea meetodi kahe vektori ristiasendi määramiseks. Praktikas kasutame risti asemel sageli terminit ortogonaalne.

Kui kaks vektorit on ortogonaalsed, siis teame, et nende vaheline nurk on 90° . See ütleb meile, et kui kaks vektorit on ortogonaalsed, siis,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Samuti, kui kaks vektorit on paralleelsed, siis on nende vaheline nurk kas 0° (samas suunas) või 180° (vastupidises suunas).



- Suunakosinused

Oletame, et vektor, \vec{a} , on kolmemõõtmelises ruumis. See vektor moodustab nurgad α -teljega $x(\alpha)y(\beta)$ -teljegaja $z(\gamma)$. Neid nurki nimetatakse suunanurkadeks ja nende nurkade koosinuseid nimetatakse suunakosinusteks.

Teoreem 6.2. Suunakosinuste valemid on järgmised

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{\|\vec{a}\|} = \frac{a_1}{\|\vec{a}\|}, \quad \cos\beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{j}}{\|\vec{a}\|} = \frac{a_2}{\|\vec{a}\|}, \quad \cos\gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{k}}{\|\vec{a}\|} = \frac{a_3}{\|\vec{a}\|}$$

Märkus 6.6. Mõned faktid suunakosinuste kohta

- Vektor $\vec{u} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ on ühikvektor.
- $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$
- $\vec{a} = \|\vec{a}\| (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

- Risttoode

Määratlus 6.17. Olgu $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ja $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ kaks mis tahes vektorit, siis ristsaadus on antud valemiga,

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

Seda valemit ei ole lihtne meeles pidada. Selle valemi tuletamiseks on kaks võimalust. Mõlemad kasutavad asjaolu, et ristsaadus on tegelikult 3×3 maatriksi determinant. Determinandi tähistamine on järgmine,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Esimene rida on standardsed baasvektorid ja need peavad olema antud järjekorras. Teine rida on komponendid \vec{a} ja kolmas rida on komponendid \vec{b} . Vaatleme nüüd erinevaid meetodeid valemi saamiseks.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

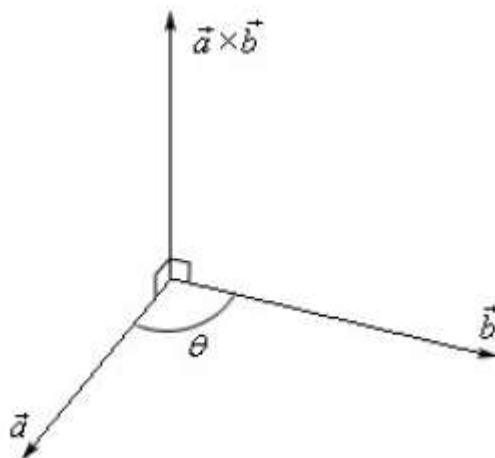
Seda valemit ei olegi nii raske meeles pidada, kui esialgu võib tunduda. Esiteks, terminid vahelduvad märkide poolest ja märkige, et 2×2 puudub nii standardse baasvektori all olev veerg, mis korrutab seda, kui ka standardse baasvektori rida.

Märkus 6.7. Pange tähele, et vektorite järjekorra muutmine ristproduksioonis muutis lihtsalt kõiki märke tulemusel. Pange tähele ka seda, et see tähendab, et kaks ristprodukti osutavad täpselt vastupidises suunas, kuna nad erinevad ainult märgi võrra.

On olemas ka ristprodukti geomeetriline tõlgendus. Olgu θ kahe vektori \vec{a} ja \vec{b} vaheline nurk ja oletame, et $0 \leq \theta \leq \pi$, siis on meil järgmine fakt,

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin\theta$$

ja järgmine joonis.



Joonis 6.9.

Nagu see joonis näitab, on ristsaadus mõlema algse vektori suhtes ortogonaalne. See on alati nii, välja arvatud üks erand, mille juurde jõuame kohe.

Me teadsime, et see näitas "parema käe reegli" järgi ülespoole (antud juhul). See ütleb, et kui me võtame parema käe, alustame aadressilt \vec{a} ja pöörame sõrmede suunas \vec{b} , siis meie põial näitab ristprodukti suunas. Seega, kui me oleksime eespool visandanud $\vec{b} \times \vec{a}$, oleksime saanud vektori allapoole suunatud.

Kui $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ siis \vec{a} ja \vec{b} on paralleelsed vektorid.

Kui $\vec{a} \times \vec{b} \neq 0$ siis $\vec{a} \times \vec{b}$ on ortogonaalne nii \vec{a} kui ka \vec{b} .

- **Omadused**

Olgu $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ja $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ vektorid ja λ on siis arv,

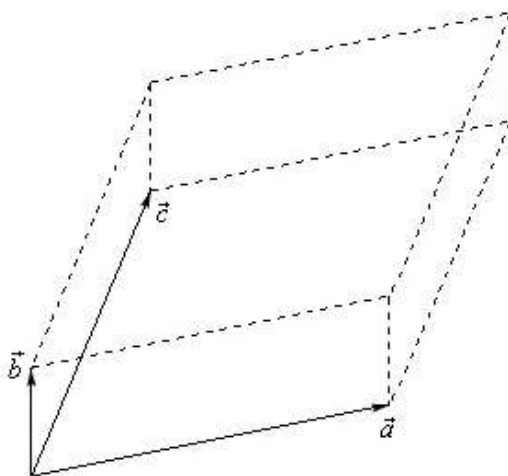


Co-funded by
the European Union



- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
- $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$
- $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

Oletame, et meil on kolm vektorit \vec{a} , \vec{b} ja \vec{c} ning me moodustame kolmemõõtmelise joonise.



Joonis 6.10.

Paralleelogrammi pindala S (selle objekti kahemõõtmeline esikülg) on antud järgmiselt,

$$S = \|\vec{a} \times \vec{b}\|$$

ja ristküliku (kogu kolmemõõtmelise objekti) ruumala V on antud järgmiselt,

$$V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$$

Märkus 6.8. Pange tähele, et absoluutväärtuse tulbad on vajalikud, kuna kogus võib olla negatiivne ja maht ei ole negatiivne.

Me saame seda mahu fakti kasutada, et määrata, kas kolm vektorit asuvad samal tasandil või mitte. Kui kolm vektorit asuvad samas tasapinnas, siis on rööptahuka ruumala null.



Co-funded by
the European Union



5. Rakendused igapäevaelus

Vektoreid kasutatakse igapäevaelus inimeste, kohtade ja asjade lokaliseerimisel. Neid kasutatakse ka selliste asjade kirjeldamiseks, mis reageerivad neile rakendatavale välisele jõule. Näiteks sõiduauto rehvi mass, mis sõidab Lisaks sellele omab ta algkiirust, lõppkiirust ja kiirendust, gravitatsioonireaktsiooni, jõude hõõrdumist ja tänu oma pöörlemisele omab ta pöördemomenti. Suurust, millel on nii suurus kui ka suund, nimetatakse vektoriks. Newtoni esimene, teine ja kolmas seadus on kõik vektorite vahelised seosed, mis kirjeldavad täpselt kehade liikumist, kui nad on allutatud välise jõu mõjule. Newtoni seadused hõlmavad paljusid nähtusi ja neid saab kasutada kõige kirjeldamiseks alates vabalangevusest kuni Kuule suunduva raketini.

- sõjaline kasutamine
- mürsk
- vektor mängudes
- roller coaster
- jõge ületav paat
- kriketi mängimine
- külgtuul

- **Sõjaline kasutamine**

Iga suurtükki, mis tulistab mürsku, kasutades suurtükiväge või muud tüüpi, tavaliselt lõhkeainepõhist raketikütust, loetakse suurtükiks. Kanoonide kaliiber, laskekaugus, liikuvus, tule kiirus ja tule nurk erinevad üksteisest. Sõltuvalt sellest, millist rolli iga suurtükitüüp lahinguväljal peaks täitma, kombineerivad ja tasakaalustavad eri tüüpi suurtükid neid omadusi erineval määral. Seda vektorit on vaja kasutada. Vektorid otsustavad, kuhu mürsk suundub ja kuhu ta tabab maapinnal.

- **Projektiil**

Pesapallivektorit kasutavad mängijad automaatselt sellistel spordialadel nagu korvpall ja pesapall. Lõpuks õpilased kas tulistasid sihtmärki või viskasid palli nurga all suunas, mis mõlemad saavutati, kasutades oma arusaamist vektoritest. Tegelikult on sellistes mängudes nagu odaheitmine vaja hinnata nurka, mille mürsu vektor maapinnaga moodustab, et odaheitja jõuaks võimalikult kaugemale.

- **Vektor mängudes**

Videomängudes kasutatakse vektoreid asukohtade, suundade ja kiiruste salvestamiseks. Asukohavektor ütleb meile, kui kaugel objekt on, kiirusvektor ütleb meile, kui kaua see aega võtab või kui palju jõudu me peame rakendama, ja suunavektor ütleb meile, kuidas me peaksime seda jõudu rakendama.



Co-funded by
the European Union



- Veermik

Suurem osa veermiku ajal toimuvast liikumisest on reaktsioon maa gravitatsioonijõududele. Ohutussüsteemi ehitamisel on oluline, et arvestataks jõudude, kiirenduse ja kiiruse vektoreid. See kasutab vektorite kasutamist autoroolisõidu konstrueerimisel.

- Jõe ületav paat

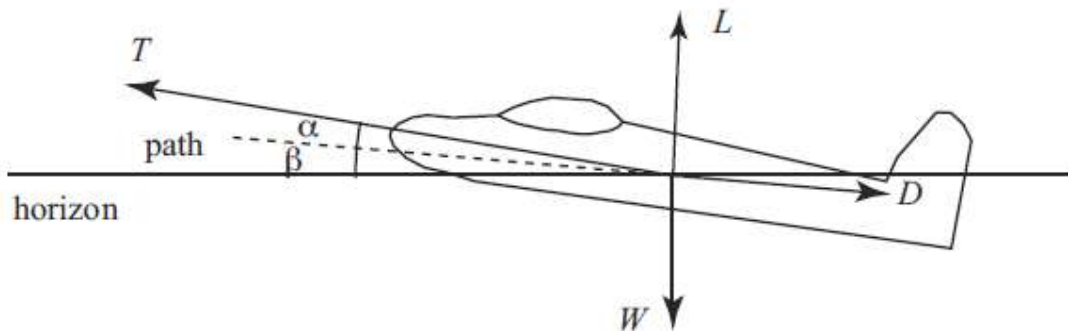
Kui paat sõidab üle jõe, annavad nii paadi kiirus kui ka jõe kiirus oma osa paadi kogukiirusele. Kui jõe voolukiirus muutub, muutub ka paadi kurss. Seetõttu peab paadimees määrama jõe ületamiseks nurga, et pääseda jõe kaldale otse. Vektor mängib siinkohal olulist rolli.

- Kriketi mängimine

Kui löögimängija lööb palli, on nii lööginurk kui ka kiirus, millega ta palli lööb, olulised tegurid, mis määravad, kas pall läheb üle piiri või mitte. Kui mõlemad tegurid vastavad maksimaalse jõu nõuetele, läheb pall üle piiri. Palli tõttu keerleb kõik vektori ümber.

- Külgtuul

Külgtuule mõiste on meile tuttav. Tuult, mis puhub suunaga, mis on risti liikumistega, nimetatakse külgtuuleks. Kui lennuk lõpuks maandub, tekib tal mõnikord külgtuule tõttu probleeme. Vektori abil on piloot võimeline määrama nii resultatiivset kiirust kui ka suunda.



Joonis 6.11. Lennukile mõjuvad jõud.



Co-funded by
the European Union



6. Viited

- [1] <https://www.educative.io/answers/properties-of-vectors>
- [2] https://mathinsight.org/vector_introduction
- [3] <https://www.math.mcgill.ca/labute/courses/133f03/VectorHistory.html>
- [4] <https://www.lboro.ac.uk/departments/mlsc/student-resources/helm-workbooks/>
- [5] <https://tutorial.math.lamar.edu/>
- [6] <https://www.learnbse.in/vector-algebra-class-12-notes/>
- [7] [https://math.libretexts.org/Bookshelves/Calculus/Supplemental_Modules_\(Calculus\)/Vector_Calculus](https://math.libretexts.org/Bookshelves/Calculus/Supplemental_Modules_(Calculus)/Vector_Calculus)
- [8] https://nucinkis-lab.cc.ic.ac.uk/HELM/helm_workbooks.html
- [9] <https://unacademy.com/content/jee/study-material/mathematics/how-vectors-can-be-used-in-daily-life-situations/>
- [10] <https://myscale.com/blog/practical-examples-vector-application-daily-life/>



Co-funded by
the European Union



7. TEEMA: Polaar-, silindrilised ja sfäärilised koordinaadid

1. Teema valiku põhjendus

Nagu ka kolmemõõtmelise ruumi puhul, nimetatakse standardset (x, y, z) koordinaatsüsteemi kartesiaanlikuks koordinaatsüsteemiks. Kuna see koordinaatsüsteem ei ole alati kõige lihtsam koordinaatsüsteem, siis vaatleme mõningaid alternatiivseid koordinaatsüsteeme.

Selle teema raames tutvustatakse polaar-, silindrilist ja sfäärilist koordinaatsüsteemi.

Silindrilised koordinaadid on kolmemõõtmeline koordinaatsüsteem, mis väljendab punkte kauguse suhtes fikseeritud teljest (z – telg), nurga suhtes selle telje ümber (asimuut) ja kõrguse suhtes piki telge. Sfäärilised koordinaadid väljendavad punkte kaugusena fikseeritud punktist (algpunkt), nurga suhtes fikseeritud suunas (zenit) ja asimuudinurga suhtes selle suuna ümber.

Paljudel juhtudel võivad silindriliste või sfääriliste koordinaatidega tehtavad arvutused olla tõhusamad kui kartesiaanlikes koordinaatides tehtavad arvutused. Silindrilised koordinaadid on intuiitvused pöörlemissümmeetria puhul - need on kooskõlas meie loomuliku arusaamaga pöörlemisest ja kõrgusest. Kuigi kartesiaanseid koordinaate kasutatakse igapäevaelus sageli nende lihtsuse tõttu, pakuvad silindrilised ja sfäärilised koordinaadid väärtuslikke vahendeid silindrilist või sfäärilist sümmeetriat, pöörlemist või ruumilist orientatsiooni hõlmavate nähtuste mõistmiseks ja analüüsimiseks. Nende rakendused hõlmavad paljusid valdkondi, alates tehnikast ja navigatsioonist kuni füüsika, inseneriteaduse ja robotikani.

2. Ajalooline taust

Silindriliste ja sfääriliste koordinaatide ajalooline taust on põimunud astronoomia, kartograafia ja navigatsiooni arenguga. Need koordinaatsüsteemid on sajandite jooksul arenenud, muutudes asendamatuteks vahenditeks ruumiliste suhete mõistmiseks ja kujutamiseks erinevates valdkondades. Silindriliste ja sfääriliste koordinaatide arengut võib jälgida kuni iidsete tsivilisatsioonideni. Need koordinaatsüsteemid tekkisid tõenäoliselt astronoomia ja navigatsiooni ruumiliste suhete mõistmiseks ja mõõtmiseks. Silindriliste koordinaatide päritolu ulatub tagasi antiik-kreeka matemaatikutele Apollonius Perga ja Hipparchos. Nad rakendasid silindriliste koordinaatide põhimõtteid Kuu liikumise uurimiseks ja öise tähistaeva kaardistamiseks, sest need pakuvad mugavat viisi tähise asukoha kujutamiseks taevasfääri suhtes.

Kõige varem on teadaolevalt kasutatud sfäärilisi koordinaate juba vanade kreeklaste ajal. Astronoomid nagu Aristarchos Samose ja Hipparchos kasutasid taevakehade asukoha kaardistamiseks sfäärilisi koordinaate. Nende töö pani aluse sfäärilise trigonomeetria arengule, mis on oluline sfääriliste koordinaatidega seotud arvutuste jaoks. Keskajal ja renessansiajal kasutati sfäärilisi koordinaate jätkuvalt peamiselt astronoomias. Astronoomid nagu Ptolemaios ja



Co-funded by
the European Union



Nikolaus Kopernik kasutasid neid koordinaate päikesesüsteemi mudelite väljatöötamiseks. Astrolaabiumi, sfäärilistele koordinaatidele tugineva navigatsioonivahendi leiutamine kindlustas nende tähtsust praktilistes rakendustes veelgi. Varased meremehed kasutasid sfäärilisi koordinaate oma asukoha määramiseks Maa pinnal. Laiuskraad ja pikkuskraad vastavad kallakule ja asimuudile. 17. sajandil tehti märkimisväärsed edusamme selle koordinaatsüsteemi mõistmisel. Isaac Newton ja Gottfried Wilhelm Leibniz töötasid välja arvutusarvutuse, mis andis võimsa matemaatilise raamistiku sfääriliste koordinaatsüsteemide analüüsimiseks. Hilisem diferentsiaalgeomeetria ja vektorarvutuse areng täiustas seda teooriat veelgi.

3. Õpitulemused

Selle mooduli läbimisel peaksid õpilased olema võimelised

- väljendada punkte ja funktsioone polaarsetes, silindrilistes ja sfäärilistes koordinaatides,
- kasutada konverteerimisvalemite punktkoordinaatide ja domeenide teisendamiseks kartesiaanlikest koordinaatidest polaar-, silindri- ja sfäärikoordinaatidesse ja vastupidi.

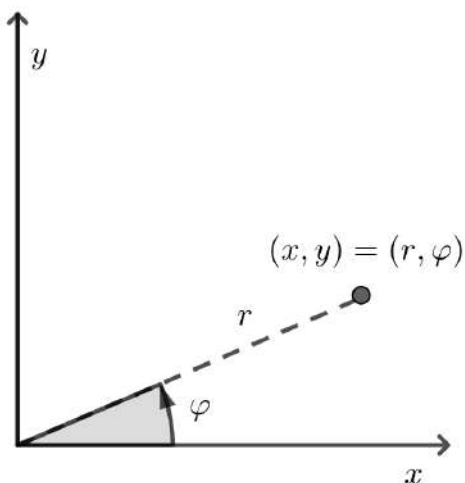
Eeltingimused: Enne selle mooduli alustamist peaksid üliõpilased tegema järgmist.

- tundma punktide ja kahe ja kolme muutuja funktsioonide mõistet kartesiaankoordinaatides.

4. Teoreetilised alused

- **Polaarkoordinaadid**

Alustame kahemõõtmelisest ruumist ja tutvustame polaarkoordinaatsüsteemi. Koordinaatsüsteemid ei ole tegelikult midagi muud kui viis punkti määratlemiseks ruumis. Näiteks kartesiaanlikus koordinaatsüsteemis antakse punktile koordinaadid (x, y) ja me kasutame seda punkti defineerimiseks, alustades algpunktist ja liikudes seejärel x ühikut horisontaalselt ja seejärel y ühikut vertikaalselt. See ei ole siiski ainus viis punkti defineerimiseks kahemõõtmelises ruumis. Selle asemel, et liikuda punktini vertikaalselt ja horisontaalselt alguspunktist, võiksime selle asemel minna alguspunktist otse välja, kuni jõuame punktile, ja seejärel määrata nurga φ , mille see sirge moodustab positiivse x – teljega. Seejärel võiksime punkti koordinaatidena kasutada punkti kaugust r alguspunktist ja seda, kui palju meil on vaja positiivse x – telje suhtes pöörata. See on näidatud alljärgneval joonisel.



Joonis 7.1.

Sellisel kujul koordinaate nimetatakse **polaarkoordinaatideks**.

On oluline erinevus kartesiaanlike koordinaatide ja polaarkoordinaatide vahel. Kartesiaanlikes koordinaatides on iga punkti jaoks täpselt üks koordinaatide kogum. Polaarkoordinaatide puhul ei ole see nii. Polaarkoordinaatides on antud punkti jaoks sõna otseses mõttes lõpmatu arv koordinaate. Näiteks järgmised neli punkti on kõik ühe ja sama punkti koordinaadid.

$$\left(4, \frac{\pi}{3}\right) = \left(4, -\frac{5\pi}{3}\right) = \left(-4, \frac{4\pi}{3}\right) = \left(-4, -\frac{2\pi}{3}\right).$$

Need neli punkti kujutavad ainult punkti koordinaate, ilma et nad pöörleksid rohkem kui üks kord ümber süsteemi. Kui me lubame nurgal teha nii palju täielikke pöördeid ümber telje süsteemi, kui me tahame, siis on sama punkti koordinaate lõpmatult palju. Tegelikult saab punkti (r, φ) esitada mis tahes järgmiste koordinaatpaaridega:

$$(r, \varphi + 2\pi n), \quad (-r, \varphi + (2n + 1)\pi), \quad \text{where } n \in \mathbb{Z}.$$

Peame mõtlema kahe koordinaatsüsteemi vahelisele ümberarvestusele. Kasutades ülaltoodud täisnurkset kolmnurka, saame järgmised polaar- ja kartesiaalvõrrandite ümberarvestusvalemid:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi. \end{aligned}$$

Cartesianist teisendamiseks märkame seda väga kasulikku valemit

$$x^2 + y^2 = (r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2 = r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r^2 \cdot 1 = r^2.$$

Võttes mõlemast küljest ruutjuure (kasutades positiivset r), on meil $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.



