



Co-funded by
the European Union



MATH 3D GEO VR



Učebné materiály

„Matematické modely vo vyučovaní geometrie v trojrozmernom priestore s využitím virtuálnej reality”

“Mathematical models for teaching three - dimensional geometry using virtual reality”



SLOVENSKÁ VERZIA



Lodz University
of Technology



universidade de aveiro
theoria poiesis praxis



UNIVERSITY
OF ŽILINA



TARTU ÜLIKOOL
UNIVERSITY OF TARTU
1632



UNIVERSITY OF SILESIA
IN KATOWICE

Učebné materiály „ Matematické modely vo vyučovaní geometrie v trojrozmernom priestore s využitím virtuálnej reality “

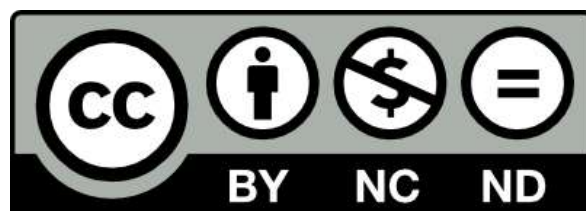
(“Mathematical models for teaching three-dimensional geometry using virtual reality”)

Vytvorilo konzorcium Math3DgeoVR.



Co-funded by
the European Union

Spolufinancované Európskou úniou (Math3DgeoVR, projekt č. 2021-1-PL01-KA220-HED-000030365). Názory a stanoviská vyjadrené v texte sú však výlučne názory autora(ov) a nemusia nevyhnutne odrážať názory Európskej únie alebo Fundácie Rozvoju Systemu Edukacji. Ani Európska únia, ani grantová autorita nemôžu byť za tieto názory zodpovedné.



Licencia CC

Táto licencia umožňuje opätovné použitie materiálu, jeho kopírovanie a distribúciu v akomkoľvek médiu alebo formáte iba v nezmenenej podobe, výlučne na nekomerčné účely, a to len za predpokladu, že bude uvedený autor.



UČEBNÉ MATERIÁLY

1 TĚMA: Systémy lineárných rovnic

1. Zdôvodnenie výberu témy

V matematike je systém lineárných rovnic (alebo lineárny systém) súborom jednej alebo viacerých lineárných rovnic, ktoré obsahujú rovnaké premenné. Modul popisuje problémy riešenia systémov lineárných rovnic s reálnymi koeficientmi a zároveň sa odkazuje na ich geometrickú interpretáciu.

Teória lineárných systémov je základom a fundamentálnou súčasťou lineárnej algebry, predmetu používaného v väčšine odvetví modernej matematiky. Výpočtové algoritmy na hľadanie riešení sú dôležitou súčasťou numerickej lineárnej algebry a zohrávajú významnú úlohu v inžinierstve, fyzike, chémii, informatike a ekonomike. Okrem toho môže byť systém nelineárných rovnic často aproximovaný lineárnym systémom (pozri lineárizáciu), čo je užitočná technika pri tvorbe matematických modelov alebo počítačových simulácií, dokonca aj pre komplexné systémy.

Modul podporuje nielen hľadanie riešenia systému rovnic, ale tiež umožňuje používateľovi priradiť algebraickú rovnicu k jej geometrickej interpretácii. Môže to byť aj nástroj, ktorý sa dá použiť na riešenie úloh vyžadujúcich použitie systémov lineárných rovnic. Je zriedkavé nájsť rovnice, ktoré presne modelujú daný problém. Namiesto toho je pravdepodobné, že sa študent stretne so situáciou, v ktorej pozná kľúčové informácie a potrebuje prispôsobiť systém rovnic, alebo pozná riešenie a musí modifikovať koeficienty systému. Tento modul teda umožňuje používateľovi naučiť sa základy analytického riešenia úloh. Napríklad:

Zadaná situácia, ktorá predstavuje systém lineárných rovnic, napíšte systém rovnic a identifikujte riešenie.

- a) V úlohe určte neznáme veličiny a reprezentujte ich pomocou premenných.
- b) Napíšte systém rovnic, ktorý modeluje podmienky problému.

- c) Riešte systém.
- d) Skontrolujte navrhnuté riešenie.

Štandardný algoritmus na riešenie systému lineárnych rovníc je založený na tzv. Gaussovej eliminácii s niektorými úpravami.