Et saada φ , võrrandit, alustame $\frac{y}{x} = \frac{r \sin \varphi}{r \cos \varphi} = \tan \varphi$ ja võttes mõlema poole pöördtangendi saame, $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$. . Sellega peame olema ettevaatlikud, sest pöördtangendid annavad väärtusi ainult vahemikus $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$. Tuletame meelde, et on olemas teine võimalik nurk ja et teine nurk on antud järgmiselt $\varphi + \pi$.

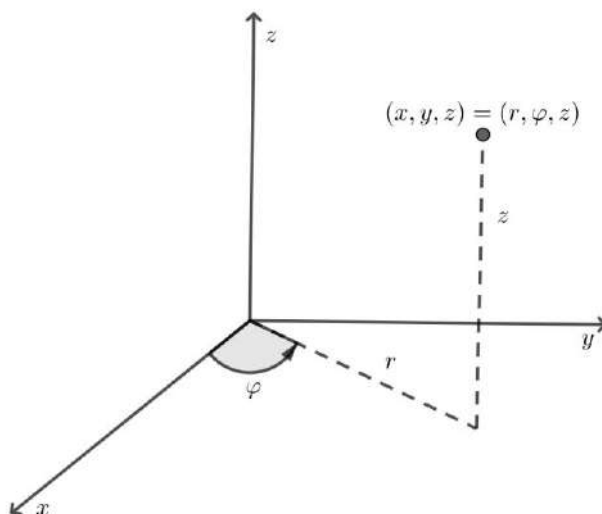
Selle kokkuvõtmiseks on meil olemas kartesiaanlik ümberarvestusvalem polaarseks:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ or } r^2 = x^2 + y^2$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

- Silindrilised koordinaadid

Silindriline koordinaatsüsteem on üsna lihtne, sest see ei ole midagi muud kui polaarkoordinaatide laiendamine kolmemõõtmeliseks. Kõik, mida tehakse, on lisada kolmanda koordinaadina. r ja φ on samad kui polaarkoordinaatide puhul. Järgnevalt on esitatud punkti visand \mathbb{R}^3 .



Joonis 7.2.

Ümberarvutused x ja y on samad, mida kasutatakse polaarkoordinaatide vaatlemisel. Seega, kui on olemas punkt silindrilistes koordinaatides, saab kartesiaankoordinaadid leida järgmiste teisenduste abil:

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$z = z.$$



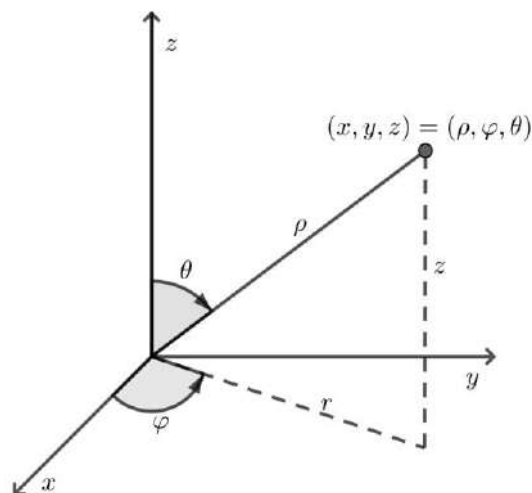
Kolmas võrrand on lihtsalt kinnitus, et punktiz – koordinaat kartesiaan- ja polaarkoordinaatides on sama.

Samamoodi, kui meil on punkt kartesiaanlikes koordinaatides, saab silindrilised koordinaadid leida järgmiste teisenduste abil:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \text{ or } r^2 = x^2 + y^2 \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \\ z &= z. \end{aligned}$$

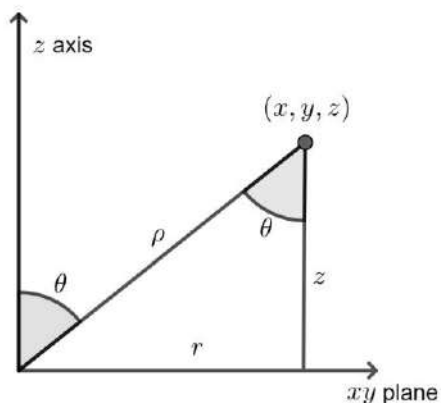
- Sfäärilised koordinaadid

Sfääriline koordinaatsüsteem koosneb järgmistest kolmest suurusest. Esiteks on ρ . See on kaugus alguspunktist punktini ja on vajalik $\rho \geq 0$. Seejärel on φ . See on sama nurk, mida me nägime polaarkoordinaatides / silindrikoordinaatides. See on nurk positiivse x – telje ja ülaltoodud joone vahel, mida tähistab r (mis on samuti samar nagu polaarsestes/tsilindrilistes koordinaatides). Piirangud puuduvad φ . Lõpuks on θ . See on nurk positiivse z – telje ja alguspunktist punktile kulgeva joone vahel. See on vajalik $0 \leq \theta \leq \pi$. Kokkuvõttes on ρ kaugus algpunktist punktini, θ on nurk, mida me peame positiivse z – telje suhtes allapoole pöörama, et punktini jõuda, ja φ on see, kui palju me peame punktini jõudmiseks pöörlema ümber z – telje. Siin on kujutatud punkti visand \mathbb{R}^3 .



Joonis 7.3.

Ümberarvestusvalemite tuletamiseks alustame kõigepealt punktist sfäärilistes koordinaatides ja küsime, millised on selle punkti silindrilised koordinaadid. Niisiis, (ρ, φ, θ) on teada ja (r, φ, z) tuleb leida. Tegelikult peame leidma ainult ρ ja z , sest φ on mõlemas koordinaatsüsteemis sama. Kui me vaatame ülaltoodud visandit otse kolmnurga eest, saame järgmise visandi:



Joonis 7.4.

Me teame, et z – telje ja ρ vaheline nurk on θ ja väikese geomeetria abil teame ka, et nurk ρ ja täisnurkse kolmnurga vertikaalse külje vahel on samuti θ . Siis saame väikese täisnurkse kolmnurga trigonomeetrilise analüüsi abil,

$$\begin{aligned} z &= \rho \cos\theta \\ r &= \rho \sin\theta. \end{aligned}$$

ja need on täpselt need valemid, mida me otsisime. Niisiis, kui punkt on antud sfäärilistes koordinaatides, siis selle punkti silindrilised koordinaadid on järgmised:

$$\begin{aligned} r &= \rho \sin\theta \\ \varphi &= \varphi \\ z &= \rho \cos\theta. \end{aligned}$$

Püthagorase teoreemi järgi saame ka, $\rho^2 = r^2 + z^2$.

Järgnevalt leiame sama punkti kartesiaankoordinaadid. Selleks alustame eelmises punktis esitatud silindriliste teisendusvalemite abil ja peame vaid kasutama eespool esitatud valemeid r ja φ , et saada:

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin\theta \cos\varphi \\ y &= \rho \sin\theta \sin\varphi \\ z &= \rho \cos\theta \end{aligned}$$

Pange ka tähele, et kuna me teame, et $r^2 = x^2 + y^2$ saame, $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Punktide teisendamine kartesiaanlikest või silindrilistest koordinaatidest sfäärilistesse koordinaatidesse toimub tavaliselt samade teisendusvalemite abil.



Co-funded by
the European Union



5. Rakendused igapäevaelus

Tänapäeval on silindrilised ja sfäärilised koordinaadid muutunud oluliseks vahendiks erinevates valdkondades, sealhulgas füüsikas, inseneriteaduses ja arvutigraafikas. Neid kasutatakse osakeste liikumise kirjeldamiseks, füüsikaliste nähtuste modelleerimiseks ja kolmemõõtmeliste andmete esitamiseks. Konkreetsemalt kasutatakse silindrilisi koordinaate vedelike dünaamikas voolukiiruste arvutamiseks torudes või jõudude mõju arvutamiseks veealustele pindadele, ehitustehnikas, kui käsitletakse konstruktsioone, mis koosnevad ümmargustest komponentidest, nagu tornid, silindrid või kuplid, ning tarkvaratehnikas, eriti 3D graafikas ja simulatsioonides, kus objekti ümmargused või silindrilised tunnused tuleb digitaalselt esitada.

Silindrilisi koordinaate kasutatakse sageli silindriliste objektide, näiteks torude, völliide või hammasrataste geomeetria kirjeldamiseks. See lihtsustab nende omaduste projekteerimist ja analüüsimist. Tootmisprotsessides, nagu treimine või freesimine, kasutatakse silindrikoordinaate tööriistade liikumise juhtimiseks, et luua silindrilisi kujundeid.

Välju, nagu elektri- ja magnetväljad, on mugavam kirjeldada silindriliste koordinaatide abil, eriti kui tegemist on silindrilise sümmeetriaga, näiteks pikkade juhtmete või solenoididega, ja sfääriliste koordinaatide abil, eriti kui tegemist on sümmeetriliste olukordadega, näiteks laengute või vooludega.

Silindrilisi ja sfäärilisi koordinaate kasutatakse vedelike voolu analüüsimiseks ümber silindriliste objektide, näiteks torude või kolonnide, või ümber sfäärilise sümmeetriaga objektide, näiteks mullide või tilkade, ümber.

Soojusülekandega seotud probleemides võivad silindrilised koordinaadid olla kasulikud silindrilise sümmeetriaga olukordade analüüsimisel, näiteks soojusjuhtimine torus või silindris.

Robotkäed kasutavad sageli sfäärilisi koordinaate, et määrata oma lõpp-rakendi asukoht ja orientatsioon. See võimaldab täpset liikumist ja selliseid ülesandeid nagu keevitamine või kokkupanek.

Andurite andmete töötlemine: Andurid robotitel või autonoomsetel sõidukitel võivad kasutada silindrilisi või sfäärilisi koordinaate selliste andmete esitamiseks nagu heli suund või objektide asukoht, kusjuures silindriliste koordinaatide puhul on objektid keskse telje suhtes.

Meteoroloogid kasutavad silindrikoordinaate, et kirjeldada tuulemustreid ümber keskse punkti, aidates mõista ja ennustada ilmastikutingimusi.

GPS-süsteemid kasutavad sfäärilisi koordinaate, et määrata seadme täpne asukoht Maa pinnal. Laius- ja pikkuskraad on sisuliselt sfäärilised koordinaadid, kus laiuskraad tähistab zeniidinurka ja pikkuskraad asimuudinurka.

Kahe punkti vahelise kauguse määramiseks kasutatakse sfäärilisi koordinaate koos Maa raadiusega, et arvutada lühim tee nende vahel.

Virtuaalreaalsuses modelleeritakse objekte sageli sfääriliste koordinaatide abil. See võimaldab kolmemõõtmeliste objektide täpset kujutamist ja nendega manipuleerimist.



Co-funded by
the European Union



Astronoomid kasutavad tähtede, planeetide ja muude taevakehade asukoha jälgimiseks sfäärilisi koordinaate. Paralleelsuunaline tõus ja deklinatsioon on võrdväärset vastavalt asimuudi ja zeniitnurgaga.

Taevakehade orbiitide mõistmine hõlmab sfääriliste koordinaatide kasutamist, et kirjeldada nende asukohta ja kiirust keskse punkti suhtes.

6. Viited

[1] <https://tutorial.math.lamar.edu/>



Co-funded by
the European Union



8. TEEMA: Trigonomeetrilised funktsioonid

1. Teema valiku põhjendus

Trigonomeetria on oluline matemaatika haru, mis on aluseks edasijõudnute teemadele kalkulasioonis, füüsikas, inseneriteaduses ja arhitektuuris. Õpilaste jaoks on oluline, et nad valdaksid trigonomeetrilisi mõisteid oma akadeemilise ja tööalase karjääri jooksul. Siiski võib trigonomeetria olla paljude õppijate jaoks abstraktne ja keeruline, eriti kui tegemist on ruumiliste seoste visualiseerimise ja mõistmisega.

VR-i kasutamine trigonomeetria õppimisel lahendab need probleemid, pakkudes täiesti kaasahaaravat õpikogemust. VR võimaldab õpilastel visualiseerida trigonomeetrilisi mõisteid kolmemõõtmeliselt, mis lihtsustab keeruliste ideede mõistmist. Näiteks saavad õpilased virtuaalses ruumis manipuleerida nurkadega ja kolmnurkadega, jälgida muutuste mõju reaalses ning mõista paremini ühikringi ja selle rakendusi. Selline interaktiivne, visuaalne lähenemine aitab tugevdada õppimist, muutes trigonomeetria erinevate õpistiilidega õpilastele kättesaadavamaks ja kaasahaaravamaks.

See moodul kasutab virtuaalreaalsust (VR) trigonomeetria põhimõistete õpetamiseks. Õpilased kasutavad 3D-keskkondi, et uurida ja mõista nurkade ja külgede vahelisi seoseid täisnurkse kolmnurga, ühikringi ja trigonomeetriliste funktsioonide, nagu siinus, koosinus ja tangens, vahel. VR-kogemus võimaldab neid mõisteid interaktiivselt uurida, pakkudes praktilist lähenemist trigonomeetria põhimõtete mõistmiseks.

2. Ajalooline taust

Trigonomeetria (vanakreeka keelest $\tau\rho\iota\gamma\omega\nu\nu\omicron\nu$ (trígōnon) 'kolmnurk' ja $\mu\epsilon\tau\rho\nu\omicron\nu$ (métron) 'mõõt') on matemaatika haru, mis tegeleb kolmnurkade nurkade ja küljepikkuste vaheliste suhetega. Eelkõige seostavad trigonomeetrilised funktsioonid täisnurksete kolmnurkade nurksid ja küljepikkuste suhteid.

Trigonomeetria on pikk ja rikas ajalugu, mis ulatub tagasi iidsetesse tsivilisatsioonidesse. See tekkis hellenistlikus maailmas 3. sajandil eKr. geomeetria rakendustest astronoomilistes uuringutes. Kolmnurkade varajane uurimine on jälgitav 2. aastatuhandel eKr Egiptuse matemaatikas (*Rhindi matemaatiline papüürus*) ja Babüloonia matemaatikas. Babülooniased ja egiptlased kasutasid varaseid trigonomeetrilisi ideid praktilistel eesmärkidel, nagu astronoomia ja maamõõtmine. Trigonomeetria oli levinud ka kušiitide matemaatikas.

Trigonomeetria ametlik uurimine algas kreeklastel, eelkõige Hipparchose tööga umbes 150 eKr, kellele omistatakse esimese teadaoleva trigonomeetrilise tabeli koostamine. *Ptolemaios* laiendas hiljem Hipparchose tööd, andes olulise panuse antud valdkonda. India astronoomias õitses trigonomeetriliste funktsioonide uurimine Gupta perioodil, eriti tänu *Aryabhata* (6. sajand pKr), kes avastas siinuse, kosinuse ja teised trigonomeetrilised funktsioonid.



Co-funded by
the European Union



Kreeklased keskendusid akordide arvutamisele, samal ajal kui India matemaatikud löid varaseimad teadaolevad trigonomeetriliste suhtarvude väärtustabelid (trigonomeetrilised funktsioonid).

Trigonomeetriast sai iseseisev distsipliin islamimaailmas, kus tunti kõiki kuut trigonomeetrilist funktsiooni. Islami kuldajastul tegid sellised õpetlased nagu *Al-Battani*, *Abu al-Wafa* ja *Al-Khwarizmi* edasisi edusamme, eriti sfäärilise trigonomeetria alal, mis oli oluline navigatsiooni ja astronoomia jaoks. Araabia ja kreeka tekstide tõlked viisid selleni, et trigonomeetria võeti renessansiajast alates Regiomontanusega läänemaailmas kasutusele.

Kaasaegse trigonomeetria areng muutus lääne valgustusajastul, alustades 17. sajandi matemaatikast (*Johannes Kepler*, *Isaac Newton*, *James Stirling* jt) ja saavutades oma tänapäevase kuju *Leonhard Euleriga* (1748). Nende töö aitas integreerida trigonomeetria laiemasse matemaatikasse ja selle rakendustesse teaduses.

Seeläbi, et trigonomeetria õppimisse on kaasatud VR, ühendab see moodul õpilasi nii selle teema ajaloolise arengu kui ka tänapäeva tipp tehnoloogiaga. Selline lähenemisviis mitte ainult ei täiusta õpikogemust, vaid illustreerib ka trigonomeetria jätkuvat asjakohasust ja kohaldamist tänapäeva maailmas.

3. Õpitulemused

Trigonomeetriliste põhimõistete mõistmine:

- Trigonomeetriliste suhtarvude mõistmine: Õpilased peaksid suutma määratleda ja selgitada põhilisi trigonomeetrilisi suhteid - siinus, koosinus ja tangens - täisnurkse kolmnurga kontekstis.
- Suhtarvude kohaldamine: Õpilased peaksid olema võimelised rakendama neid suhtarve, et lahendada lihtsaid ülesandeid, mis on seotud täisnurkse kolmnurga külgede ja nurkadega.

Trigonomeetriliste seoste visualiseerimine:

- Ühikuringi uurimine: Õpilased peaksid omandama põhiteadmised ühikuringist, sealhulgas sellest, kuidas nurgad vastavad koordinaatidele ringil ja kuidas see on seotud siinus- ja kosinusfunktsioonidega.
- Reaalajas suhtlemine: Kasutades VR-i, peaksid õpilased olema võimelised visualiseerima, kuidas nurga muutmine kolmnurgas või ühikuringil mõjutab siinuse, koosinuse ja puutuja väärtusi, parandades nende mõistete ruumilist mõistmist.



Co-funded by
the European Union



Trigonomeetriliste funktsioonide graafilise kujutamise:

- Graafikute põhitõlgendus: Õpilased peaksid oskama ära tunda ja tõlgendada siinus-, kosinus- ja puutujafunktsioonide graafikuid, mõistes nende peamisi omadusi, nagu amplituud, periood ja sagedus.
- Graafiku loomine: Õpilased peaksid suutma visandada või tuvastada nende funktsioonide põhilisi graafikuid antud andmete või VR-simulatsioonide põhjal.

Teadlikkus tegelikust rakendusest:

- Seos reaalmaailma stsenaariumidega: Õpilased peaksid suutma tuvastada ja kirjeldada vähemalt ühte trigonomeetria reaalmaailma rakendust (nt navigatsioon, arhitektuur või füüsika), mida näidatakse VR-keskkonnas.

Parem kaasatus ja usaldus:

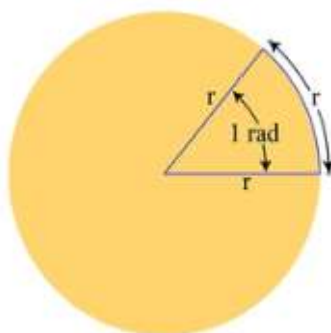
- Suurem mugavus trigonomeetriaga: VR-i kaasahaarav olemus peaks aitama õpilastel end kindlamalt ja aktiivsemalt trigonomeetriliste mõistetega tegeleda, vähendades matemaatika õppimisega sageli kaasnevat ärevust või pettumust.
- Probleemide lahendamise oskused: Õpilased peaksid demonstreerima paranenud probleemilahendamisoskust, rakendades oma arusaamist trigonomeetrilistest mõistetest VR-põhiste stsenaariumide või lihtsate sõnaliste ülesannete puhul.

4. Teoreetiline alus

1. Radiaannurga mõõtmine

Koos nurkade praktilise kraadimõõduga kasutatakse teoreetilistes küsimustes radiaanimõõtu, übermõõdu keskpunktis oleva nurgaa α väärtust mõõdetakse selle kaare pikkusel l , millel see nurk toetub, ja selle ringi raadiusel r pikkuse suhtega: $\alpha = \frac{l}{r}$. Selle mõõtmise ühik on *radiaan* - nurk, mis on keskne kaarele, mille pikkus on võrdne ringi raadiusega. Üks *radiaan* on võrdne $57^{\circ}17'44''{,}8$, mis tähendab, et $1^{\circ} = 0,017453$ radiaani. Üleminek ühest mõõtmest teise toimub valemite järgi:

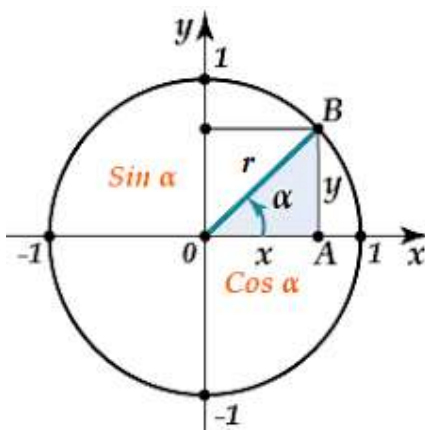
$$\alpha^{\circ} = \frac{180}{\pi} \alpha(\text{rad}), \quad \alpha(\text{rad}) = \frac{\pi}{180} \alpha^{\circ}.$$



Joonis 8.1.

2. Trigonomeetrilised suhtarvud

Trigonomeetrilised nurgafunktsioonid määratakse nii trigonomeetrilise ringi kui ka teravnurkse kolmnurga abil (teravate nurkade puhul). Trigonomeetriline ring on ring, mille raadius on 1 ja mille keskpunkt on koordinaatasapinna alguspunktis. Punktid O , A ja B moodustavad vastava kolmnurga.



Joonis 8.2.

Koordinaadid (x, y) vastavad $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ antud nurgale (α) järgmiselt:

- Sine (sin): Määratletud kui täisnurkse kolmnurga vastaskülje ja hüpotenuusi suhe:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} = y = AB.$$

- Kosinus (cos): Määratletud kui kõrvaloleva külje ja hüpotenuusa suhe:



$$\cos \alpha = \frac{x}{r} = x = OB.$$

- Tangent (\tan): Määratletud kui vastaskülje ja kõrvaloleva külje suhe:

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{AB}{OB}.$$

Muud trigonomeetrilised funktsioonid saab määratleda eelnevate definitsioonide alusel:

- Contangent (\cot): Määratletud kui $\frac{1}{\tan}$

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{OB}{AB}.$$

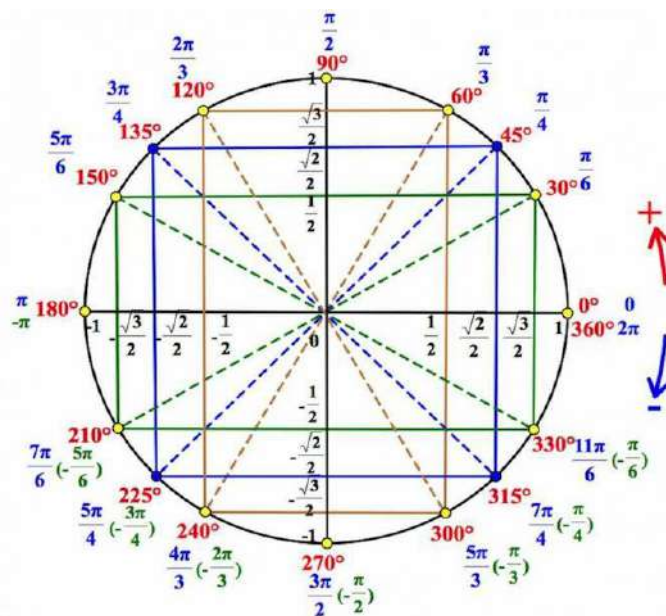
- Secante (\sec): Määratletud kui pöördväärtus $\frac{1}{\cos}$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{x}.$$

- Cosecante (\csc): Määratletud kui vastastikune väärtus $\frac{1}{\sin}$

$$\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{y}.$$

Kui nurk muutub vahemikus 0 kuni 2π (mis tähendab suunas), on trigonomeetriliste funktsioonide vastavad väärtused määratletud vastavalt sümmeetria ja vastavate märkidega.



Joonis 8.3.

Määratlustest võib hõlpsasti järeldada, et



- trigonomeetrilised funktsioonid $f(x) = \sin x$ ja $f(x) = \cos x$ on defineeritud järgmiselt. \mathbb{R} ;
- trigonomeetrilised funktsioonid $f(x) = \tan x$ ja $f(x) = \sec x$, on defineeritud järgmiselt
aadressil $;\mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2}, \forall k \in \mathbb{Z}\}$
- trigonomeetrilised funktsioonid $f(x) = \cot x$ ja $f(x) = \csc x$, on defineeritud järgmiselt
aadressil $;\mathbb{R} \setminus \{k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}\}$
- trigonomeetrilised funktsioonid $f(x) = \sin x$ ja $f(x) = \cos x$ on perioodilised perioodiga 2π ja $f(x) = \sec x$ ja $f(x) = \csc x$ on perioodilised perioodiga 2π : $f(x) = f(x + 2k\pi), \forall k \in \mathbb{Z}$, st.
 $\sin(2k\pi + x) = \sin x$, $\cos(2k\pi + x) = \cos x$,
 $\sec(2k\pi + x) = \sec x$, $\csc(2k\pi + x) = \csc x$
- trigonomeetrilised funktsioonid \tan ja \cot on perioodilised perioodiga π : $f(x) = f(x + k\pi), \forall k \in \mathbb{Z}$

$$\tan\left(\frac{k\pi}{2} + x\right) = \tan x, \cot\left(\frac{k\pi}{2} + x\right) = \cot x.$$

- trigonomeetrilised funktsioonid \cos ja \sec on paaris: $f(-x) = f(x), \forall x \in D_f$
- trigonomeetrilised funktsioonid \sin , \csc , \tan ja \cot on paaritu: $f(-x) = -f(x), \forall x \in D_f$;
- kõik $x \in \mathbb{R}$ puhul on meil

$$-1 \leq \sin x \leq 1; -1 \leq \cos x \leq 1;$$

- kõik $x \in D_f$, väärtused $\tan x$ ja $\cot x$, varieeruvad vahemikus $-\infty$ kuni $+\infty$
- kõik $x \in D_f$, väärtused $\sec x$ ja $\csc x$, varieeruvad järgmiselt: $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

Põhilised trigonomeetrilised identiteedid:

- Pythagorase identiteet: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\sin x \csc x = 1$, $\cos x \sec x = 1$;
- $\sec^2 x \pm \tan^2 x = 1$, $\csc^2 x - \cot^2 x = 1$.

Ühe trigonomeetrilise funktsiooni esitamine teise funktsiooni suhtes:

- $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 x}}$;



- $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} = \frac{\cot x}{\sqrt{1 + \cot^2 x}};$
- $\tan x = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x} = \sqrt{\sec^2 x - 1} = \frac{1}{\sqrt{\csc^2 x - 1}};$
- $\cot x = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 x - 1}} = \sqrt{\csc^2 x - 1}.$

3. Nurga summa ja nurga erinevuse valemid:

- $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y;$
- $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y;$
- $\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y};$
- $\cot(x \pm y) = \frac{\cot x \cot y \mp 1}{\cot y \pm \cot x}.$

4. Mitme nurga valemid:

- $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x;$
- $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x;$
- $\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x};$
- $\cot(2x) = \frac{\cot^2 x - 1}{2 \cot x}.$

5. Poolnurga valemid:

- $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos x)};$
- $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos x)};$
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x};$
- $\cot\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}} = \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 - \cos x}.$

6. Trigonomeetriliste funktsioonide summa ja vahe:

- $\sin x + \sin y = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right);$



- $\sin x - \sin y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right);$
- $\cos x + \cos y = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right);$
- $\cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right);$
- $\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y};$
- $\cot x \pm \cot y = \pm \frac{\sin(x \pm y)}{\sin x \sin y}.$

7. Mõnede trigonomeetriliste funktsioonide produktid:

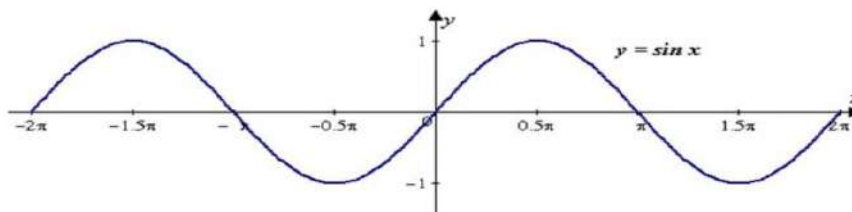
- $\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)];$
- $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) + \cos(x + y)];$
- $\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x - y) + \sin(x + y)].$

8. Mõnede trigonomeetriliste funktsioonide võimsused:

- $\sin^2 x = \frac{1}{2}[1 - \cos(2x)];$ $\cos^2 x = \frac{1}{2}[1 + \cos(2x)].$

9. Peamiste trigonomeetriliste funktsioonide graafika:

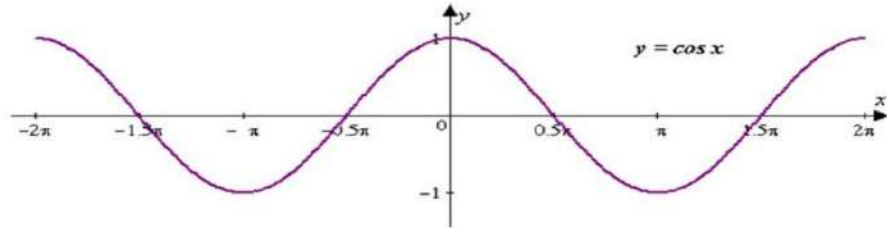
- Funktsioon $\sin x$ graafika :



Joonis 8.4.

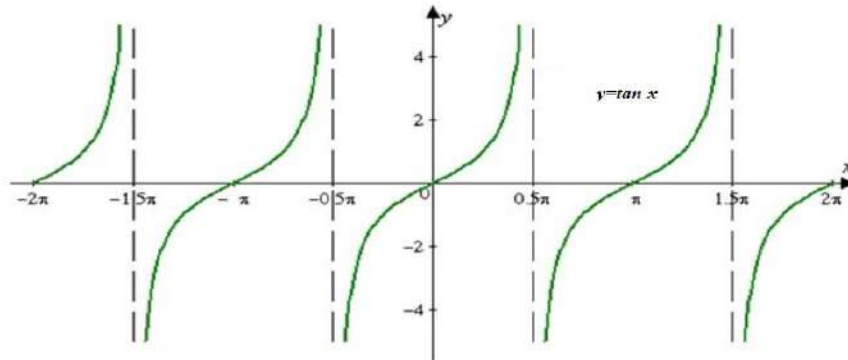


- Funktsioon $\cos x$ graafika :



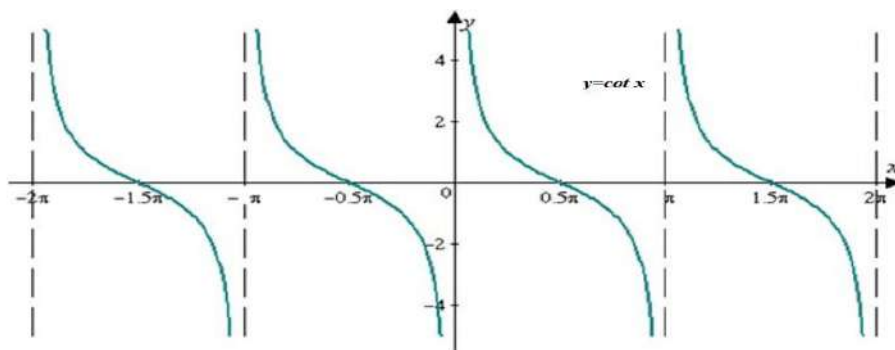
Joonis 8.5.

- Funktsioon $\tan x$ graafika :



Joonis 8.6.

- Funktsioon $\cot x$ graafika :



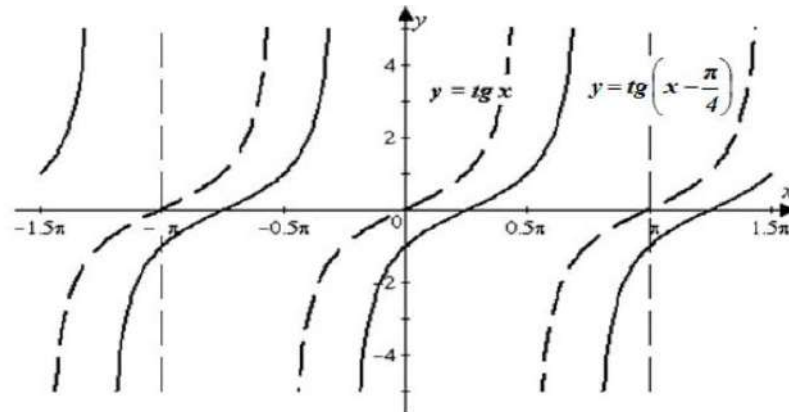
Joonis 8.7.



- Näited

- Konstrueerige funktsiooni $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ graafika.

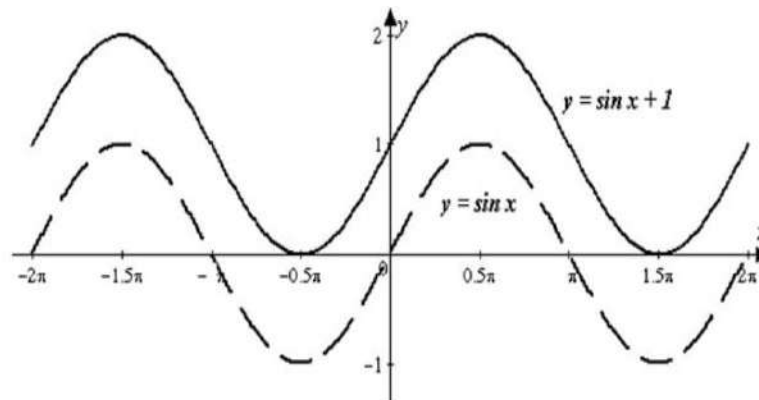
Lahendus. Soovitud graafik saadakse funktsiooni $y = \tan x$ graafikust paralleelse ülekande tulemusena piki absissateljest paremale, kasutades selleks $\frac{\pi}{4}$:



Joonis 8.8.

- Konstrueerige funktsiooni $y = \sin x + 1$ graafika.

Lahendus. Soovitud graafik saadakse funktsiooni $y = \sin x$ graafikust paralleelse ülekande tulemusena piki ordinaatteljet ülespoole :1



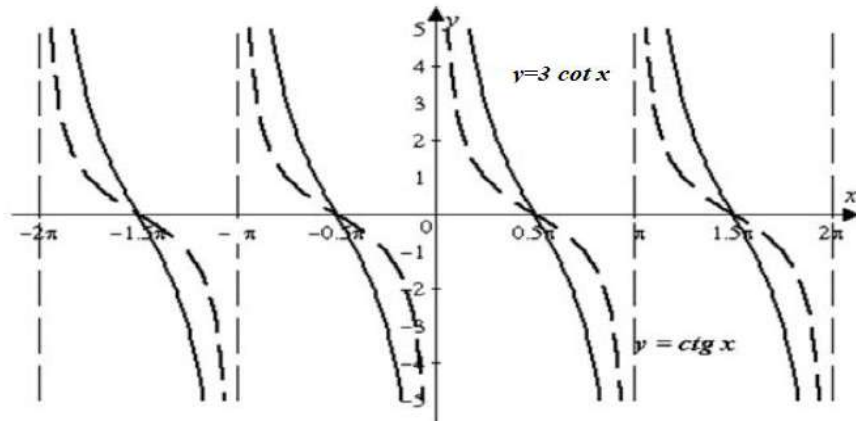
Joonis 8.9.

- Konstrueerige funktsiooni $y = 3\cot x$ graafika.

Lahendus. Soovitud graafik saadakse funktsiooni $y = \cot x$ graafikust, venitades viimast



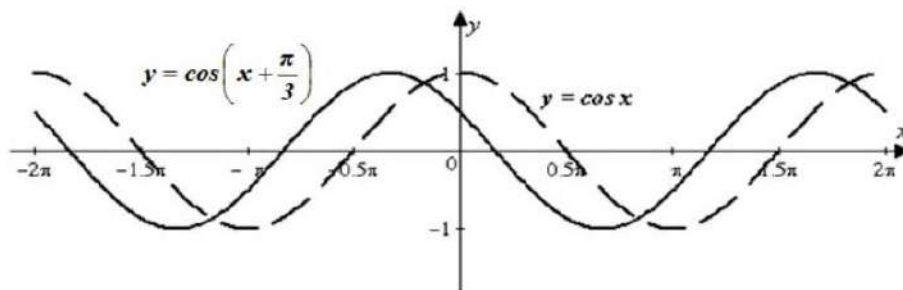
piki ordinaattelge kolm korda (suurendades iga graafiku punkti ja absissatelje vahemaad kolm korda):



Joonis 8.10.

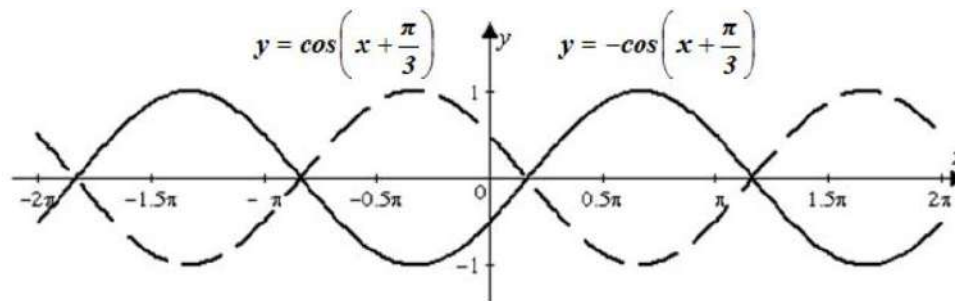
- Konstrueerige funktsiooni $y = -\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ graafika.

Lahendus. Konstrueerime antud graafiku, kasutades funktsiooni $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ graafiku elementaarseid teisendusi. Viies selle graafiku paralleelset ülekannet pikix -telge vasakule $\frac{\pi}{3}$, saame graafiku $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, saame:



Joonis 8.11.

Seejärel, kuvades funktsiooni $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ graafiku sümmeetriliselt absissatelje suhtes, saame soovitud graafiku:



Joonis 8.12.

- Sissejuhatus pöödrigonomeetritesse funktsioonidesse

Pöödrigonomeetriselised funktsioonid on primaarsete trigonomeetriseliste funktsioonide pöördoperatsioonid: siinus, koosinus, puutuja, kotangent, sekant ja koesekant. Need funktsioonid, mida tavaliselt tähistatakse kui \sin , \cos , \tan , \cot , \sec ja \csc , võimaldavad määrata kindlaks nurga, mis vastab antud trigonomeetriselisele suhtele.

Näiteks kui $\sin\theta = x$ mingi nurga θ puhul, siis võib nurka väljendada järgmiselt:

$$\theta = \arcsin(x).$$

Igal pöödrigonomeetriselisel funktsioonil on piiratud vahemik, et tagada, et see on hästi määratletud ja annab unikaalse tulemuse. Need vahemikud on valitud nii, et iga pöördfunktsioon katab algfunktsiooni ühe täieliku tsükli. Konkreetsed vahemikud on järgmised:

- $\arcsin(x) : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
- $\arccos(x) : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$
- $\arctan(x) : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Seos trigonomeetriselise funktsiooni ja selle pöördfunktsiooni vahel on määratletud algfunktsiooni vahemikuga ja pöördfunktsiooni domeeniga. Näiteks siinusfunktsiooni $\sin(x)$ on määratletud kõigi reaalarvude x jaoks, kuid $\sin(x)$ väärtused jäävad ainult vahemikku $[-1, 1]$. Järelikult on pöördsiinusfunktsioon $\arcsin(x)$ määratletud ainult $x \in [-1, 1]$ jaoks ja annab nurga piiratud vahemikus $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

See piirang pöördfunktsiooni domeenile aitab lahendada ebaselgusi. Kuna trigonomeetriselised funktsioonid on perioodilised, ei ole neil ilma selle piiranguta unikaalset pöördväärtust. Piirates väljundnurkade vahemikku, valib iga pöördfunktsioon peamise väärtuse, tagades üks-ühele vastavuse.