2. Historické pozadie

Pred približne 4000 rokmi vedeli obyvatelia Babylónu riešiť jednoduchý systém 2×2 lineárnych rovníc s dvoma neznámymi. Okolo roku 200 pred Kristom Číňania publikovali "Deväť kapitol matematického umenia", kde predviedli schopnosť riešiť systém rovníc 3×3 (Perotti: Prevezaté z <http://www.science.unitn.it/~perotti/HistoryofLinearAlgebra.pdf>). Sila a pokrok lineárnej algebry sa naplno prejavili až koncom 17. storočia. Vtedy sa objavila téma determinantov a hodnôt spojených so štvorcovou maticou, ktoré študoval tvorca kalkulu Leibniz. Na prelome 19. a 20. storočia Gauss zaviedol postup na riešenie systému lineárnych rovníc. Jeho práca sa hlavne zaoberala lineárnymi rovnicami, ale ešte nezaviedol pojem matíc ani ich zápis. Zaoberal sa rovnicami rôznych čísel a premenných a analyzoval prácu Eulera, Leibniza a Cramera pred 19. storočím. Pojem "matica" zaviedol J.J. Sylvester v roku 1848. Základy teórie matíc pochádzajú z práce Arthura Cayleyho v roku 1855.

Aj keď je lineárna algebra pomerne novým predmetom v porovnaní s inými matematickými disciplínami, jej použitie je rozsiahle. Vďaka úsiliu Leibniza, ktorý ovládal kalkulus, bol koncept používania systémov lineárnych rovníc na riešenie neznámych formálne zavedený. Ďalšie príspevky od vedcov ako Cayley, Euler, Sylvester a ďalších zmenili lineárne systémy na zápis a riešenie použitím matíc. Bez ohľadu na technológie, Gaussova eliminácia stále zostáva najlepším spôsobom riešenia systému lineárnych rovníc.

Dokonca, aj keď vedci neustále aktualizujú svoje učebnice, základy zostávajú rovnaké.

3. Výsledky vzdelávania

Po absolvovaní tohto modulu by študenti mali byť schopní pochopiť a správne vybrať teoretické poznatky, ktoré im umožnia dosiahnuť:

- Schopnosť definovať význam systému lineárnych rovníc s dvoma a tromi premennými v zápise lineárnej algebry.
- Schopnosť uviesť príklady spolu s ich geometrickou interpretáciou.



- Schopnosť vybrať vhodný matematický model pre úlohu použitím lineárnych rovníc.
- Schopnosť riešiť problémy systému lineárnych rovníc rôznymi metódami, napríklad substitúciou, elimináciou a kombinovaním.

Študenti, ktorí rozumejú matematickým pojmom, dokážu vysvetliť pojmy, ktoré sa naučili, na základe definícií a materiálov poskytnutých v kurze rozlíšiť, ktoré sú príklady a aplikovať tieto pojmy na riešenie súvisiacich problémov. To znamená, že študent má schopnosť:

- Určiť vlastnosti, ktoré je potrebné riešiť (napr. počet rovníc, či sú homogénne).
- Určiť existenciu riešenia (napr. hodnosť matice, determinant).
- Správne vybrať metódu riešenia daného systému.
- Určiť geometrickú reprezentáciu (napr. ako podporu pri použití metódy riešenia).

4. Teoretické základy

Praktické problémy v mnohých oblastiach štúdia, ako sú biológia, ekonómia, chémia, informatika, elektronika, inžinierstvo, fyzika a sociálne vedy, môžu byť často zredukované na riešenie systému lineárnych rovníc. Lineárna algebra vznikla z pokusov nájsť systematické metódy na riešenie týchto systémov.

Napríklad, ak a, b and c sú reálne čísla, grafom rovnice v tvare:

$$a x + b = c$$

je priamka (ak a a b sú obe nenulové), tak takúto rovnicu nazývame lineárnou rovnicou s premennou x .

Často je výhodné premenné zapisovať ako x_1, x_2, \dots, x_n , najmä, ak máme viac ako dve premenné. Rovnica v tvare:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$$

sa nazýva lineárnou rovnicou n premenných x_1, x_2, \dots, x_n . a_1, a_2, \dots, a_n sú reálne čísla (nazývajú sa koeficienty x_1, x_2, \dots, x_n , a b je tiež reálne číslo (nazýva sa konštanta). Konečný súbor lineárnych rovníc s premennými x_1, x_2, \dots, x_n sa nazýva systém lineárnych rovníc týchto premenných.