Ümberpööratud trigonomeetriselised funktsioonid mängivad olulist rolli võrrandite lahendamisel, kus nurgad tuleb määrata teadaolevate trigonomeetriseliste väärtuste põhjal. Nende



Co-funded by
the European Union



funktsioonide rakendused ulatuvad erinevatesse valdkondadesse, nagu füüsika, inseneriteadus ja arvutiteadus, eriti kontekstides, kus on vaja määrata nurkasid.

Käändtrigonomeetrilisi funktsioone kasutatakse erinevates valdkondades, sealhulgas füüsikas, inseneriteaduses ja arvutigraafikas, kus nurkade määramine teadaolevate suhtarvude põhjal on oluline.

5. Rakendused igapäevaelus

Trigonomeetria ei pruugi olla otseselt rakendusi praktiliste küsimuste lahendamisel, kuid seda kasutatakse erinevates asjades, mis meile nii palju rõõmu valmistavad. Näiteks muusika, nagu te teate, liigub heli lainetena ja see muster, kuigi mitte nii korrapärane kui funktsioonid \sin või \cos , on siiski kasulik arvutimuusika arendamisel. Arvuti ei saa ilmselgelt kuulata ja mõista muusikat nii nagu meie, seega kujutavad arvutid seda matemaatiliselt selle koostisosade helilainete abil. Ja see tähendab, et heliinsenerid peavad tundma vähemalt trigonomeetria põhitõdesid. Ja head muusikat, mida need heliinsenerid toodavad, kasutatakse selleks, et rahustada meid meie hektilisest, stressirohkest elust - kõik tänu trigonomeetria.

- **Trigonomeetria astronoomias**

Inimesi on alati köitnud kosmos. Astronoomia on olnud trigonomeetria arengu liikumapanevaks jõuks. Enamik trigonomeetria varaseid avastusi oli seotud sfäärilise trigonomeetria, peamiselt selle rakendamise tõttu astronoomias. Kreeka trigonomeetria arendamisel on teadaolevalt kolm peamist tegelast: *Hipparchos*, *Menelaos* ja *Ptolemaios*. Tõenäoliselt oli ka teisi autoreid, kuid aja jooksul on nende teosed kadunud ja nende nimed unustatud. Kui kaugel on tähed? Kogu aasta jooksul pöörleb Maa ümber Päikese ja tähtede näiline asend näib veidi nihkuvat võrreldes palju kaugemal asuvate tähtedega. Seda nähtust saab üsna lihtsalt jälgida. Sirutage oma käsi enda ette pöidlaga ülespoole. Seejärel vaadake seda esmalt vasaku ja seejärel parema silmaga. Te võite märgata, et sõrme asend muutub. Kui te lähendate sõrme oma silmadele, on nihkumine tausta suhtes suurem. Meie silmad asuvad teataval kaugusel, mistõttu sirged jooned, mida me mentaalselt sõrmest silmadeni tõmbame, loovad nurga. Kui me jätkame neid sirgeid, leiame kaks erinevat sõrme asendit. Ja nende vaheline nurk sõltub sellest, mida lähemal on sõrm silmadele. Seda nähtust nimetatakse parallaksiks. Astronoomid hindavad selle meetodi abil, mida nimetatakse tähtede parallaksiks ehk trigonomeetriliseks parallaksiks, kaugust lähedalasuvatest objektidest kosmoses.

- **Trigonomeetria hoone või mäe kõrguse mõõtmisel**

Trigonomeetria saab kasutada näiteks mäe kõrguse mõõtmiseks: kui tead, millisest kaugusest sa vaatled ja millise nurga alt sa vaatad, saad hõlpsasti määrata mäe kõrguse. Samamoodi, kui teil on olemas ühe külje väärtus ja kaldenurk mäe tipust, saate leida kolmnurga teise külje, teil on vaja teada vaid ühe külje ja kolmnurga nurka. Vastavalt tõestatud faktidele ütlevad Ameerika teadlased, et selleks, et määrata kaugust mis tahes objektist, hindab meie aju kõigepealt



Co-funded by
the European Union



nägemistasandi ja maapinna tasandi vahelist nurka. Üldiselt ei ole "nurkade mõõtmise" idee uus. Kaugemaid objekte, mis asuvad vaateväljas kõrgemal, joonistasid Vana-Hiina maalijad, jättes mõnevõrra tähelepanuta perspektiivi seadused. Üheteistkümnenda sajandi araabia teadlane *Alha-zen* sõnastas teooria kauguse määramiseks nurkade hindamise teel.

- **Trigonomeetria ehituses**

Hoonete, teede, sildade jne ehitamisel vajavad inimesed trigonomeetriat:

- Mõõtke väljad, maatükid ja alad;
- mõõdab hoone kõrgust, laiust, pikkust jne.
- teha seinad paralleelseks ja risti;
- paigaldada keraamilised plaadid;
- projekteeritud katuse kalle;

Arhitektid kasutavad trigonomeetriat konstruktsioonikoormuse, katusekallete, maapinna ja paljude muude aspektide, sealhulgas päikesevarjutuse ja valgusnurkade arvutamiseks.

Trigonomeetriat võib nimetada arhitektuuri geeniuuseks, enamik meile tuntud ehitisi on projekteeritud tänu sellele. Mõned kuulsad näited sellistest hoonetest on:

- Mary Axe Londonis:



- Sydney ooperimaja:



Co-funded by
the European Union



- Argentinas Los Manantiales'i restoran:



- Gaudí lastekool Barcelonas:



- Bodegas Isios Winery Hispaanias:



Co-funded by
the European Union



- **Trigonomeetria lennutehnikas**

Lennuinsenerid peavad arvestama oma kiirust, kaugust ja suunda koos tuule kiiruse ja suunaga. Tuul mängib olulist rolli selles, kuidas ja millal lennuk jõuab sinna, kuhu vaja, seda lahendatakse vektorite abil, et luua kolmnurk, mille lahendamiseks kasutatakse trigonomeetriat.

- **Trigonomeetria bioloogias**

Üks eluslooduse iseloomulikke tunnuseid on enamiku selles toimuvate protsesside tsüklilisus. Taevakehade ja elusorganismide liikumise vahel on seos. Biorütmid (bioloogilised rütmid) on suhteliselt korrapärased muutused elusorganismi olemuses ja tema bioloogiliste protsesside intensiivsuses. See on omane kõigile elusorganismidele ja võime selliseid muutusi teha on pärilik. Seda nähtust võib täheldada nii üksikutes rakkudes kui ka tervetes elusorganismide populatsioonides. Bioloogilised rütmid jagunevad ökoloogilisteks (kattuvad keskkonna rütmiga) ja füsioloogilisteks (perioodid sekundi murdosadest kuni mitme minutini). Ajaliselt võivad biorütmid olla hooajalised, aastased, päevased jne. Trigonomeetriliste funktsioonide abil on võimalik luua ka biorütmide mudel.

Merebioloogid kasutavad mõõtmiste määramiseks sageli trigonomeetriat. Näiteks selleks, et välja selgitada, kuidas valguse tase eri sügavustel mõjutab vetikate fotosünteesivõimet. Trigonomeetriat kasutatakse taevakehade vahelise kauguse leidmiseks. Samuti kasutavad merebioloogid matemaatilisi mudeleid, et mõõta ja mõista mereloomi ja nende käitumist. Merebioloogid võivad kasutada trigonomeetriat, et määrata metsloomade suurust kaugelt.

- **Trigonomeetria navigatsioonis**

Trigonomeetriat kasutatakse selliste suundade määramiseks nagu põhja, lõuna, ida ja lääne. See ütleb teile, millist suunda tuleb kompassiga võtta, et saada sirge suund. Seda kasutatakse navigatsioonis selleks, et määrata asukoht täpselt kindlaks. Seda kasutatakse ka selleks, et leida kalda kaugus mingist punktist merel. Seda kasutatakse ka horisondi nägemiseks.

- **Trigonomeetria videomängudes**

Kujutage ette, kuidas mängija liugleb sujuvalt üle teetõkete. Ta ei hüppa tegelikult otse piki telgeid, vaid ta läbib kergelt kõverat või paraboolset rada, et ületada teel olevad takistused. Trigonomeetria aitab tal neist takistustest üle hüpata. Mängutööstus on seotud IT ja arvutitega ning trigonomeetria on nende inseneride jaoks sama oluline.



Co-funded by
the European Union



6. Viited

- [1] Vikipeedia, vaba entsüklopeedia.
- [2] Weber, K. Õpilaste arusaam trigonomeetristest funktsioonidest. Math Ed Res J 17, 91-112 (2005). <https://doi.org/10.1007/BF03217423>. <https://doi.org/10.1007/BF03217423>
- [3] Rahmawati N. D., Buchori A., Wibisono A. VAR (Virtual Augmented Reality)-põhiste õppemängude tõhusus trigonomeetria õppimisel ülikoolis, 2. rahvusvaheline haridus- ja tehnoloogiakonverents (ICETECH 2021), konverentsileht. 10.2991/assehr.k.220103.039
- [4] Virtuaalreaalsuse tehnoloogia mõju keskkooliõpilaste trigonomeetria õppimisele. Video: <https://hundred.org/en/innovations/the-impact-of-virtual-reality-technology-on-the-learning-of-trigonometry-for-high-school-students>
- [5] Gibilisco S. Trigonomeetria demüstifitseeritud. A self-teaching Guide. MvGraw Hill. 2003.



Co-funded by
the European Union



9. TEEMA: Eukleidiline geomeetria

1. Teema valiku põhjendus

Mitte-eukleidiline geomeetria (NEG) pakub alternatiivset ja läbinägelikku vaatenurka aksiomaatiliste süsteemide alustele, muutes põhjalikult meie arusaama geomeetriast (Coxeter, 1965). Eukleidilise geomeetria sügavalt juurdunud eeldusi kahtluse alla seades avab NEG tee matemaatilises hariduses ja laiemas teaduslikus uurimises oluliste kognitiivsete oskuste arendamiseks. Mitte-eukleidilise geomeetriaga tegelemisel seisavad õpilased aktiivselt silmitsi eukleidilise raamistiku piirangutega, sundides neid analüüsima kriitiliselt mitmeid mudeleid. See protsess tugevdab nende loogilist mõtlemist ja kriitilist mõtlemist ning edendab loomingulist probleemilahendamiskust, mis on teaduslikuks innovatsiooniks hindamatu väärtusega (Buda, 2017; Sukestiyarno et al., 2023; Kranz et al., 2014).

Mitte-eukleidiliste ruumide uurimine on eriti rikastav, sest see paneb õpilased ja õpetajad tegelema olukordadega, mis ei vasta tavapärasele eukleidilisele intuitsioonile, näiteks kumerate pindade geomeetria hüperboolilises või elliptilises kontekstis.

Eukleidese viies postulaat, mida sageli nimetatakse Playfairi postulaadiks, väidab, et iga joonel ja iga punkti $A \notin l$ jaoks on olemas üks ja ainult üks selline joon, e , et $A \in e$ ja e on paralleelne l , kuid mitte-eukleidilises geomeetrias see nii ei ole. Näiteks hüperbooliline geomeetria võimaldab lõpmatult palju paralleelseid sirgeid läbi A , samas kui elliptiline geomeetria ei võimalda ühtegi. Selline eukleidilisest normist kõrvalekaldumine sunnib õpilasi ümber hindama, mida tähendab, et ruum on *joon* või *tasand*, mis on vaimselt nõudlik, kuid intellektuaalse arengu seisukohalt uskumatult kasulik.

NEG rõhutab ka aksiomaatilise lähenemise jõudu, mis on teaduse arengu aluseks olev meetodika erinevates teadusharudes. Kui õpilased tegelevad alternatiivsete aksiomikogumite kasutamisega ja näevad, kuidas väikesed muutused aluspõhimõtetes annavad väga erinevaid matemaatilisi struktuure, saavad nad ülevaate geomeetriast ja õpivad hindama formaalsete meetodite rangust. Need kogemused on hindamatu väärtusega näiteks topoloogia, diferentsiaalgeomeetria ja teoreetilise füüsika (ruumiaja geomeetria) edasijõudnute jaoks, kus neid meetodeid rakendatakse.

Hariduskontekstides, eriti dünaamilistes keskkondades, nagu GeoGebra, ja VR-põhistes projektides saab NEGi visualiseerida viisil, mida traditsioonilised eukleidilised konfiguratsioonid ei suuda jäädvustada, võimaldades tulevastel õpetajatel ja õpilastel neid keerulisi ideid interaktiivselt uurida. Projektide kaudu, mis edendavad mudelite uurimist ja geomeetrilise mõistmise ühist arendamist, saavad õpilased näha NEGi mitte kui abstraktset või eriskummalist matemaatikavaldkonda, vaid kui matemaatilise uurimise stimuleerivat ja olulist aspekti, millel on otsene mõju teaduse ja tehnoloogia valdkondadele.



Co-funded by
the European Union



2. Ajalooline taust

Paljude sajandite jooksul peeti eukleidilist geomeetriat "tegeliku maailma" ideaalseks mudeliks. Viies postulaat, mida tuntakse paralleelipostulaadina, tekitas aga matemaatikute seas vaidlusi. Kas seda tuleks pidada postulaadiks või teoreemiks? Selle tõestamiseks tehti arvukalt katseid, kuid ükski neist ei olnud edukas.

Pioneeride hulgas oli Carl Friedrich Gauss, "matemaatikute vürst", kes tegi olulisi uurimusi mitte-eukleidilise geomeetria alal, kuigi ta otsustas oma tulemusi mitte avaldada (Coxeter, 1977). Teine silmapaistev tegija oli ungari matemaatik János Bolyai, kes sõnastas mitte-eukleidilise geomeetria versiooni, mida ta nimetas *absoluutseks geomeetriaks* (Gray, 2004). Bolyai jagas oma avastusi oma isa Farkas Bolyai'ga, kes soovitas talle tungivalt, et ta oma tööd avaldaks. Sõltumatult ja umbes samal ajal töötas vene matemaatik Nikolai Ivanovitš Lobatševski välja sarnase mitte-eukleidilise geomeetria vormi, mida ta nimetas *kujuteldavaks geomeetriaks* (Bonola, 1955). Nende matemaatikute töö näitas, et on võimalik konstrueerida sidusaid geomeetrilisi (aksiomaatilisi) süsteeme, võttes välja paralleelipostulaadi, mis viis mitte-eukleidilise geomeetria tekkimiseni ja arenguni. Mitte-eukleidilise geomeetria avastamisel olid kaugeleulatuvad tagajärjed, kuna see seadis kahtluse alla pikaajalise veendumuse, et eukleidiline geomeetria on ainus kehtiv ruumikujundus, milles me elame.

3. Õpitulemused

Pärast selle mooduli läbimist peaksid õpilased olema võimelised:

- mõista, kuidas muutuvad aksioomid võivad viia täiesti uute geomeetriliste struktuuride väljatöötamiseni, süvendades arusaamist matemaatiliste süsteemide olemusest;
- Arendada kriitilise mõtlemise oskust, võrreldes ja kõrvutades eukleidilist ja mitte-eukleidilist geomeetriat, edendades oskust kontrollida väljakujunenud eeldusi;
- Parandada deduktiivset mõtlemist ainult mitte-eukleidilistes struktuurides kehtivate tõestuste ja teoreemide kaudu, võimaldades üha keerukamate loogilis-deduktiivsete konstruktiivsete ahelate arendamist;
- Analüüsida ja hinnata mitmeid geomeetrilisi mudeleid, mõistes igaühe tugevusi ja piiranguid;
- Parandada ruumilist mõtlemisoskust, tegeledes selliste mitteintuiitivsete mõistetega nagu kumerad ruumid ja paralleelsed jooned, mis käituvad erinevalt eukleidilise ruumi omadest;
- Ühendage mitte-eukleidilised põhimõtted tegelike rakendustega;
- Tugevdada loomingulist probleemide lahendamise oskust, lahendades keerulisi ja tundmatuid geomeetrilisi olukordi, mis ei vasta standardsele eukleidilisele intuitsioonile.
- Saab aru võtmemõistetest edasijõudnute jaoks sellistes valdkondades nagu topoloogia, diferentsiaalgeomeetria ja füüsika;



Co-funded by
the European Union



- Arendada matemaatilise mõtlemise struktureerivat ja sisendavat jõudu, tunnistades, et erinevad eeldused võivad viia võrdselt kehtivate, kuid erinevate matemaatiliste struktuurideni;
- Tunnistage geomeetria ajaloolist ja filosoofilist arengut, tutvuge selliste matemaatikute nagu Gauss, Bolyai ja Lobatševski panusega NEG-i ning mõistke mitte-eukleidilise geomeetria mõju teaduslikule mõtlemisele.

Eeltingimused: eukleidilise geomeetria, sealhulgas selle aksioomide ja mõistete, nagu paralleelsed sirgete, kolmnurkade ja nurkade summad, tundmine, kuna mitte-eukleidiline geomeetria tugineb nendele aluspõhimõtetele ja on nendega vastuolus; (2) (mõningane) kogemus matemaatiliste tõestusmeetodite, sealhulgas otseste tõestuste, vastuolude tõestamise ja induktiivse arutluse alal; (3) arusaamine koordinaatsüsteemidest ja geomeetriliste objektide algebralistest esitusviisidest, kuna neid vahendeid kasutatakse sageli hüperbooliliste ja elliptiliste mudelite analüüsimisel; (4) põhiteadmised trigonomeetristest funktsioonidest ja identiteetidest.

4. Teoreetiline alus

Määratlus 9.1. Aksiomaatiline süsteem on loogiline raamistik, mis algab postulaatide kogumiga, st väidetega, mida peetakse tõestamata tõeks ja mis on lähtepunktiks, millest saab loogiliselt tuletada teisi väiteid (teoreeme).

Eukleidiline geomeetria põhineb viiel põhipostulaadil, mis on selle aluseks. Kõik süsteemi kuuluvad teoreemid on tuletatud neist loogilise tuletamise teel. Need postulaadid on aluseks, millele tugineb kogu eukleidilise geomeetria struktuur.

• Viis eukleidilist postulaati

1. **Sirgete postulaat:** On võimalik tõmmata sirgjoon läbi kahe mis tahes punkti.
2. **Joonte laiendamise postulaat:** Iga sirgjooneline lõik on pikendatav lõpmatult mõlemas suunas.
3. **Ringide postulaat:** On võimalik joonistada ring, mille keskpunkt ja raadius on suvalised.
4. **Nurkade võrdsuse postulaat:** Kõik täisnurgad on omavahel võrdsed.
5. **V postulaat:** Kui kahele sirgele langev sirge muudab sama külje sisemised nurgad väiksemaks kui kaks täisnurka, siis kaks sirget, kui neid lõpmatult pikendada, kohtuvad sellel küljel, mille nurgad on väiksemad kui kaks täisnurka.

Keskendudes nendele viiele postulaadile, märkame, et viies postulaat erineb oma olemuselt teistest. See on keerulisem ja ei ole sama intuiitiivsel tasemel kui ülejäänud neli. See postulaat lubab samaväärset ümber sõnastust, millest tulenevalt hakati viiendat postulaati nimetama paralleelpostulaadiks, ja mille me järgnevalt välja toome. See on põhjus, miks "Eukleidese viies postulaat" ja "paralleelpostulaat" kasutatakse sageli üksteise asemel.



6. **Paralleelne postulaat:** On olemas üks ja ainult üks sirge, mis on paralleelne antud sirgega läbi antud punkti.

Palju, palju aastaid püüdsid matemaatikud tuletada Eukleidese viiendat postulaati neljast esimesest, sageli lisades "ilmselge" eelduse, mis lõpuks osutus võrdväärseks viienda postulaadiga. Tähelepanuväärsete katsete hulka kuuluvad Proklose sirgete vahemaade eeldus, Wallise teooria sarnaste kolmnurkade kohta, Saccheri nelinurkade uurimine ning Lamberti ja Klügeli analüüsid mitte-eukleidiliste võimaluste kohta.

19. sajandil toimus läbimurre: selle asemel, et leida vastuolusid viienda postulaadi eitamises, aktsepteerisid matemaatikud alternatiivset mõtteviisi, väites, et läbi antud punkti võib antud sirgega olla paralleelselt **rohkem kui üks sirge**. See mõtteviisi muutus viis hüperboolse geomeetria, mis näitas üllatavaid omadusi, nagu kõverjooned, mis jäävad võrdsete vahedega ja kolmnurgad, mille sisemise nurga summa on väiksem kui 180 kraadi, ning osutus sidusaks alternatiiviks eukleidilisele geomeetria.