Je daná lineárna rovnica $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$, postupnosť čísel s_1, s_2, \dots, s_n of n sa nazýva riešením tejto rovnice, ak:

$$a_1s_1 + a_2s_2 + \dots + a_ns_n = b,$$

platí pre všetky premenné x 's po dosadení s 's ($x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$). Postupnosť čísel sa nazýva riešením systému rovníc, ak je riešením každej rovnice v systéme.

Definícia 1.1 Systém lineárnych rovníc $m \times n$ má tvar:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

kde koeficienty systému a_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ a konštanty b_j sú skaláry a x_1, x_2, \dots, x_n sú v systéme neznáme. Ak $b_i = 0$ pre každé i , potom systém nazývame homogénnym; v opačnom prípade sa nazýva nehomogénnym.

Definícia 1.2 Riešením systému lineárnych rovníc nazývame usporiadanú n -tícu čísel (c_1, c_2, \dots, c_n) , ktoré keď dosadíme za x_1, x_2, \dots, x_n do ľavej strany systému, dostaneme hodnoty na pravej strane. Množina všetkých riešení systému sa nazýva riešenie systému.

Definícia 1.3 Systém rovníc, ktorý má aspoň jedno riešenie, sa nazýva konzistentný, zatiaľ čo systém, ktorý nemá žiadne riešenie, sa nazýva nekonzistentný.

V prípade rovníc s nekonečným počtom riešení sa zavádzajú premenné, ktoré sa nazývajú parametre. Množina riešení opísaná týmto spôsobom má parametrovú formu a nazýva sa všeobecné riešenie systému. Ukazuje sa, že riešenia akéhokoľvek systému rovníc (ak existujú riešenia) môžu byť vyjadrené v parametrovej forme (t. j. premenné x_1, x_2, \dots sú dané v tvare nových nezávislých premenných s, t , etc.).

Našou úlohou bude určiť, či daný systém je konzistentný, a ak je, nájsť množinu jeho riešení.

Definícia 1.4 Asociáciu so systémom lineárnych rovníc predstavujú nasledujúce matice:

- matica koeficientov

$$A = [a_{11} \cdots a_{1n} : \cdots : a_{m1} \cdots a_{mn}].$$

- rozšírená matica systému

$$[A|B] = [a_{11} \cdots a_{1n} : \cdots : a_{m1} \cdots a_{mn} | b_1 \cdots b_m].$$

Rozšírená matica úplne charakterizuje systém rovníc, pretože obsahuje všetky koeficienty systému a konštanty systému. Je potrebné si uvedomiť, že matica koeficientov je matica, ktorá obsahuje n stĺpcov z matice B .

Definícia 1.5 Riadková hodnosť matice r_r je maximálny počet lineárne nezávislých riadkov. Podobne, stĺpcová hodnosť matice r_c je maximálny počet lineárne nezávislých stĺpcov. Tento dôležitý výsledok, ktorý nie je ťažké dokázať, hovorí, že riadková a stĺpcová hodnosť matice sa rovnajú. Preto sa jednoducho hovorí len o hodnosti matice $r = r_r = r_c$.

Veta 1.1 (Kronecker - Cappelli) *Systém lineárnych rovníc má riešenie vtedy a len vtedy, ak: $r(A) = r([A|B])$.*

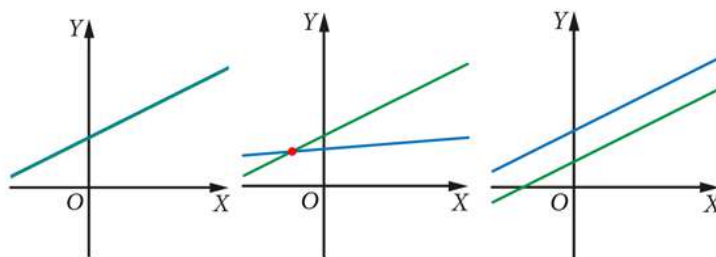
Elementárne riadkové úpravy

Elementárne riadkové úpravy:

- Výmena dvoch riadkov.
- Násobenie riadka nenulovým číslom.
- Nahradenie riadka iným riadkom, ktorý je násobkom iného riadku pripočítaného k nemu.

Geometrická interpretácia lineárnych systémov

Geometrickou interpretáciou lineárneho systému dvoch rovníc v dvoch neznámych je geometrická prezentácia dvoch priamok, ktoré zodpovedajú lineárnym funkciám týchto rovníc. V učebniciach sú často schematické diagramy tohto typu:

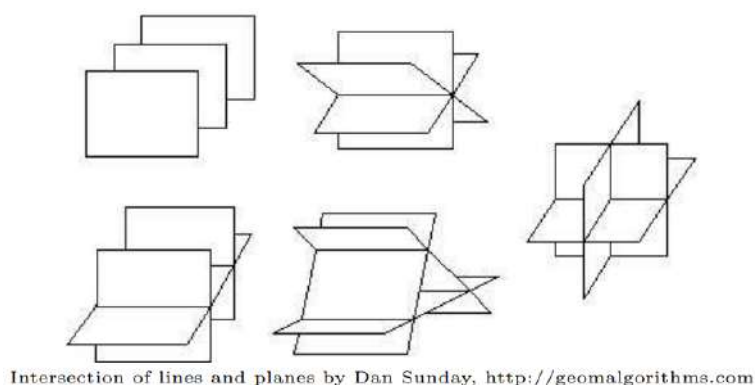


Jedna rovnica s tromi neznámymi je v priestore interpretovaná rovnicou:

$$Ax + By + Cz = D$$

Rovnica má riešenia, ktoré predstavujú rovinu, ak aspoň jeden z koeficientov A, B, C je nenulový. Ak sa pozrieme na systém takýchto lineárnych rovníc, množinou riešení je množina všetkých bodov ležiacich vo všetkých príslušných rovinách.

V učebniciach sa tiež nachádzajú schematické diagramy typu:



Dva lineárne systémy používajúce rovnakú množinu premenných sú ekvivalentné, ak každá rovnica v druhom systéme môže byť algebraicky odvodená od rovníc v prvom systéme, a naopak. Dva systémy sú ekvivalentné, ak sú oba nekonzistentné, alebo každá rovnica každého z nich je lineárnou kombináciou rovníc toho druhého. Z toho vyplýva, že dva lineárne systémy sú ekvivalentné, vtedy a len vtedy, ak majú rovnakú množinu riešení.

Pochopenie matematických pojmov je veľmi dôležitou zručnosťou, ktorú študenti získajú počas učenia sa matematiky. Keď sa vrátíme k všeobecnej diskusii o systéme lineárnych rovníc, budeme predpokladať niekoľko základných otázok:

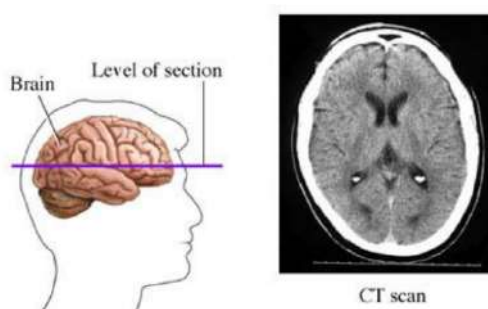
1. Má systém riešenie?
2. Ak systém má riešenie, koľko ich existuje?
3. Ako určíme všetky riešenia?

5. Aplikácie v každodennom živote

Na prepojenie systémov lineárnych rovníc s praktickými aplikáciami, ich geometrickej interpretácie v moduly, bola vybraná téma týkajúca sa výberu röntgenových lúčov. Vďaka tomu

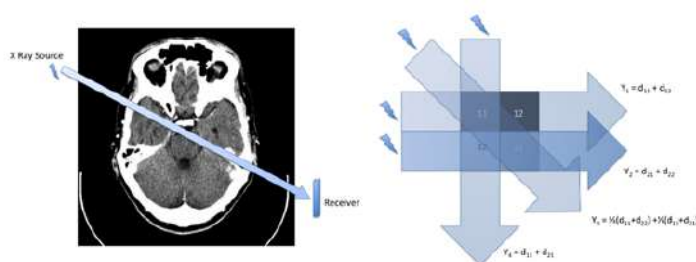
používateľ nielen modifikuje systém rovníc, ale aj musí sledovať zmeny súvisiace s vizualizáciou aplikovaných algebraických zmien. Existuje množstvo algoritmov na rekonštrukciu obrazu pomocou výpočtovej tomografie (CT) materiálu. Zamerali sme sa na metódy lineárnej algebry.