Gauss, Lobatševski ja Bolyai lõid igaüks neist uue geomeetria aksiomaatilise aluse. Gauss otsustas siiski oma tulemusi mitte avaldada, oodates märkimisväärseid vastuolusid akadeemilistes ringkondades. Oma isa julgustusel avaldas János Bolyai 1832. aastal oma töö hüperboolilise geomeetria kohta, järgides Lobatševski varasemat publikatsiooni 1829. aastal. Kuigi need pioneerid ei esitanud matemaatilisi tõendeid oma süsteemi järjepidevuse kohta, jäid nad selle sidususes ja usaldusväärsuses kindlad.

- Hüperboolse tasandi mudelid

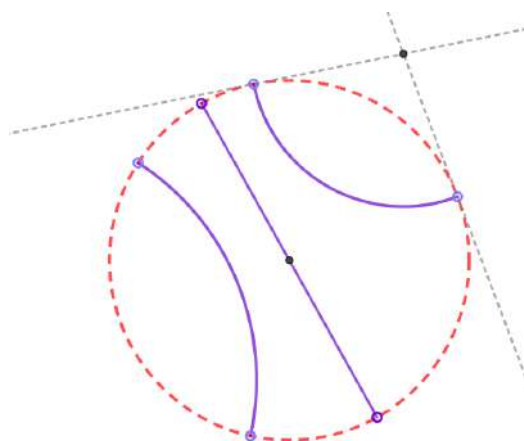
Järgnevalt uurime mõningaid enim kasutatavaid planaarse hüperboolse geomeetria mudeleid, tuues esile primitiivsed hüperboolsed terminid ja andes neile tõlgendusi eukleidilise geomeetria kontekstis.

- *Poincaré-ketta mudel*

Tabelis 9.1 on esitatud Poincaré ketta mudel, kus on esile toodud primitiivsed hüperboolsed terminid ja vastav tõlgendus.

Hüperbooliline termin	Suuline tõlge
Punkt	Antud eukleidilise ringi sisemine punkt \mathcal{C}
Rida	Läbimõõt \mathcal{C} või ringjoone kaar, mis on ortogonaalne \mathcal{C}
Lennuk	Interjäär \mathcal{C}

Tabel 9.1. Poincaré-ketta mudel



Joonis 9.1. Poincaré-ketta mudel.

Poincaré ketta mudelil on ajalooline tähtsus, kuna see oli oluline hüperboolse geomeetria suhtelise järjepidevuse näitamisel võrreldes eukleidilise geomeetriaga.

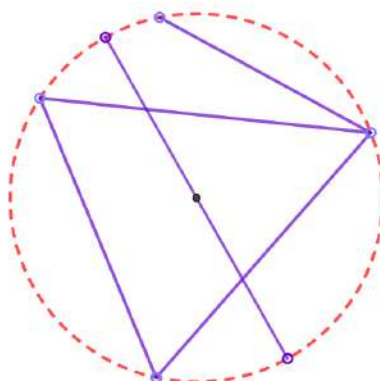
Selles mudelis vastab eukleidilise nurga mõõt otse hüperboolse nurga mõõtele. Hüperboolse ja eukleidilise vahemaa vaheline seos on aga palju keerulisem. Sisuliselt ei ole hüperboolsel juhul vahemaade skaalad ühtlased, mis tunduvad olevat suuremad, kui nad lähenevad C piirile, mis peegeldab hüperboolse ruumi olemust.

- *Kleini mudel*

Kleini mudel on väga sarnane Poincaré ketta mudeliga, vt tabel 9.2, kasutades lihtsamalt visualiseeritavat tõlgendust primitiivse termini joone kohta, kuid Kleini mudelis ei kattu ei nurga-ega kaugusmõõtmised vastavate eukleidiliste mõõtmistega.

Hüperbooliline termin	Suuline tõlge
Punkt	Antud eukleidilise ringi sisemine punkt C
Rida	Avatud akord C
Lennuk	Interjäär C

Tabel 9.2: Kleini mudel



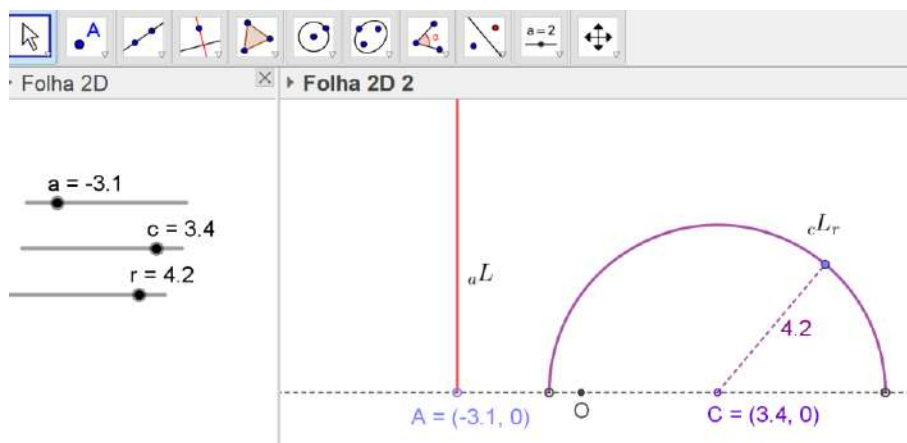
Joonis 9.2: Kleini mudel

- Ülemise pooltasandi mudel

Ülemise pooltasapinna mudelil, nagu ka Poincaré ketta mudelil, on suur ajalooline tähtsus hüperboolse geomeetria arengus, ühendades erinevaid matemaatika harusid ja kehtestades mitte-eukleidilise geomeetria õiguspärasuse. Selles mudelis kujutatakse punkte punktidega, mis asuvad kartesiaanliku tasandi ülemises pooles, ning sirgeid kujutatakse vertikaalsete kiirte ja poolringidena, mis on ortogonaalselt piirjoone suhtes (vt tabel 9.3).

Hüperbooliline termin	Suuline tõlge
Punkt	Point in $\mathbb{H} = (x, y) \in \mathbb{R}^2: y > 0$.
Rida	\mathbb{H} alamhulk kujul ${}_aL$ või ${}_cL_r$, kus ${}_aL = (x, y) \in \mathbb{H}: x = a, a \in \mathbb{R}$ ja ${}_cL_r = (x, y) \in \mathbb{H}: (x - c)^2 + y^2 = r^2, c \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}^+$
Lennuk	\mathbb{H}

Tabel 9.3: Ülemise pooltasapinna mudel



Joonis 9.3. Ülemise pooltasandi mudel

Selles mudelis säilivad nurgad, mida mõõdetakse eukleidiliste mõistete abil, hüperboolsete nurkadena. Kuid ka eukleidiliste ja hüperboolsete vahemaade vaheline vastavus ei ole triviaalne. Ülemise pooltasapinna vahemaad ilmutavad skaalaefekti, mis näib olevat lõpmatult pikenenud, kui nad lähenevad horisontaalsele piirile, mis on "lõpmatusjooneks". See püüab kinni kauguse ebaühtlase olemuse hüperboolses ruumis, nagu ka teistes eelnevalt käsitletud mudelites.

Oluline on tunnistada, et vaatamata erinevustele on kõik hüperboolse geomeetria mudelid isomorfsed.

Teoreem 9.1. *Kõik hüperboolse tasapinnalise geomeetria mudelid on isomorfsed.*

Edaspidi töötame Poincaré poolpinnamudeli raames.

Määratlus 9.1. **Asümptomaatiliselt paralleelsed sirgjooned** (või piirparalleelsed sirgjooned) on sirgjooned, mis lähenevad üksteisele lõpmatult lähedale, kuid ei saa kunagi ristuda, kohtudes piiripunktis lõpmatuses. **Ultraparalleelsed sirgjooned** on kaks sirget, mis ei lõika üksteist ja ei ole asümptootiliselt paralleelsed.

Eukleidilises geomeetrias on meile tuttav kahe punkti vahelise kauguse mõiste, mis on määratletud neid ühendava sirge pikkusega. Kui me aga astume hüperboolse geomeetria valdkonda, muutub see põhimõiste oluliselt. Siin arvutatakse vahemaad raamistikus, mis arvestab hüperboolse ruumi omadusi, mis esitavad väljakutse meie intuitsioonile.

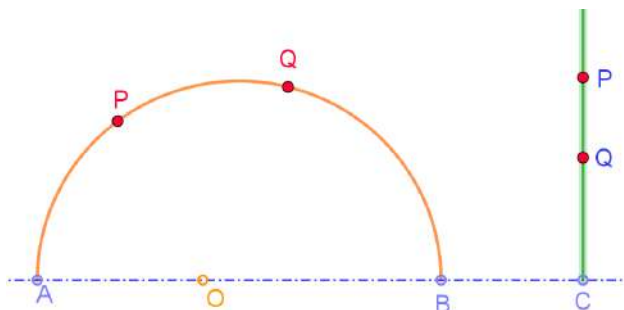


Hüperbooliline tasand pakub rikkalikku struktuuri, milles kaugus peab olema kooskõlas selle postulaatidega. Selles keskkonnas, nagu me juba mainisime, vt tabel 3, ei tundu "sirge joon" alati sirge ja "traditsioonilised mõõtmisvalemid" ei sisalda hüperboolse ruumi sisemist kõverust.

Hüperboolse kauguse kasutuselevõtt võimaldab meil uurida uusi geomeetrisi seoseid ja intrigeerivaid tulemusi, mis erinevad eukleidilises geomeetrias teadaolevatest tulemustest.

Määratlus 9.1. Hüperboolne kaugus d_H , hüperboolsete punktide P ja Q vahel on antud järgmiselt,

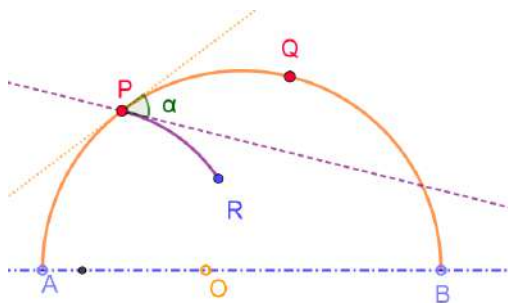
$$d_H(P, Q) = \begin{cases} \left| \ln \frac{\overline{PA} \overline{PB}}{\overline{QA} \overline{QB}} \right| & \text{if } P, Q \in_r L_c \\ \left| \ln \frac{\overline{PC}}{\overline{QC}} \right| & \text{if } P, Q \in_a L \end{cases}$$



Joonis 9.4.

kus \overline{PA} tähistab eukleidilist vahemaad P ja A ning \ln tähistab loomulikku logaritmi.

Punktide P ja Q ning P ja R vaheliste hüperboolsete segmentide tekitatud nurk on nende segmentide puutujaid ühendav nurk.



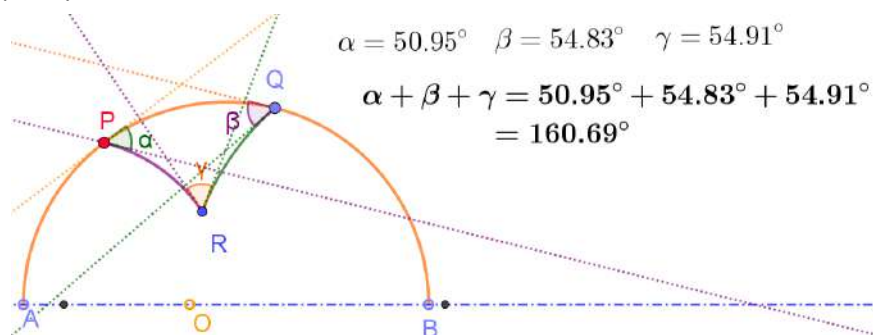
Joonis 9.5.

Nagu eespool mainitud, on ülemise pooltasandi mudeli suur eelis selle konformsus. Hüperboolse nurga mõõt on täpselt kahe kõveruse poolt moodustatud nurga eukleidiline nurgamõõt.

Eukleidilises geomeetrias on kolmnurga sisenurkade summa alati 180° , seega on defekt alati null, kuid hüperboolilises geomeetrias see nii ei ole.



Teoreem 9.2. Hüperboolilises geomeetrias on iga kolmnurga sisekõrguste summa alati väiksem kui π radiaani (180°).



Joonis 9.6.

Määratlus 9.3. Hüperboolses geomeetrias nimetatakse **asümptootiliseks kolmnurgaks** kolmnurka, mille üks või mitu tippu asub piiril lõpmatuses. Kui kolmnurgal on lõpmatuses üks, kaks või kolm tippu, nimetatakse seda vastavalt **ühekordselt asümptootiliseks**, **kahekordselt asümptootiliseks** või **kolmekordselt asümptootiliseks** kolmnurgaks.

Teoreem 9.3. Olgu $[ABC]$ kolmnurk \mathbb{H} , mille nurgamõõtmed on α, β ja γ . Siis on $[ABC]$ pindala $|[ABC]| = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$.

Määratlus 9.4. Kolmnurga **defekt** on defineeritud kui 180° ja kolmnurga sisenurkade summa vahe.

Saccheri-nelinurk on eriline nelinurk, mida kasutatakse nii eukleidilise kui ka mitte-eukleidilise geomeetria omaduste uurimiseks. See on nime saanud Itaalia matemaatiku Giovanni Girolamo Saccheri järgi, kes uuris neid kujundeid põhjalikult oma püüdlustes tõestada Eukleidese paralleelipostulaati.

Määratlus 9.5. Saccheri-nelinurk on neljakandiline joonis (nelinurk), mille kaks vastandlikku külge (mida nimetatakse jalgadeks) on võrdse pikkusega ja risti kolmanda küljega (mida nimetatakse aluseks). Neljandat külge nimetatakse tipuks ja selle pikkus ei ole üldjuhul võrdne alusega.

Teoreem 9.4. Võrreldes eukleidilise ja hüperboolse geomeetria käitumist võime järeldada, et:



	<i>Eukleidiline</i>	<i>Hüperbooliline</i>
<i>Kaks erinevat joont lõikuvad</i>	<i>maksimaalselt üks punkt</i>	<i>maksimaalselt üks punkt</i>
<i>Arvestades joont m ja punkti P on olemas</i>	<i>täpselt üks</i>	<i>vähemalt</i>
<i>Mitte ristuvad jooned</i>	<i>on võrdselt kaugel</i>	<i>ei ole kunagi võrdselt kaugel</i>
<i>Tippkohtumise nurgad on</i>		
<i>Saccheri nelinurkne on</i>	<i>õigus</i>	<i>äge</i>
<i>Kaks eraldiseisvat joont, mis on risti</i>		
<i>samale reale on</i>	<i>paralleelselt</i>	<i>ultraparalleelne</i>
<i>Kolmnurga nurga summa on</i>	<i>võrdne 180°</i>	<i>vähem kui 180°</i>
<i>Kolmnurga pindala on</i>	<i>sõltumata selle nurga summast</i>	<i>proportsionaalne defektiga</i>
<i>Kaks kongruentset kolmnurka vastavad nurgad on</i>	<i>sarnane</i>	<i>kongruentne</i>

Tabel 9.4: Võrdlustulemused - Kohandatud tabelist 2.1, [J. C] lk 71.

Järgnevas tabelis esitame võrdluse, mis on kohandatud [Judith Cedbergis] esitatud tabelist, eukleidilise geomeetria ja hüperboolse geomeetria vahel.

5. Rakendused igapäevaelus

Hüperboolilisel geomeetrial on üllatavalt palju rakendusi igapäevaelus, eriti valdkondades, mis nõuavad keeruliste või kumerate ruumide modelleerimist.

Internetti ja muid võrke (nt sotsiaalvõrgustikke) saab modelleerida hüperboolse geomeetria abil, kus vahemaad aitavad mõista ühenduvust ja andmete marsruutimise tõhusust, vt [Boguná et al.]. Süsteemid, mis arvestavad Maa kõverust nagu GPS, kasutavad hüperboolse geomeetria põhimõtteid, et parandada täpsust, eriti kaugnavigatsioonis suurtes piirkondades, [Jekeli]. Rakuvõrke hõlmavates projektides pakub hüperboolne geomeetria võimsat raamistikku võrgu omaduste tõlgendamiseks ja optimeerimiseks, alates vastupidavusest kuni navigeeritavuseni, pakkudes nii teoreetilist kui ka praktilist väärtust keeruliste süsteemide mõistmisel ja haldamisel [Faqeeh et al].

Hüperbooliline geomeetria esineb teatavate arhitektuursete ehitiste ja kunstiteoste kujundamisel. Nagu on märgitud [Gawell], "hüperboolse geomeetria kasutamist arhitektuuris võib jälgida 20. sajandi silmapaistvate inseneride, disainerite ja arhitektide, sealhulgas P. L. Nervi,

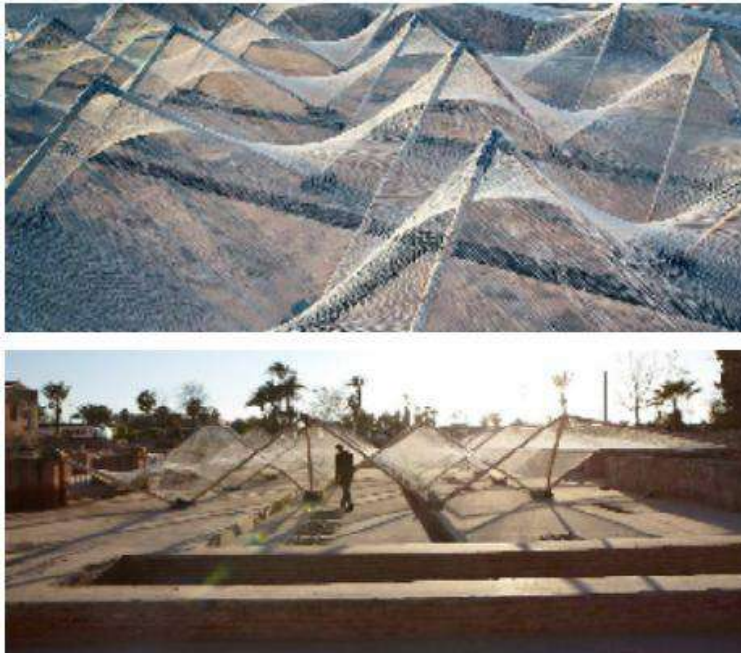


Co-funded by
the European Union



M. Nowicki, E. Saarinen, O. Niemeyer, F. Candela, E. Torroja, tööde kaudu. Eriti huvitav on inseneride töö, mis näitab nende otsinguid optimaalsete konstruktsioonivormide leidmiseks hüperboolse geomeetria abil".

Marrakechis toimunud Hyperbolic Embroidery Project (Loom Hyperbolic, 2012) oli inspireeritud Maroko traditsioonilisest käsitööst, eriti puuvillakudumise kunstist stabiilsel puuraamil [Dumitrascu].



Joonis 9.7.

Virtuaalreaalsuses (VR) ja mängudes avab hüperboolne geomeetria uusi loomingulisi võimalusi, võimaldades arendajatel kujundada immerstiivseid, mitte-eukleidilisi ruume, mis trotsivad tavapäraseid reegleid, suurendades seotust ja uurimist. Meditsiinaldkonnas aitab hüperboolne geomeetria oluliselt kaasa keeruliste pildiandmete, näiteks magnetresonantstomograafia ja kompuutertomograafia tõlgendamisele. Kaardistades hüperboolselt selliseid struktuure nagu aju väändunud pind, saavad meditsiinitöötajad täpsema ülevaate keerulistest anatoomilistest omadustest, parandades diagnostikat ja nende piirkondade seisundite analüüsi. Hüperboolsed mudelid aitavad optimeerida liiklusvoolu ja linnaplaneerimist, simuleerides ja analüüsides täpselt liikumismustreid suurtel, tihedalt asustatud aladel. See aitab linnaplaneerijatel teha teadlikke otsuseid, et suurendada teedevõrkude ja jalakäijate süsteemide tõhusust laialivalguvas linnakeskkonnas.

Arvutinägemises parandab hüperboolne geomeetria pildituvastust, võimaldades algoritmidel tõlgendada ja analüüsida kumerat kuju ja mitte-eukleidilisi ruumilisi seoseid, mis on autonoomsete süsteemide ja objektide tuvastamise rakenduste jaoks ülioluline.