V niektorých prípadoch nie je bežné röntgenové vyšetrenie z jedného smeru dostatočné a dôležité informácie môžu zostať neodhalené (napríklad nádor za kosťou). Použitím CT sa táto možnosť výrazne znižuje, pretože CT používa röntgenové lúče z rôznych smerov na vytvorenie rezového obrazu materiálu, čím sa objekty v materiáli nemôžu navzájom zakrývať.



Obr. 1.1: Rez z CT. Zdroj: https://dspace.bracu.ac.bd/xmlui/bitstream/handle/10361/10915/13216001_MNS.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Tento obrázok ukazuje rez mozgu, na ktorý bola pre jednoduchosť nanesená mriežka na alokáciu objektov po mriežke. Teda každá mriežka obsahuje objekt, ktorý má byť skenovaný, analyzovaný a identifikovaný.



Obr. 1.2: Jeden rez získaný CT skenom. Každý rez je rekonštruovaný obraz získaný zaznamenávaním útlmu röntgenových lúčov cez tkanivá pozdĺž obrovského počtu smerov. Obrázok ukazuje zdroj röntgenového žiarenia a príslušný prijímač používaný na meranie útlmu v špecifickom smere. Vpravo - lineárna závislosť medzi pozorovanými pomermi intenzity. Zdroj: <https://ecampusontario.pressbooks.pub/linearalgebraandapplications/chapter/motivating-example/>



6. Literatúra

- [1] <https://ecampusontario.pressbooks.pub/linearalgebrautm/chapter/chapter-1-system-of-linear-equations/>
- [2] <https://linearalgebra.math.umanitoba.ca/math1220/section-14.html>
- [3] https://www.mimuw.edu.pl/~amecel/2021z/2.gal_wyklad_1.pdf
- [4] <https://www.dluczna.pl/lekcja/matematyka,geometria-analityczna,uklady-rownan-powtorzenie>
- [5] [http://homepage.ntu.edu.tw/~jryanwang/courses/Mathematics%20for%20Management%20\(undergraduate%20level\)/Applications%20in%20Ch1.pdf](http://homepage.ntu.edu.tw/~jryanwang/courses/Mathematics%20for%20Management%20(undergraduate%20level)/Applications%20in%20Ch1.pdf)
- [6] <https://www.studypug.com/linear-algebra-help/applications-of-linear-systems>
- [7] <http://prac.im.pwr.wroc.pl/~kajetano/AM2/fun2var/fun2var-3.html>
- [8] Dąbrowicz-Tlalka, A. M., Guze, H. (2011). Visualization in Mathematics Teaching - Some examples of supporting the students' education. Use of E-Learning in Developing of the Key Competences., 223-239.

2 TĚMA: Parciálne derivácie

1. Zdôvodnenie výberu témy

Derivácia funkcie jednej premennej $f(x)$ nám hovorí, ako sa mení $f(x)$ v závislosti na zmene premennej x . Keď hovoríme o rýchlosti zmeny funkcie $f(x)$ vzhľadom na premennú x neexistuje žiadna nejednoznačnosť, pretože x sa môže meniť len pri posúvaní po osi x . Situácia sa však stáva zložitejšou, keď študujeme rýchlosť zmeny funkcie s dvoma alebo viacerými premennými. Analogický postup pre funkciu dvoch premenných $f(x, y)$ by bolo niečo, čo nám hovorí, ako rýchlo sa mení funkcia $f(x, y)$ pri zmene x a y . Avšak v mnohých prípadoch táto zmena bude závisieť od toho, ako rýchlo sa menia x a y v závislosti jednej premennej od druhej. Pre funkcie s viacerými premennými sa ich hodnoty menia, keď sa mení jedna alebo viac vstupných hodnôt, preto je dôležité vypočítať zmenu v samotnej funkcii. Tento proces sa môže skúmať tým, že sa všetky premenné okrem jednej budú považovať konštantné a nájde sa rýchlosť zmeny funkcie vzhľadom na túto jednu zostávajúcu premennú. Poznanie, ako vypočítať parciálne derivácie, umožňuje študovať a pochopiť správanie sa funkcií viacpremenných. Tento proces sa nazýva parciálna diferenciácia. Tento proces otvára širokú škálu aplikácií v kalkulu, ako sú napríklad dotykové roviny ...

2. Historické pozadie

Jedným z prvých, ktorý použil symbol ∂ v matematike, bol Marquis de Condorcet 1770, ktorý ho používal pre parciálne derivácie. Moderné označenie parciálnej derivácie vytvoril Adrien-Marie Legendre (1786), hoci neskôr od tohto označenia upustil; Carl Gustav Jacob Jacobi tento symbol začal od roku 1841 opäť používať.

3. Výsledky vzdelávania

Po skončení tohto modulu by mali byť študenti schopní

- definovať a používať výpočtové techniky pre prvé a vyššie parciálne derivácie, a to aj v zadaných bodoch
- rozumieť pojmu parciálnej diferenciácie,
- parciálne derivovať funkciu postupne vzhľadom na každú z jej premenných,

- vyhodnotiť prvé parciálne derivácie,
- formulovať parciálne derivácie druhého rádu.

Prerekvizity: Pred začatím tohto modulu by študenti mali:

- rozumieť princípu derivácie funkcie jednej premennej

4. Teoretické základy

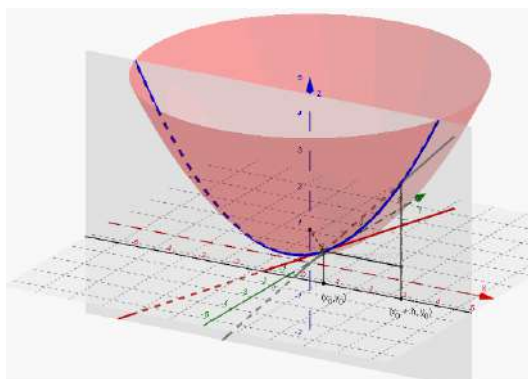
Parciálne derivácie funkcie $f(x, y)$ vzhľadom na premennú x .

Funkcia $z = f(x, y)$ je funkciou dvoch nezávislých premenných x a y a závislej premennej z . Z geometrického hľadiska o funkcii dvoch premenných vieme, že každou zmenou hodnoty x alebo y , dostaneme postupnosť kriviek, pričom každá z nich leží v inom rovine a každá je časťou plochy, ktorú by sme chceli vykresliť. Súčasnou zmenou premenných x a y sa mení aj z . Avšak namiesto toho, aby sme zväžili túto všeobecnú situáciu, na začiatok budeme jednu z nezávislých premenných považovať konštantnú funkciu. Toto je ekvivalentné pohybu po krivke, ktorú dostaneme ako priesečník roviny s jednou z kvadratických plôch.

Ak budeme premennú y považovať za konštantu a x za premennú, funkcia z sa stane funkciou len jednej premennej x .

Definícia 2.1 Predpokladajme, že $z = f(x, y)$ je funkcia dvoch premenných. Potom parciálna derivácia funkcie $f(x, y)$ podľa premennej x v bode $[x_0, y_0]$ je daná vzťahom:

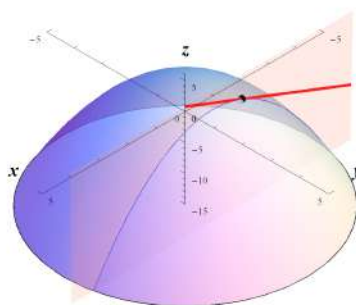
$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$



Obr. 2.1:

Derivácia funkcie z vzhľadom na premennú x (y je konštanta) sa nazýva parciálnou deriváciou funkcie z vzhľadom na premennú x a označujeme ju $\frac{dz}{dx}$, $\frac{df}{dx}$, f'_x alebo $D_x f$.

Graficky, $\frac{df(x, y)}{dx}$ nám hovorí o zmene okamžitej rýchlosti, ak y považujeme za konštantu a pohybujeme sa v kladnom smere po osi x .