6. Viited

- [1] Bonola, R. (1955). *Mitte-eukleidiline geomeetria: Kriitiline ja ajalooline uurimus selle arengust*. Courier Corporation.
- [2] Boguná, M., Papadopoulos, F. ja Krioukov, D. Interneti säilitamine hüperboolse kaardistamise abil. *Nat Commun* 1, 62 (2010).
<https://doi.org/10.1038/ncomms1063>.
- [3] Buda, John (2017). *Mitte-eukleidilise geomeetria integreerimine keskkooli*. [Honors Thesis. 173. Loyola Marymount University]
<https://digitalcommons.lmu.edu/honors-thesis/173>
- [4] Coxeter, H. S. M. (1965). *Mitte-eukleidiline geomeetria*. In *University of Toronto Press eBooks*
<https://doi.org/10.3138/9781442653207>
- [5] Coxeter, H. S. M. (1977). Gauss kui geomeeter. *Historia Mathematica*, 4(4), 379-396.
- [6] Dumitrascu, A., Razvan, N. ja Corduban, C. (2012). Hüperboolse geomeetriaga ökoloogilised struktuurid avalikus ruumis. *Bulletin of University of Agricultural Sciences and Veterinary Medicine Cluj-Napoca. Agriculture*, 69(2).
- [7] Faqeeh, A., Osat, S. ja Radicchi, F. (2018). Characterizing the Analogy Between Hyperbolic Embedding and Community Structure of Complex Networks, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 21(6), American Physical Society.
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.121.098301>.
- [8] Gawell, E. (2013). *Mitte-eukleidiline geomeetria kaasaegsete arhitektuurivormide modelleerimisel*. *Journal Biuletyn of Polish Society for Geometry and Engineering Graphics*, 24, 35-43.
- [9] Gray, J. J. (2004). Eukleidiline ja mitte-eukleidiline geomeetria. *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences: Volume Two*, 877.
- [10] Jekeli, C. (2023). Inertsiaalsed navigatsioonisüsteemid koos geodeetiliste rakendustega. Walter de Gruyter GmbH ja Co KG.
- [11] Krantz, S.G., Parks, H.R. (2014). Eukleidiline ja mitte-eukleidiline geomeetria. In: *A Mathematical Odyssey*. Springer, Boston, MA
https://doi.org/10.1007/978-1-4614-8939-9_6
- [12] Sukestiyarno, Y. L., Nugroho, K. U. Z., Sugiman, S. ja Waluya, B. (2023). Mitte-eukleidilise geomeetria õppimise trajektoor läbi etnomatemaatika õppimise lähenemisviiside, et parandada ruumilist võimekust. *Eurasia Journal of Mathematics Science and Technology Education*, 19(6).
<https://doi.org/10.29333/ejmste/13269>



Co-funded by
the European Union



10. TEEMA: Mõõtmised ja mõõtühikud astronoomias

1. Teema valiku põhjendus

Järgmised aspektid muudavad teema väärtuslikuks ja atraktiivseks täienduseks bakalaureuseõppele, andes üliõpilastele praktilisi teadmisi, interdistsiplinaarseid oskusi ja sügavamad arusaamist nii ajaloolistest kui ka kaasaegsetest teaduslikest meetoditest.

- **Interdistsiplinaarne õpe**

See teema ühendab geomeetria, astronoomia ja tehnoloogia, pakkudes õpilastele praktilist arusaamist sellest, kuidas matemaatilisi mõisteid rakendatakse reaalse nähtuste suhtes. See katab lõhe teoreetilise matemaatika ja astronoomia praktiliste rakenduste vahel, mis on väärtuslik õpilaste jaoks, kes soovivad teha karjääri STEM-valdkondades.

- **Asjakohasus kaasaegsete tehnoloogiate suhtes**

Tänu tehnoloogia arengule, eriti virtuaalreaalsuse (VR) valdkonnas, saavad õpilased kokku puutuda tipptasemel vahenditega. VR-prillide kasutamine pakub kaasahaaravat õpikogemust, aidates õpilastel visualiseerida ja suhelda astronoomiliste nähtustega, mis on muidu abstraktsed või mida on raske vahetult vaadelda. See valmistab õpilasi ette kaasaegseks andmete visualiseerimiseks ja tehnoloogilisteks vahenditeks, mida kasutatakse laialdaselt teadusuuringutes ja tööstuses.

- **Ajalooline ja praktiline tähtsus**

Geomeetria ajaloolise rolli mõistmine astronoomias aitab õpilastel hinnata teadusliku mõtlemise ja meetodite arengut. Samuti annab see kindla aluse kaasaegsetele astronoomilistele mõõtmistele, näiteks taevakehade vahemaade arvutamisele ja planeetide liikumise mõistmisele, mis põhinevad endiselt geomeetrilistel põhimõtetel.

- **Oskuste arendamine**

Kursus aitab õpilastel arendada probleemide lahendamise ja analüüsioskust, rakendades geomeetrilisi meetodeid astronoomiliste probleemide lahendamiseks. Need oskused on ülekantavad erinevatesse valdkondadesse, nagu füüsika, inseneriteadus ja andmeteadus. Lisaks parandab VR-vahendite kasutamine digitaalset kirjaoskust ja ruumilist mõtlemist, mis on tänapäeva tööturul olulised pädevused.

- **Kutse uudishimu ja uurimise üleskutse**

Astronoomia äratab loomulikult uudishimu, mis muudab teema õpilaste jaoks huvipakkuvaks. Kombineerides seda geomeetria ja VR-ga, saavad õpilased uurida käegakatsutavalt ja



Co-funded by
the European Union



interaktiivselt selliseid suuri mõisteid nagu universumi suurus, planeetide liikumine ja taevasündmused. See suurendab kaasatust ja motivatsiooni, edendades sügavat huvi nii matemaatika kui ka loodusteaduste vastu.

2. Ajalooline taust

Muistsed tsivilisatsioonid ja varajane geomeetria astronoomias. Babüloomlased ja egiptlased: Varajased tsivilisatsioonid, nagu babüloomlased ja egiptlased, andsid astronoomiale aluse. Nad kasutasid taevakehade jälgimiseks lihtsaid geomeetrilisi meetodeid, mis aitasid neil ennustada eklipseid, pööripäevad ja pööripäevad, mis olid olulised põllumajanduse ja religioosete rituaalide jaoks.

Kreeka astronoomia. Kreeklased aitasid kaasa geomeetria kasutamise edendamisele astronoomilistel eesmärkidel. Miletose Thales ja Pythagoras panid aluse ning Hipparchos rakendas geomeetrilisi põhimõtteid, et luua esimesed taevakehade liikumise mudelid.

Ptolemaiose Almagest. Ptolemaios töötas 2. sajandil pKr välja keerulise geotsentrilise universumi mudeli, milles kasutas planeetide liikumise selgitamiseks keerulisi geomeetrilisi konstruktsioone, sealhulgas ringe ja epitsükleid.

Islami kuldajastu. Islami astronoomid: Islami kuldajastu ajal täiustasid sellised õpetlased nagu Al-Battani ja Ibn al-Haytham geomeetria kasutamist astronoomiliste arvutuste parandamiseks. Nad säilitasid kreeka teoseid, parandasid vaatlustehnikaid ja kasutasid geomeetrilisi mudeleid, et ennustada taevaseid sündmusi suurema täpsusega. Renessanss ja Koperniku revolutsioon Nikolaus Kopernik: Kopernik vaidlustas 16. sajandil geotsentrilise mudeli oma heliotsentrilise teooriaga, kasutades planeetide tiirlemise kirjeldamiseks ümber Päikese geomeetriat.

Johannes Kepler. Kepleri planeetide liikumise seadused, mis on tuletatud geomeetrilise loogika abil, muutsid meie arusaama planeedi orbiitidest, asendades ringikujulised rajad ellipsidega.

Galileo Galilei. Galileo kasutas teleskoopi astronoomilisteks vaatlusteks, mis tugevdas veelgi geomeetria rolli taevaste nähtuste tõlgendamisel.

Kaasaegsed arengud. Isaac Newton: Newtoni liikumisseadused ja universaalne gravitatsioon koos geomeetria ja arvutuste kasutamisega andsid tervikliku matemaatilise raamistiku taevamehaanika mõistmiseks.

20. sajand ja üldine relatiivsusteooria. Einsteini üldrelatiivsusteooria kasutas arenenud geomeetriat (mitte-eukleidilist), et kirjeldada ruumi aja kumerust massiliste objektide ümber, mis muutis põhjalikult meie arusaama gravitatsioonist ja astronoomilistest nähtustest.

See ajalooline areng toob esile, kuidas geomeetria on olnud kriitiline vahend astronoomiliste mõõtmismeetodite arendamisel, luues eeldused kaasaegsetele rakendustele, nagu virtuaalreaalsusel põhinevad simulatsioonid.



3. Õpitulemused

See moodul ei keskendu mitte ainult õpilaste teadmiste suurendamisele geomeetria ja astronoomia alal, vaid selle eesmärk on ka arendada mitmesuguseid - tehnilisi, analüütilisi ja interdistsiplinaarseid - oskusi, mis tulevad neile kasuks nende akadeemilises ja ametialases karjääris.

1. Geomeetriliste põhimõtete mõistmine astronoomias: Õpilased mõistavad ja rakendavad astronoomilistes mõõtmistes kasutatavaid geomeetrilisi põhimõisteid, nagu nurga kaugus, parallaks, triangulatsioon ja sfääriline geomeetria. Need põhimõtted on aluseks kauguste, nurkade ja taevakehade asendite mõõtmisele, mis on nii ajaloolise kui ka kaasaegse astronoomia jaoks kriitilise tähtsusega.
2. Geomeetria rakendamine reaalmaailma probleemidele: Õpilasi motiveeritakse kasutama geomeetria praktiliste astronoomiaprobleemide lahendamiseks, näiteks taevakehade vahemaade arvutamiseks, planeetide suuruse määramiseks ja planeetide liikumise prognoosimiseks. See tulemus tagab, et õpilased suudavad võtta teoreetilisi geomeetrilisi põhimõtteid ja rakendada neid konkreetsetes astronoomilistes kontekstides, edendades probleemide lahendamise oskust.
3. Ajalooliste ja kaasaegsete tehnikate tundmine: Õpilased omandavad teadmisi nii ajaloolistest meetoditest (nt Eratosthenese Maa mõõtmine) kui ka kaasaegsetest tehnoloogiatest (nt satelliitide abil tehtavad parallaksimõõtmised) astronoomilistes mõõtmistes. Mõõtmismeetodite arengu mõistmine näitab õpilastele teadusliku mõtlemise arengut ja parandab nende arusaamist valdkonna hetkeseisust.
4. Tehnoloogiliste vahendite kasutamine visualiseerimiseks: Õpilased oskavad tõhusalt kasutada virtuaalreaalsuse (VR) tehnoloogiat ja muid digitaalseid vahendeid astronoomiliste mõõtmiste geomeetriliste kujutiste visualiseerimiseks ja nendega suhtlemiseks. See annab õpilastele väärtuslikud tehnilised oskused töötamisel kõrgtehnoloogiatega, mis muutuvad üha olulisemaks teaduslikes uuringutes ja hariduses.
5. Ruumilise ja analüütilise mõtlemise parandamine: Õpilased parandavad oma ruumilist mõtlemist ja analüütilist mõtlemist, töötades universumi kolmemõõtmeliste mudelitega ja lahendades geomeetrilisi probleeme astronoomias. Ruumilise ja analüütilise mõtlemise oskus on paljudes STEM-distsipliinides ülioluline ning neid oskusi teravdatakse geomeetriapõhiste astronoomiliste mõõtmiste kaudu.
6. Interdistsiplinaarsete teadmiste arendamine: Õpilased mõistavad, kuidas geomeetria on seotud teiste valdkondadega, näiteks füüsika, astronoomia ja inseneriteadus, ning suudavad integreerida mitme valdkonna teadmisi, et lahendada keerulisi probleeme. See soodustab interdistsiplinaarset lähenemist õppimisele, näidates õpilastele, kuidas matemaatilisi mõisteid saab rakendada erinevates teadusvaldkondades.
7. Kriitiline mõtlemine ja teaduslik uurimine: Õpilased arendavad kriitilise mõtlemise oskust, analüüsides astronoomiliste mõõtmiste andmeid ja seades kahtluse alla erinevate



astronoomias kasutatavate geomeetriliste mudelite eeldused ja piirangud. Õpilaste julgustamine kriitiliselt mõtlema kasutatud meetodite üle soodustab sügavamalt teaduslikku uurimist ja aitab neil läheneda probleemidele rangemast vaatenurgast.

8. Teadusliku arengu ajalooline hindamine: Õpilased mõistavad matemaatikute ja astronoomide ajaloolist panust geomeetria valdkonda ja selle rolli universumi mõistmise edendamisel.

Põhjendus: See soodustab teadusliku teadmise arengu ajaloolise konteksti laiemat hindamist, rõhutades avastuste pidevat olemust.

9. Abstraktsete mõistete parem käsitlemine: VR-tehnoloogia ja geomeetriliste vahendite abil saavad õpilased süvendada abstraktseid astronoomilisi mõisteid ja parandada oma võimet visualiseerida keerulisi süsteeme. Interaktiivsed vahendid muudavad abstraktsed mõisted kättesaadavamaks ja köitvamaks, parandades õpilaste võimet säilitada ja mõista rasket materjali.

4. Teoreetilised alused

- Eukleidiline geomeetria: Põhimõisted.

Eukleidese geomeetria põhineb kreeka matemaatiku Eukleidese postulaatidel, mis on esitatud tema teoses "Elemendid". See uurib punktide, sirgete, nurkade, pindade ja tahkete kehade omadusi ja seoseid kahe- või kolmemõõtmelises ruumis.

Eukleidilise geomeetria põhimõisted on järgmised:

1. Punktid ja jooned:

Klassikalises eukleidilises geomeetrias on punkt primitiivne mõiste, mis on määratletud kui "see, millel ei ole osa". Punktil ei ole mõõtmelisi, vaid ainult asukoht. Joon: Eukleidese järgi on joon kahe punkti vaheline intervall ja ta väitis, et seda saab lõputult pikendada mõlemas suunas.

2. Kahe punkti vaheline kaugus: Kahe punkti, $A(x_A, y_A)$ ja $B(x_B, y_B)$, vaheline kaugus tasapinnal saab arvutada kauguse valemi abil:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

Kolmemõõtmelises ruumis arvutatakse $A(x_A, y_A, z_A)$ ja $B(x_B, y_B, z_B)$ vaheline kaugus järgmiselt

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}.$$

3. Nurgad:

Nurk moodustub kahest kiirtest, millel on ühine otspunkt. Kolmnurga nurkade summa on



alati 180° .

. Kõige tavalisemad nurgad on täisnurk (90 kraadi), teravnurk (vähem kui 90 kraadi) ja tuim nurk (rohkem kui 90 kraadi).

Kolmnurgad ja Pythagorase teoreem: Pythagorase teoreem väidab, et täisnurkse kolmnurga puhul, mille jalad on a ja b ning hüpotenuus c , kehtib Pythagorase teoreem: $a^2 + b^2 = c^2$.

See seos on vahemaade arvutamisel ja täisnurksete kolmnurkadega töötamisel väga oluline.

4. Perimeter ja pindala:

Polügooni ümbermõõt P on selle külgede pikkuste summa. Ristküliku puhul, mille pikkus on l ja laius w :

$$P = 2l + 2w.$$

Polügooni pindala on selle ümbritsetud ruumi suurus. Ristküliku puhul:

$$A = l \times w.$$

Kolmnurga puhul, mille alus on b ja kõrgus h :

$$A = \frac{1}{2}b \times h.$$

Ringid: Ring on kõigi punktide kogum tasandis, mis on võrdse kaugusega antud punktist (keskpunktist).

Ringi raadiusegar ümbermõõt C on:

$$C = 2\pi r.$$

Ringi pindala on:

$$A = \pi r^2$$

- Eukleidilise geomeetria peamised põhimõtted

Eukleidilise geomeetria põhiprintsiibideks on järgmised postulaadid:

1. **Esimene postulaat:** Kaks mis tahes punkti ühendab sirgjooneline lõik.
2. **Teine postulaat:** Lõplik sirgjoon on pikendatav lõpmatult.
3. **Kolmas postulaat:** Ringi saab joonistada mis tahes keskpunktiga ja raadiusega.
4. **Neljäs postulaat:** Kõik täisnurgad on kongruentsed.



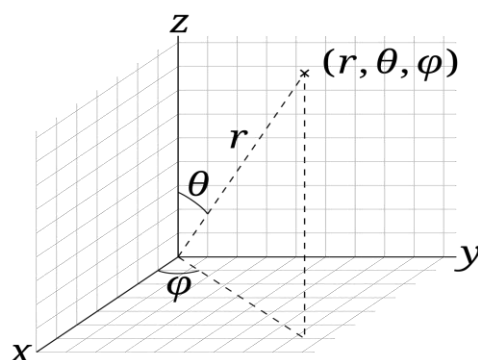
5. **Paralleelpostulaat:** Kui joonistatakse kaks joont, mis lõikavad kolmandat nii, et ühe külje sisemiste nurkade summa on väiksem kui kaks täisnurka, siis peavad need kaks joont paratamatult lõikama teineteist sellel küljel, kui neid piisavalt kaugele pikendada.

Eukleidiline geomeetria on olnud ajalooliselt oluline astronoomia valdkonnas, eriti lihtsate astronoomiliste mõõtmiste tegemiseks. Kaks põhilist rakendust on kauguste arvutamine parallaxi abil ja taevakehade kõrguse määramine horisondist kõrgemal.

- **Sfääriline geomeetria**

Kirjeldus: Sfääriline geomeetria käsitleb punktide, joonte ja nurkade omadusi ja seoseid kera pinnal, mis on oluline taevasfääri ja Maa kumeruse modelleerimiseks. Erinevalt eukleidilisest geomeetriast on lühim tee kahe sfääri punkti vahel suuringi kaar, mitte sirgjoon.

Matemaatikas on sfääriline koordinaatsüsteem kolmemõõtmelise ruumi koordinaatsüsteem, kus antud punkti asukoht ruumis on määratud kolme reaalarvuga: radiaalkaugus r piki punkti ja alguspunkti ühendavat radiaaljoont; polaarnurk θ radiaaljoone ja antud polaartelje vahel; ja asimuudinurk φ kui radiaaljoone pöördenurk ümber polaartelje. Kui raadius on fikseeritud, annavad need kolm koordinaati (r, θ, φ) , mida nimetatakse 3-tupliks, koordinaatsüsteemi sfääril, mida tavaliselt nimetatakse sfäärilisteks polaarkoordinaatideks. Tasandit, mis läbib alguspunkti ja on risti polaarteljega (kus polaarnurk on täisnurk), nimetatakse võrdlustasandiks (mõnikord ka põhitasandiks).



Joonis 10.1.

Sfäärilise koordinaatsüsteemi määratlemiseks tuleb määrata alguspunkt ruumis O ja kaks ortogonaalset suunda: nullpunkti ja asimuudi võrdlusuund. Need valikud määravad võrdlustasandi, mis tavaliselt määratletakse nii, et see sisaldab lähtepunkti ning x - ja y -telge, millest kumbki võib olla määratud asimuudi võrdlusuunaks. Võrdlustasand on risti (ortogonaalne) zeniidi suunaga ja tavaliselt on see määratud *horisontaalselt* zeniidi suuna *vertikaali* suhtes. Punkti P sfäärilised koordinaadid on siis määratletud järgmiselt:

- Raadius või radiaalkaugus on eukleidiline kaugus alguspunktist O kuni P



- Kalle (või polaarnurk) on nullpunkti viitesuuna ja sirglõigu $[OP]$ vaheline nurk. (Polaarnurgana võib kasutada kallutatuse asemel ka kõrgust.)
- Asimuut (või asimuudinurk) on asimuudi võrdlusuuna ja radiaaljoonislõigu $[OP]$ ortogonaalprojektsiooni vahel võrdlustasapinnal mõõdetud nurk.

Asimuudi märk määratakse kindlaks, määrates pöörlemise, mis on positiivses mõttes pöörlemine ümber zeniidi. See valik on suvaline ja kuulub koordinaatsüsteemi määratluse juurde. (Kui kalle on kas null või $180^\circ (= \pi \text{ radiaanid})$, on asimuut suvaline. Kui raadius on null, on nii asimuut kui ka kalle suvaline).

Kõrgus on võrdlustasandi xOy ja radiaaljoonte lõigu $[OP]$ vaheline nurk, kus positiivsed nurgad tähistatakse ülespoole, sentiidi suunas. Elevatsioon on $90^\circ = \frac{\pi}{2}$ radiaan miinus kalle. Seega, kui kalle on $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ radiaan, siis on kõrgus $30^\circ = \frac{\pi}{6}$ radiaan.