Obr. 2.2:

Z obrázka 2.2 vidíme, že keď sa pohybujeme v kladnom smere po osi $+x$ z bodu $(-1, 1)$, hodnota $\frac{df(x, y)}{dx}(-1, 1)$ je kladná, takže funkcia $f(x, y)$ je v tomto smere rastúca.

Parciálne derivácie funkcie $f(x, y)$ vzhľadom na premennú y .

Analogicky budeme teraz považovať x za konštantu a premennou bude len y , z bude teda funkciou len jednej premennej y .

Teraz môžeme definovať:

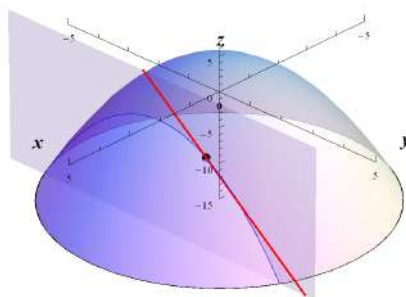


Definícia 2.2 Predpokladajme, že $z = f(x, y)$ je funkcia dvoch premenných. Potom parciálna derivácia funkcie $f(x, y)$ podľa premennej y at $[x_0, y_0]$ je daná vzťahom

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

za predpokladu, že daná limita existuje.

Podobne, derivácia funkcie z vzhľadom na premennú y (x je konštanta) sa nazýva parciálnou deriváciou funkcie z vzhľadom na premennú y a označujeme ju $\frac{dz}{dy}$, $\frac{df}{dy}$, f'_y or $D_y f$.



Obr. 2.3:

Z obrázka 2.3 vidíme, že keď sa pohybujeme v kladnom smere po osi $+y$ z bodu $(2, \frac{2}{3})$, hodnota $\frac{df(x, y)}{dx}(2, \frac{2}{3})$ je záporná, čiže funkcia $f(x, y)$ je v tomto smere klesajúca.

Graficky, $\frac{df(x, y)}{dy}$ nám hovorí o zmene okamžitej rýchlosti funkcie, keď x je konštanta a po osi y sa pohybujeme v jej kladnom smere.

Poznámka 2.1 V kalkule funkcie viac premenných používame symbol ∂ (tento zatočený- d symbol, ∂ , nazývame aj "del", na odlíšenie parciálnych derivácií od obyčajných derivácií funkcie jednej reálnej premennej, kde používame symbol d .

Aby sme vypočítali parciálnu deriváciu funkcie $f(x, y)$ vzhľadom na premennú x , musíme sa správať tak, ako keby všetky ostatné premenné (t.j. všetko okrem x) od ktorých funkcia $f(x, y)$ závisí, sú konštanty, a potom len jednoducho vypočítame deriváciu funkcie $f(x, y)$ deriváciu funkcie podľa premennej x ako deriváciu funkcie jednej reálnej premennej.



Všetky pravidlá pre derivácie (pravidlo pre súčin, pravidlo pre podiel, reťazové pravidlo, atď.) z kalkulu pre funkciu jednej reálnej premennej, platia aj pre funkciu viac premenných, len jednoducho sa tam budú nachádzať ešte ďalšie premenné.

Jednou z možných chybných predstáv je, že parciálna derivácia funkcie vzhľadom na konkrétnu premennú závisí len od tejto premennej. To je omyl. Výraz pre parciálnu deriváciu funkcie vzhľadom na premennú x môže závisieť na oboch premenných x aj y . To znamená, že hodnota parciálnej derivácie závisí od nielen polohy bodu, ale dokonca aj od ďalšej súradnice.

Výnimkou sú prípady aditívne separovateľných funkcií. Inými slovami, ak môžeme funkciu $F(x, y)$ ako $f(x) + g(y)$ kde $f(x)$ je funkcia jednej premennej x a $g(y)$ je funkcia jednej premennej y . Potom $\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = f'(x)$ a je nezávislá na premennej y a $\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = g'(y)$ a je nezávislá na premennej x .

Pre parciálne derivácie funkcie s viac ako dvomi premennými môžeme zovšeobecniť: pre každú vstupnú premennú dostávame parciálne derivácie funkcie vzhľadom na túto premennú. Postup derivovania ostáva rovnaký: všetky premenné, okrem tej, podľa ktorej derivujeme, považujeme za konštanty, a následne takým istým spôsobom derivujeme podľa ďalšej premennej.