Lineaaralgebras nimetatakse sageli alguspunktist O punktini P kulgevat vektorit asukohavektoriks. P

Iga sfääriline koordinaatitriplet (või tupel) (r, θ, φ) määrab ühe punkti kolmemõõtmelises ruumis. Tagurpidi vaadatuna on igal üksikul punktil lõpmatult palju samaväärseid sfäärilisi koordinaate. See tähendab, et kasutaja võib lisada või lahutada nurgamõõtudele suvalise arvu täisnurki, ilma et ta muudaks nurki ise ja seega ilma punkti muutmata. Paljudes kontekstides on mugav kasutada negatiivseid radiaalkaugusi, milleks on kokkuleppeliselt $(-r, \theta, \varphi)$, mis on võrdväärne $(r, \theta + 180^\circ, \varphi)$ või $(r, 90^\circ - \theta, \varphi + 180^\circ)$ mis tahes r, θ , ja φ . Lisaks sellele on $(r, -\theta, \varphi)$ samaväärne $(r, \theta, \varphi + 180^\circ)$.

Kui on vaja määratleda iga punkti jaoks unikaalne sfääriliste koordinaatide kogum, peab kasutaja piirama iga koordinaadi vahemikku ehk intervalli. Tavaline valik on: radiaalkaugus: $r \geq 0$; polaarnurk: $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$, või $0 \text{ rad} \leq \theta \leq \pi \text{ rad}$, ja asimuut: $0^\circ \leq \varphi < 360^\circ$, või $0 \text{ rad} \leq \varphi < 2\pi \text{ rad}$

Kuid intervalli $[0^\circ, 360^\circ)$ asemel piirdub asimuut φ tavaliselt pooleldi avatud intervalliga $(-180^\circ, +180^\circ]$ või $(-\pi, +\pi]$ radiaani, mis on geograafilise pikkuse standardkonventsioon.

Polaarnurga θ puhul on kallakute vahemik (intervall) $[0^\circ, 180^\circ]$, mis on samaväärne kõrguse vahemikuga (intervall) $[-90^\circ, +90^\circ]$. Geograafias on laius merepinnast kõrgus merepinnast.

Isegi nende piirangute korral, kui polaarnurk (kalle) on 0° või 180° , kõrgus on -90° või $+90^\circ$, siis on asimuutnurk suvaline; ja kui $r = 0$, siis on nii asimuut- kui ka polaarnurk suvaline. Koordinaatide määratlemiseks unikaalsetena võib kasutaja kehtestada konventsiooni, et (nendel juhtudel) suvalised koordinaadid seatakse nulliks.

Nii nagu kahemõõtmeline kartesiaanlik koordinaatsüsteem on kasulik - sellel on lai rakenduste kogum - tasapinnal, on kahemõõtmeline sfääriline koordinaatsüsteem kasulik kera pinnal. Näiteks ühte sfääri, mida kirjeldatakse kartesiaanlikes koordinaatides võrrandiga $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$, koos mõne $c > 0$, saab sfäärilistes koordinaatides kirjeldada lihtsa



võrrandigar = c . (Selles süsteemis kohandatakse sfääri kui ühiksfääri, mille raadius on määratud ühikuks ja mida võib seejärel üldiselt ignoreerida).

See (ühiksfääri) lihtsustamine on kasulik ka selliste objektide nagu *pöörlemismatriitside* käsitlemisel. Sfäärilised koordinaadid on kasulikud ka selliste süsteemide analüüsimisel, millel on teatav sümmeetria punkti ümber, sealhulgas: ruumalaintegraalid kera sees; potentsiaalne energiaväli kontsentreeritud massi või laengu ümber; või globaalne ilmasimulatsioon planeedi atmosfääris.

Punkti sfäärilised koordinaadid ISO-konventsioonis (st füüsika jaoks: raadius r , kalle θ , asimuut φ) saab selle kartesiaankoordinaatidest (x, y, z) valemite abil:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \arccos \frac{z}{r} =$$

$$\begin{cases} \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} & \text{if } z > 0 \\ \pi + \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} & \text{if } z < 0 \\ +\frac{\pi}{2} & \text{if } z = 0 \text{ and } \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0 \\ \text{undefined} & \text{if } x = y = z = 0 \end{cases}$$

$$\varphi = \operatorname{sgn}(y) \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{if } x > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & \text{if } x < 0 \text{ and } y \geq 0 \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi & \text{if } x < 0 \text{ and } y < 0 \\ +\frac{\pi}{2} & \text{if } x < 0 \text{ and } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{if } x = 0 \text{ and } y < 0 \\ \text{undefined} & \text{if } x = 0 \text{ and } y = 0 \end{cases}$$

Seevastu kartesiaalseid koordinaate võib saada sfäärilistest koordinaatidest (raadius r , kaldenurk θ , asimuut φ), kus $r > 0$ $\theta \in [0, \pi]$ ja $\varphi \in [0, 2\pi)$ on järgmised.

$$x = r \sin \theta \cos \varphi,$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi,$$

$$z = r \cos \theta.$$



- Kauguse arvutamine

Sfäärilistes koordinaatides on kahe punkti (r, θ, φ) ja (r', θ', φ') vaheline kaugus:

$$D = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'(\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi') + \cos\theta\cos\theta')}$$

Taotlus: Seda kasutatakse tähtede vahelise nurkauguse määramiseks, planeetide liikumise modelleerimiseks ja selliste mõistete nagu deklinatsioon ja õige tõus, mõistmiseks, mis on olulised taevase navigatsiooni ja positsioneerimise jaoks.

- Parallax

Parallaks on objekti näiline nihkumine, kui seda vaadeldakse kahest erinevast vaatepunktist. Astronoomias kasutatakse seda lähedal asuvate taevakehade, näiteks tähtede, kauguse mõõtmiseks, vaadeldes neid kahest kohast Maal või Maa orbiidi eri aegadest. Parallaks on põhiline meetod lähedalasuvate tähtede ja planeetide kauguse mõõtmisel, kasutades lihtsaid geomeetrilisi seoseid Maa liikumise ja taevakehade näilise nihke vahel.

Oletame, et vaatleme tähte kahest erinevast asukohast Maa orbiidil (kuue kuu vahega) ja möödame nurga θ , mis on parallaksi nurk. Kasutades Eukleidese geomeetria aluspõhimõtteid, saame moodustada täisnurkse kolmnurga, kus:

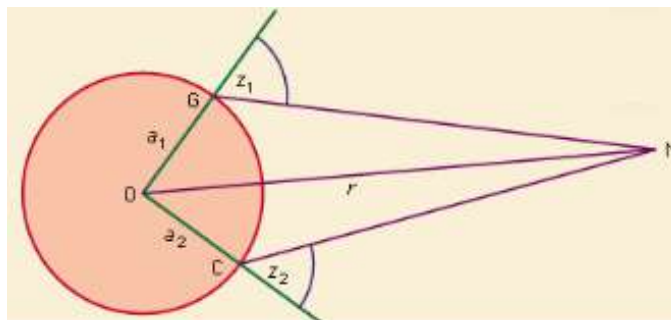
- D on Maa ja tähe vaheline kaugus,
- d on lähtejoon (kaugus kahe vaatluspunkti vahel, tavaliselt Maa tiirlemise läbimõõt ümber Päikese) ja
- θ on parallaksi nurk.

Väikeste nurkade puhul on parallakskauguse valem antud järgmiselt:

$$D \approx \frac{d}{2\tan(\theta)}$$

- Lunar Parallax

Esimene parallaks määrati Kuu, mis on kaugelt lähim taevakeha. Kreeka astronoom *Hipparchos* (150 eKr.) määras Kuu parallaksiks $58'$, mis oli umbes 59-kordne Maa ekvaatorraadius, võrreldes tänapäevase väärtusega $57'02.6''$, s.t. keskmine väärtus on 60,2 korda. Kuu parallaks määratakse otse kahest kohast, näiteks G, Greenwich, Inglismaa, ja C, Hea Lootuse neem, Lõuna-Aafrika, mis asuvad peaaegu samal meridiaanil, tehtud vaatluste põhjal. Täheldatakse kahte nurka, z_1 ja z_2 , ning muud andmed saadakse vaatluskohtade laiuskraadidest ja Maa teadaolevast suurusest ja kujust. Praktikas vaadeldakse ka Kuu lähedal asuvaid tähti, et kõrvaldada murdumis- ja mõõteriistade vead.



Joonis 10.2. Parallaksi mõõtmine punktide G ja C tehtud vaatlustega.

Maa ja Kuu vahelise kauguse mõõtmine radariga ja laseriga on andnud hiljutise Kuu parallaksi väärtuse. Radar- ja laserkauguste eeliseks on see, et need on otsene kauguse mõõtmine, kuigi kaugusi mõjutavad Kuu pinnatopograafia erinevused ja need eeldavad eeldusi Kuu raadiuse ja massikeskme kohta. Rahvusvaheline Astronoomialiit võttis 1964. aastal Kuu parallaksi väärtuseks $57'02.608''$, mis vastab keskmisele kaugusele 384 400 km (238 900 miili).

- Päikeseparallaks

Põhiline meetod, mida kasutatakse Päikese parallaksi määramiseks, on *trigomeetrilise parallaksi* määramine. Vastavalt gravitatsiooniseadusele on teada planeetide suhteline kaugus Päikesest ja pikkuse ühikuks võib võtta Päikese kauguse Maast. Iga planeedi kauguse või parallaksi mõõtmine määrab selle ühiku väärtuse. Mida väiksem on planeedi kaugus Maast, seda suuremad on mõõdetavad parallaktilised nihked ja vastavalt suureneb määratud parallaksi täpsus. Seetõttu on kõige soodsamad tingimused Maa lähedale lähenevate planeetide vaatlemisel opositsiooni ajal. Määramine võib põhineda kas samaaegsetel või peaaegu samaaegsetel vaatlustel Maa pinnal kahest erinevast kohast või pärast päikeseloojangut ja enne päikesetõusu samas kohas tehtud vaatlustel, kui Maa pöörlemisest tingitud vaatluskoha nihkumine annab mõõtmiste alusjoone.

Esimene suhteliselt täpne Päikese parallaksi määramine tehti 1672. aastal Marsi vaatluste põhjal Cayenne'is, Prantsuse Guajaanas ja Pariisis, millest saadi väärtus $9.5''$.

Päikeseparallaksi kindlakstegemiseks kasutatakse ka valguse kiirusest sõltuvaid meetodeid. Valguse kiiruse väärtus on määratud väga täpselt ja seda võib kasutada mitmel erineval viisil. Otsene meetod on vastupidine Taani astronoomi Ole Rømeri menetlusele valguse kiiruse avastamisel, st kasutada valguse võrrandit ehk aega, mis kulub valguse jõudmiseks Jupiteri erinevatel kaugustel, kuid suurt täpsust on sel viisil vaevalt võimalik saavutada. Teine meetod on aberratsioonikonstanti kasutamine, mis annab Maa kiiruse suhte tema orbiidil ja valguse kiiruse vahel. Kuna aberratsioon tekitab kõikide tähtede positsioonides iga-aastase amplituuditermine $20.496''$, on selle suurust määratud mitmel viisil. Greenwichis aastatel 1911-



1936 tehtud vaatlused andsid väärtuse $20.489'' \pm 0.003''$, mis viib Päikese parallaksi väärtusele $8.797'' \pm 0.013''$. See meetod ei ole vaba süstemaatilise vea kahtlusest.

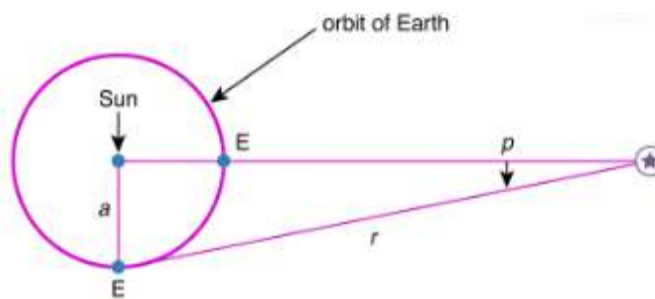
Maale lähenevate või Maast eemalduvate tähtede kiirused määratakse spektroskoopiliste vaatluste põhjal. Valides ajad, mil Maa orbiidi liikumine viib teda tähe suunas või sellest eemal, saavad astronoomid matemaatiliselt määrata Maa kiiruse tema orbiidil. Sel viisil leiti Hea Lootuse neeme vaatluste põhjal, et Päikese parallaks on $.8.802'' \pm 0.004''$

Maa ja Veenuse vahelise kauguse radariga mõõtmine on andnud parima võimaluse Päikese parallaksi määramiseks. Mõõtes radariimpulsi lennuaega Veenusele, on võimalik saada kahe planeedi vaheline kaugus, mis võimaldab määrata Maa ja Päikese vahelise ühikukauguse.

Astronoomilise ühiku praegune väärtus on 149 597 871 km (92 955 807 miili). Peamised piirangud radari kasutamisel astronoomilise ühiku mõõtmisel on sõltuvus planeedi orbiitide tundmisest, valguse kiiruse väärtuse määramatus ja võimalus, et elektromagnetilised mõjud Maa-Veenuse plasmas aeglustavad radariimpulssi.

- Tähtede parallaks

Tähed on liiga kaugel, et nende asukoha erinevus oleks kahest kohast Maa pinnal tajutav, kuid kuna Maa tiirleb Päikesest 149 600 000 km kaugusel, on tähed aasta jooksul näha väga erinevatest vaatepunktidest. Seda mõju nende positsioonidele nimetatakse aastaparallaksiks, mis on määratletud kui erinevus tähe positsioonis Maalt ja Päikeselt vaadatuna. Selle suurus ja suund varieerub sõltuvalt aastaajast ning selle maksimum on $\frac{a}{r}$, kus a on Maa orbiidi raadius ja r tähe kaugus. See suurus on väga väike ja ei saavuta kunagi $1/206,265$ radiaanides või $1''$ kuuekümnendmöödustikus.



Joonis 10.3. Tähtede parallaks

Saksa astronoom Friedrich Wilhelm Bessel mõõtis 1838. aastal esimesena tähtede parallaksit, kasutades selleks saksa füüsiku Joseph von Fraunhoferi konstrueeritud heliomeetrit. Valides 61 Cygni, mis on palja silmaga vaevu nähtav täht ja mille kiirus taevas on teatavasti suhteliselt suur, näitas Bessel 1838. aastal, et pärast kiiruse korrigeerimist liikus täht ilmselt igal aastal ellipsis.



Co-funded by
the European Union



See edasi-tagasi liikumine oli aastane parallaks. Astronoomid olid juba sajandeid teadnud, et selline efekt peab toimuma, kuid Bessel oli esimene, kes seda täpselt näitas. Besseli parallaks umbes ühe kolmandiku kaaresekundi ulatuses vastab umbes 10,3 valgusaasta kaugusele Maast kuni 61 Cygni, kuigi Bessel ei väljendanud seda nii. (Lähim teadaolev täht on 4,3 valgusaasta kaugusel asuv Alpha Centauri, mille parallaks on umbes $0.75''$.)

- **Kepleri planeetide liikumise seadused**

Astronoomias kirjeldavad planeetide tiirlemist ümber Päikese Johannes Kepleri poolt 1609. aastal ilma kolmanda seaduseta ja 1619. aastal täielikult avaldatud Kepleri seadused planeetide tiirlemist ümber Päikese. Need seadused asendasid Nikolaus Koperniku heliotsentrilise teooria ringikujulised orbiidid ja epitsüklid elliptiliste orbiitidega ning selgitasid, kuidas planeedi kiirused muutuvad. Kepleri kolm seadust kirjeldavad planeetide liikumist ümber Päikese, kasutades geomeetrisi põhimõtteid.

Seadused selgitavad, kuidas planeedid läbivad elliptilisi orbiite, kuidas nad läbivad võrdseid alasid võrdse aja jooksul ning kuidas on seotud planeedi orbiidiperiood ja tema kaugus Päikesest. Need kolm seadust sätestavad, et:

1. **Kepleri esimene seadus: ellipsiseaduse seadus.** Iga planeedi orbiit ümber Päikese on ellips. Päikese keskpunkt asub alati orbiidi ellipsi ühes fookuses. Päike asub ühes fookuses. Planeet järgib oma orbiidil ellipsi, mis tähendab, et planeedi ja Päikese vaheline kaugus muutub pidevalt, kui planeet liigub ümber oma orbiidi]. Kepleri esimene seadus: iga planeedi orbiit ümber Päikese on ellips. Päikese keskpunkt asub alati orbiidi ellipsi ühes fookuses. Päike on ühes fookuses. Planeet järgib oma orbiidil ellipsi, mis tähendab, et planeedi ja Päikese vaheline kaugus muutub pidevalt, kui planeet liigub ümber oma orbiidi.
2. **Kepleri teine seadus: võrdsete pindalade seadus.** Planeedi ja Päikese vaheline kujuteldav joon läbib planeedi tiirlemise ajal võrdsete ajavahemike jooksul võrdseid pindalaid. Põhimõtteliselt tähendab see, et planeedid ei liigu piki oma orbiiti konstantse kiirusega. Pigem varieerub nende kiirus nii, et Päikese ja planeedi keskpunkte ühendav joon pühib võrdsete aegade jooksul võrdseid pindalaosasid. Planeedi lähimat lähenemispunkti Päikesele nimetatakse periheeliks. Suurima kauguse punkt on aphelion, seega Kepleri teise seaduse kohaselt liigub planeet kõige kiiremini, kui ta on perihelionis, ja kõige aeglasemalt aphelionis.
3. **Kepleri kolmas seadus: harmooniline seadus.** Planeetide orbitaalperioodide ruudud on otseselt proportsionaalsed nende orbiitide poolsuurtelje kuubikutega. Kepleri kolmas seadus tähendab, et planeedi tiirlemisaeg ümber Päikese suureneb kiiresti koos tema orbiidi raadiusega. Nii leiame, et Merkuuril, kõige sisemisel planeedil, kulub Päikese ümber tiirlemiseks vaid 88 päeva. Maal kulub selleks 365 päeva, Saturnil aga 10 759 päeva. Kuigi Kepler ei teadnud gravitatsioonist, kui ta oma kolm seadust välja mõtles, aitasid need kaasa Isaac Newtoni universaalse gravitatsiooniteooria tuletamisele, mis seletab Kepleri



Co-funded by
the European Union



kolmanda seaduse taga peituvat tundmatut jõudu. Kepler ja tema teooriad olid otsustava tähtsusega meie päikesesüsteemi dünaamika paremaks mõistmiseks ja hüppelauaks uuematele teooriatele, mis lähendavad täpsemalt meie planeetide orbiite.

Planeetide elliptiliste orbiitide kohta tehti arvutused Marsi orbiidi kohta. Sellest järeldas Kepler, et ka teistel Päikesesüsteemi kehadel, sealhulgas Päikesest kaugemal asuvatel kehadel, on elliptilised orbiidid. Teine seadus sätestab, et kui planeet on Päikesele lähemal, liigub ta kiiremini. Kolmas seadus väljendab, et mida kaugemal on planeet Päikesest, seda pikem on tema tiirlemisperiood.

Isaac Newton näitas 1687. aastal, et Kepleri omadest liikumisseadustest ja universaalse gravitatsiooni seadusest tulenevalt kehtivad Päikesesüsteemis sellised seosed nagu Kepleri omad.

Kepleri seaduste kasulikkus laieneb nii looduslike kui ka kunstlike satelliitide liikumisele, samuti tähesüsteemidele ja ekstrapolaarsetele planeetidele. Kepleri poolt sõnastatud seadused ei võta muidugi arvesse erinevate planeetide gravitatsioonilisi vastastikmõjusid (kui häirivaid mõjusid). Enam kui kahe keha liikumise täpne prognoosimine nende vastastikuste tõmbetulemuste mõjul on üsna keeruline; kolme keha probleemi analüütilised lahendused on võimatu, välja arvatud mõnedel erijuhtudel. Võib märkida, et Kepleri seadused ei kehti mitte ainult gravitatsioonijõudude, vaid ka kõigi teiste pöördvõrdeliste jõudude kohta ning, kui võtta arvesse relativistlikke ja kvantmõjusid, ka aatomi elektromagnetiliste jõudude kohta.

Taotlus: Need seadused aitavad õpilastel mõista, kuidas geomeetriat kasutatakse planeetide orbiitide ennustamiseks, nende asukoha arvutamiseks igal ajal ja Päikesesüsteemi geomeetrilise ülesehituse mõistmiseks.

- **Taevasfääri mudel**

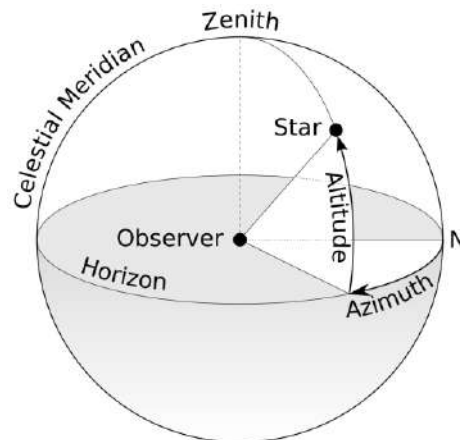
Vaadates taevasse ja vaadates Päikest, Kuud ja tähti, on lihtne arvata, et me oleme universumi keskpunktis, et kõik keerleb meie väikese maailma ümber. Tõepoolest, nii arvas enamik inimesi läbi inimkonna ajaloo, et asjad on nii. Nad pidasid Maad kõigi asjade keskuseks. Kogu loodu keskmeks olemine tegi Maast erilise koha. Päike, Kuu ja viis teadaolevat planeeti pöörlevad ümber Maa. Kusagil Saturni taga oli taevas või taevas, kus asusid tähed. Mõned inimesed nägid taevalaotust kui sõna otseses mõttes kupplit või kera, kus tähed rippusid. Nad pidasid seda taevasfääri reaalseks, füüsiliseks struktuuriks ja kõik tähed olid Maast enam-vähem sama kaugel.

Loomulikult teame tänapäeval, et füüsilist taevasfääri ei ole olemas ja et tähed on meist palju kaugemal, kui vanasti arvati. Tegelikult ei ole nad kõik meist võrdselt kaugel. Tähed, mis tunduvad taevas üksteisele lähedal olevat, võivad tegelikult olla sadade või tuhandete valgusaastate kaugusel, kui me vaatleme neid kolmemõõtmeliselt. Nad tunduvad olevat lähestikku ainult seetõttu, et nad on meie vaateväljast umbes samal vaateväljal. Mõelge optilisele illusioonile, mis laseb kahel objektil tunduda lähedalt, kuigi nad on tegelikult üksteisest kaugel.

Taevasfäär on kujuteldav sfäär, mille keskmes on Maa, millele projitseeritakse kõik taevakehad. Taevasfääri geomeetria mõistmine on oluline tähtede ja planeetide asukoha määramiseks, kasutades selliseid koordinaate nagu deklinatsioon ja õige tõus.

Horisontaalne koordinaatsüsteem on taevane koordinaatsüsteem, mis kasutab vaatleja kohalikku horisonti kui põhitasandit, et määratleda kaks sfäärilise koordinaatsüsteemi nurka: kõrgus ja asimuut. Seetõttu nimetatakse horisontaalset koordinaatsüsteemi mõnikord muu hulgas ka az/el-süsteemiks, alt/az-süsteemiks või alt-azimuut-süsteemiks. Teleskoobi altazimuudiga monteeringus järgivad instrumendi kaks telgjoont kõrgust ja asimuuti.

Taevaskoordinaatide süsteem jagab taeva kaheks poolkera: ülemine poolkera, kus objektid on horisondi kohal ja on nähtavad, ja alumine poolkera, kus objektid on horisondi all ja neid ei ole võimalik näha, kuna Maa takistab nende vaatamist.[a] Poolkera eraldavat suuringi nimetatakse taevahorisondiks, mis on määratletud kui taevasfääri suuring, mille tasand on normaalne kohaliku gravitatsioonivektoriga. Praktikas võib horisonti defineerida kui tasandit, mis puutub kokku vaigse, vedeliku pinnaga, näiteks elavhõbeda basseini. Ülemise poolkera poolust nimetatakse zeniidiks. Alumise poolkera poolust nimetatakse nadiiriks.



Joonis 10.2. Taevasfäär

Järgnevalt on esitatud kaks sõltumatut horisontaalset nurgakoordinaati:

Kõrgus (alt.), mida mõnikord nimetatakse ka kõrguseks (el.) või näivaks kõrguseks, on nurk objekti ja vaatleja kohaliku horisondi vahel. Nähtavate objektide puhul on see nurk vahemikus ja Asimuut (az.) on objekti nurk ümber horisondi, mida tavaliselt mõõdetakse põhja suunas ja mis suureneb ida suunas.

Horisontaalset koordinaatsüsteemi ei tohi segi ajada topotsentrilise koordinaatsüsteemiga. Horisontaalkoordinaadid määravad vaatleja orientatsiooni, kuid mitte alguspunkti asukohta, samas kui topotsentrilised koordinaadid määravad alguspunkti asukoha Maa pinnal, erinevalt geotsentrilisest taevasüsteemist.



Co-funded by
the European Union



Taotlus: See mudel aitab kirjeldada, kuidas tähtede asendid muutuvad öö ja aasta jooksul, ning on oluline, et mõista tähistaevade, navigatsiooni ja astronoomiliste vaatluste aluseks olevaid geomeetrilisi põhimõtteid.

Need täiendavad alused täiendavad teemat, tutvustades taevakehade positsioneerimise ja asukoha määramise süsteeme ning peamisi geomeetrilisi seadusi, mis on olulised valguse ja teekonna käitumise mõistmiseks sfäärilistel pindadel, mis mõlemad on astronoomilistes mõõtmistes kriitilise tähtsusega. Need teoreetilised alused annavad matemaatilise ja geomeetrilise raamistiku, mis on vajalik astronoomiliste mõõtmiste mõistmiseks ja teostamiseks, alates kreeklaste poolt välja töötatud klassikalistest meetoditest kuni kaasaegsete relativistlike parandusteni taevamehaanikas.

- **Astronoomia õpetamise metoodika VR-i abil**

Eukleidilise geomeetria õppimine VR-prillidega võib pakkuda transformatiivset, kaasahaaravat õpikogemust, mis võimaldab õpilastel suhelda geomeetriliste kujundite ja mõistetega viisil, mis läheb kaugemale traditsioonilistest 2D-diagrammidest ja tahvli kujutistest. Siin on kirjeldatud, kuidas saab eukleidilise geomeetria erinevaid aspekte uurida ja täiustada VR-i abil:

- 1. 3D-kujude visualiseerimine ja nendega suhtlemine Geomeetriliste tahkete kehade uurimine:**

VR-is saavad õpilased manipuleerida ja uurida geomeetriliste kehade, näiteks kuubikute, kerade, püramiidide ja prismade 3D-versioone. Nad saavad neid vaadelda erinevate nurkade alt, pöörata neid ja isegi "kõndida" ümber kujundite, et nende omadusi sügavamalt mõista. VR võimaldab õpilastel tükeldada tahkeid kehasid, paljastades ristlõikeid, et paremini mõista 2D-kujude ja 3D-objektide vahelisi seoseid, näiteks kuidas koonuse lõikamine võib tekitada ringe, ellipse või parabooli. Interaktiivsed tõestused:

Selle asemel, et lihtsalt tõestusi paberile joonistada, saavad õpilased kasutada VR-i, et interaktiivselt tõestusi konstrueerida. Näiteks võib Pythagorase teoreemi tõestamist teha, manipuleerides täisnurksete kolmnurkade külgede ruutudega ja füüsiliselt "ümber paigutades" neid viisil, mis näitab pindalade vahelist seost. Interaktiivsete teisenduste, näiteks pöörete, translatsioonide ja peegelduste abil saavad õpilased otseselt manipuleerida arvudega, et mõista kongruentsust, sarnasust ja sümmeetriat.

- 2. Eukleidese postulaatide uurimine 3D-s:**

VR-is saavad õpilased joonistada otse sirge kahe suvalise punkti vahel 3D-ruumis, uurides sirgjoone mõistet mitte ainult tasapinnal, vaid ka laiemas 3D-keskkonnas.

Joontega suheldes saavad õpilased reaalselt näha joone pikendusi, mõistes, kuidas jooned käituvad eukleidilises ruumis ja kuidas see postulaat toimib nii 2D- kui ka 3D-keskkonnas.



Õpilased saavad hõlpsasti joonistada ringe, valides suvalise keskpunkti ja raadiuse, seejärel vaadata neid erinevate nurkade alt ja isegi vaadelda neid kui kerade või muude tahkete kehade ristlõikeid, tugevdades nende arusaamist ringikujulisest sümmeetriast. Paralleelpostulaat (kui on antud sirge ja punkt, mis ei asu sellel sirgel, saab läbi selle punkti joonistada ainult ühe antud sirgega paralleelse sirge):

VR saab visuaalselt demonstreerida paralleelseid jooni nii kahemõõtmelistes tasapindades kui ka kolmemõõtmelises ruumis, näidates, et paralleelsed jooned ei kohtu, ükskõik kui kaugele neid ka ei pikendata, ning õpilased saavad seda mõistet ise joonte abil uurida.

3. Nurga ja kauguse seoste mõistmine Nurkade mõõtmine:

Õpilased saavad kasutada virtuaalseid vahendeid, et mõõta nurkasid lõikuvate joonte, hulknurkade või tahkete objektide vahel, saades selget ettekujutust sellest, kuidas nurgad 3D-ruumis toimivad. Nad saavad suhelda dünaamiliste nurkade manipuleerimisega, mis võimaldab neil kohandada nurki ja kohe jälgida, kuidas muud geomeetrilised omadused selle tulemusel muutuvad (näiteks näha, kuidas kolmnurga sisemiste nurkade summa on alati 180 kraadi, isegi kui kolmnurga kuju muutub). Kauguse ja pindala arvutused: VR-keskkonnad võivad pakkuda interaktiivseid vahendeid, et mõõta punktide vahelisi või kõverate vahelisi vahemaid, tugevdades sirgete ja vahemaade mõistet. Õpilased saavad ka pindala ja ruumala arvutada, valides hulknurkade ja hulktahvlite pindalaid, mis võimaldab praktiliselt omandada pindala ja ruumala valemeid.

4. Transformatsioonid ja sümmeetria Translatsioonid, pöörded ja peegeldused:

VR võimaldab hõlpsasti objekte ruumis teisendada, pöörata ja peegeldada. Näiteks saavad õpilased liigutada kolmnurka üle tasandi või pöörata kuubikut ruumis, et uurida nende teisenduste mõju erinevatele geomeetrilistele omadustele (näiteks kongruentsusele või sümmeeriale). Samuti saavad nad uurida sümmeetriat, vaadeldes peegeldusi erinevates tasandites, ja mõista, kuidas sümmeetriarühmad toimivad, suheldes selliste objektidega nagu korrapärased hulktahukad (nt platoonilised tahked kehad). Tessellatsioonid ja plaadid:

Õpilased saavad luua tessellatsioone, kordades hulknurki ruumis, aidates neil mõista perioodilisi mustreid ja seda, kuidas korrapärased hulknurki võivad tasandit katta. Nad saavad neid vaadata eri vaatenurkadest, tugevdades ruumilist visualiseerimist.

5. Dünaamiline konstrueerimine ja katsetamine Geomeetriliste kujundite konstrueerimine:

VR-vahendeid kasutades saavad õpilased konstrueerida põhilisi geomeetrilisi kujundeid, nagu kolmnurgad, nelinurgad, ringid ja hulknurgad nii 2D- kui ka 3D-ruumis. Nad saavad neid konstruktsioone manipuleerida, muutes külgede pikkusi, nurki ja suunda, jälgides



Co-funded by
the European Union



samal ajal, kuidas säilivad sellised omadused nagu paralleelsus või kongruentsus. Interaktiivsed geomeetriaülesanded: VR pakub platvormi geomeetriliste probleemide dünaamiliseks lahendamiseks. Näiteks võrdkülgse kolmnurga konstrueerimine või nurga poolitamine võib muutuda interaktiivseks väljakutseks, kus õpilased manipuleerivad virtuaalsete kompasside ja joonlaudadega nagu traditsiooniliste kompassi- ja joonlaua konstruktsioonide puhul, kuid lisaväärtuseks on immerstiivne visualiseerimine.

Taotlus: See raamistik on aluseks kõige lihtsamatele astronoomilistele mõõtmistele, nagu näiteks kauguste arvutamine parallaksi abil või taevakehade kõrguse määramine horisondi kohal.

5. Rakendused igapäevaelus

- Kosmoseuuringud ja satelliitnavigatsioon.

Taotlus: Olgu siis tegemist satelliitide orbiidile saatmise, Marsile saatmise või kaugete planeetide uurimisega, geomeetria mängib kriitilist rolli kosmosemissioonide trajektooride arvutamisel. Näiteks satelliitide orbiidid määratakse kindlaks kooniliste lõikude (ellipsid, parabool) geomeetriliste põhimõtete abil ning täpsed mõõtmised tagavad kosmoselaevade õige asukoha.

Asjakohasus: Nende geomeetriliste aluste mõistmine võimaldab inseneridel ennustada ja kontrollida kosmoselaevade trajektoore, tagada GPS-süsteemide satelliitide katvus ja vältida kokkupõrkeid kosmosejätmetega.

- Globaalsed positsioneerimissüsteemid (GPS).

Taotlus: GPS-tehnoloogia tugineb suuresti geomeetrilisele triangulatsioonile, et arvutada täpseid asukohti Maal. Kasutades mitme satelliidi signaale, mis on paigutatud vastavalt geomeetrilistele põhimõtetele, saab süsteem määrata objekti asukoha suure täpsusega.

Asjakohasus: Geomeetria rakendamine GPSis on väga oluline igapäevaelus navigeerimiseks, alates nutitelefonidest kuni transpordisüsteemideni, ja ka edasijõudnute jaoks, nagu autonoomsed sõidukid, kaardistamine ja georuumiline analüüs.

- Astronoomilised vaatlused ja uuringud.

Taotlus: Kaasaegsed astronoomilised observatooriumid ja kosmoseteleskoobid, nagu Hubble'i kosmoseteleskoop või tulevane James Webb'i kosmoseteleskoop, kasutavad geomeetria taevakehade vahemaade arvutamiseks, tähtede asukoha mõõtmiseks ja galaktiliste struktuuride mõistmiseks. Sellised tehnikad nagu astrometria (tähtede asukoha täpne mõõtmine) ja parallaks tuginevad geomeetrilistele põhimõtetele.

Asjakohasus: Need mõõtmised on olulised teaduslikeks avastusteks, näiteks eksoplaneetide tuvastamiseks, tumeda aine uurimiseks ja universumi struktuuri kaardistamiseks.



Co-funded by
the European Union



- Tähtede parallaks ja kauguse mõõtmine.

Taotlus: Seda kasutatakse meie galaktikas asuvate tähtede kauguse mõõtmiseks. See meetod kasutab lihtsaid geomeetrisi kolmnurkade ja nurkade põhimõtteid.

Asjakohasus: Parallaks on endiselt põhiline vahend tähtede kauguste määramiseks, mis on oluline universumi ulatuse, tähtede tekke ja galaktika struktuuri mõistmiseks.

- Astronoomiline pildistamine ja 3D visualiseerimine.

Taotlus: Kaasaegsed tehnoloogiad, sealhulgas VR (virtuaalne reaalsus) ja 3D-modelleerimine, kasutavad geomeetriat, et luua taevaste nähtuste kaasahaaravaid simulatsioone. VR-prillid võimaldavad kasutajatel uurida planeedisüsteemide, orbiitide ja tähtede moodustiste geomeetrisi mudeleid, võimaldades sügavamalt arusaamist kosmose ruumilistest suhetest.

Asjakohasus: See on oluline hariduse, teadusliku teavitustegevuse ja teadusuuringute jaoks, pakkudes intuitiivsemat arusaamist keerulistest astronoomilistest süsteemidest ja võimaldades interaktiivset universumi uurimist.

- Planeedi liikumine ja orbitaalmehaanika.

Taotlus: Geomeetria on oluline planeedi orbiitide arvutamisel ja prognoosimisel, mis põhineb Kepleri planeetide liikumise seadustel ja Newtoni mehaanikal. Neid arvutusi kasutatakse satelliitide orbiidile saatmiseks, planeetidevaheliste missioonide planeerimiseks ja selliste taevaste sündmuste nagu päikesevarjutuste ja transiitide prognoosimiseks.

Asjakohasus: Täpne orbitaalraja prognoosimine on kriitilise tähtsusega alates kosmoseagentuuride (nt NASA) igapäevastest toimingutest kuni kommertssatelliitide teenuste osutamiseni.

- Kosmoloogia ja universumi kuju.

Taotlus: Kosmoloogias kasutatakse geomeetriat universumi kuju ja struktuuri uurimiseks. Teooriad, nagu üldine relatiivsusteooria, mis kirjeldavad gravitatsioonist tingitud ruumi aja kõverust, kasutavad mitte-eukleidilist geomeetriat, et selgitada suuremahulisi struktuure, nagu mustad augud, gravitatsiooniläätised ja universumi paisumine.

Asjakohasus: Ruumiaja geomeetria mõistmine aitab teadlastel arendada mudeleid selliste nähtuste jaoks nagu Suur Pauk, tume energia ja universumi lõplik saatus, luues aluse kaasaegsele teoreetilisele füüsikale.

- Astrofotograafia ja aegluubi vaatlus.

Taotlus: Geomeetrisi algoritme kasutatakse astrofotograafias, et jäädvustada ja töödelda pilte taevakehadest aja jooksul. Eelkõige aegluubis toimuv vaatlus nõuab täpseid geomeetrisi arvutusi, et jälgida tähtede ja planeetide näilist liikumist taevas.



Co-funded by
the European Union



Asjakohasus: Need tehnikad on olulised nii amatöör- kui ka kutselistele astronoomidele, kes dokumenteerivad selliseid taevaseid sündmusi nagu meteoriidipilved, planeetide liitumised ja tähesabad.

Need rakendused näitavad, et geomeetria on jätkuvalt oluline vahend nii kaasaegse astronoomia teoreetilistes kui ka praktilistes aspektides, alates igapäevastest tehnoloogiatest nagu GPS kuni arenenud teaduslike ettevõtmisteni nagu kosmoseuuringud ja kosmoloogia.

[https://math.libretexts.org/Bookshelves/Geometry/Modern_Geometry_\(Bishop\)/03%3A_Introduction_to_Hyperbolic_Geometry/3.01%3A_Hyperbolic_Geometry](https://math.libretexts.org/Bookshelves/Geometry/Modern_Geometry_(Bishop)/03%3A_Introduction_to_Hyperbolic_Geometry/3.01%3A_Hyperbolic_Geometry)



Co-funded by
the European Union



6. Viited

- [1] Otto Neugebauer (1975). Vana matemaatilise astronoomia ajalugu. Springer-Verlag. p. 744. ISBN 978-3-540-06995-9.
- [2] Hartshorne, Robin (2000). Geomeetria: Euclid and Beyond (2. trükk). New York, NY: Springer. ISBN 9780387986500.
- [3] Artmann, Benno: Eukleidese - matemaatika loomine. New York, Berliin, Heidelberg: Springer 1999, ISBN 0-387-98423-2.
- [4] Popowski, P.; Gould, A. (1998). "Mathematics of Statistical Parallax and the Local Distance Scale". arXiv:astro-ph/9703140
- [5] Hirshfeld, Alan w. (2001). Parallax: Võidujooks kosmose mõõtmiseks. New York: W.H. Freeman. ISBN 978-0-7167-3711-7.
- [6] Välislink: Parallax hariduslikul veebilehel, sealhulgas kiire kauguse hindamine parallaksi põhjal ainult silmade ja pöidla abil, <http://www.phy6.org/stargaze/Sparalax.htm>.
- [7] Välislink: Measuring THE SKY, A Quick Guide to the Celestial Sphere - Jim Kaler, University of Illinois, <http://stars.astro.illinois.edu/celsph.html>
- [8] Välislink: General Astronomy/The Celestial Sphere - Wikibooks, <https://en.wikibooks.org/wiki/GeneralAstronomy/TheCelestialSphere>
- [9] Välislink: Rotating Sky Explorer - Nebraska-Lincolni Ülikool, <https://astro.unl.edu/naap/motion2/animations/cehc.html>.
- [10] Kersting, M., Bondell, J., Steier, R., & Myers, M. (2023). Virtuaalreaalsus astronoomiaõppes: disainiprintsiipide kajastamine teadlaste ja praktikute vahelise dialoogi kaudu. International Journal of Science Education, Part B, 14(2), 157-176. <https://doi.org/10.1080/21548455.2023.2238871>. <https://doi.org/10.1080/21548455.2023.2238871>