Z geometrického hľadiska môžu byť parciálne derivácie funkcie interpretované ako dotyčnice ku grafu funkcie jednej premennej podľa ktorej derivujeme a fixujeme hodnotu druhej premennej.

Parciálne derivácia funkcie f'_x popisuje ako rýchlo sa mení $f(x, y)$ v smere osi x , a parciálna derivácia funkcie f'_y popisuje ako rýchlo sa mení $f(x, y)$ v smere osi y .

Vo všeobecnosti, ak $z = f(x, y)$ je funkciou viac ako dvoch premenných, potom parciálna derivácia funkcie $z = f(x, y)$ podľa ľubovoľnej premennej, pričom ostatné premenné považujeme za konštanty, je parciálnou deriváciou funkcie z podľa tejto premennej.

Parciálne derivácie funkcie viac premenných vyššieho rádu

Podobne ako v prípade jednej premennej, aj pre funkcie viacerých premenných máme parciálne derivácie vyšších rádov. Vo všeobecnosti platí, že parciálne derivácie prvého rádu $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ a $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ môžeme postupne opäť derivovať, a tak dostávame derivácie vyšších rádov.

Napríklad $\frac{\partial f^2(x, y)}{\partial x^2}$ je derivácia $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ podľa x . Pre funkciu dvoch premenných x a y , máme štyri parciálne derivácie druhého rádu: $\frac{\partial f^2(x, y)}{\partial x^2}$, $\frac{\partial f^2(x, y)}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial f^2(x, y)}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial f^2(x, y)}{\partial y^2}$.

Poznámka 2.2 Parciálne derivácie funkcie podľa rovnakej premennej derivujeme zľava do prava,



zatiaľčo zmiešané parciálne derivácie derivujeme sprava do ľava. V praxi na poradí parciálnych derivovacích funkcie záleží zriedka.

Veta 2.1 Ak sú obe parciálne derivácie $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ a $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ spojité, potom sa zmiešané parciálne derivácie rovnajú.

Poznámka 2.3

- Inými slovami, zmiešané parciálne derivácie sú vždy rovnaké (za predpokladu, že sú spojité), takže existujú vlastne len tri parciálne derivácie druhého rádu.
- Toto tvrdenie môžeme dokázať pomocou definície derivácie funkcie pomocou limity funkcie a viet o strednej hodnote. Detaily dôkazu sú nepodstatné, preto ich vynecháme.
- Parciálne derivácie druhého rádu môžeme ďalej derivovať a tak získať derivácie funkcie vyššieho rádu.

5. Aplikácie v každodennom živote

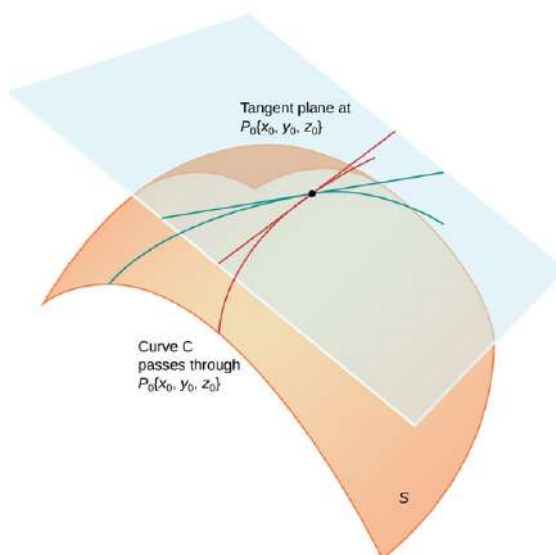
Dotyčnice ku grafu funkcie majú v každodennom živote veľa aplikácií, od architektúry cez inžinierstvo až po fyziku. Hovoríme, že dotyčnica je priamka, ktorá sa dotýka krivky v jednom bode. Tento bod sa nazýva dotykový bod.

Dotyková rovina reprezentuje plochu, ktorá obsahuje všetky dotyčnice ku krivke v bode $P_0 = [x_0, y_0, z_0]$, ktorý leží na ploche a dotyčnice ním prechádzajú. Dotyková rovina nám umožňuje predpovedať správanie sa plôch v určitých bodoch funkcie.

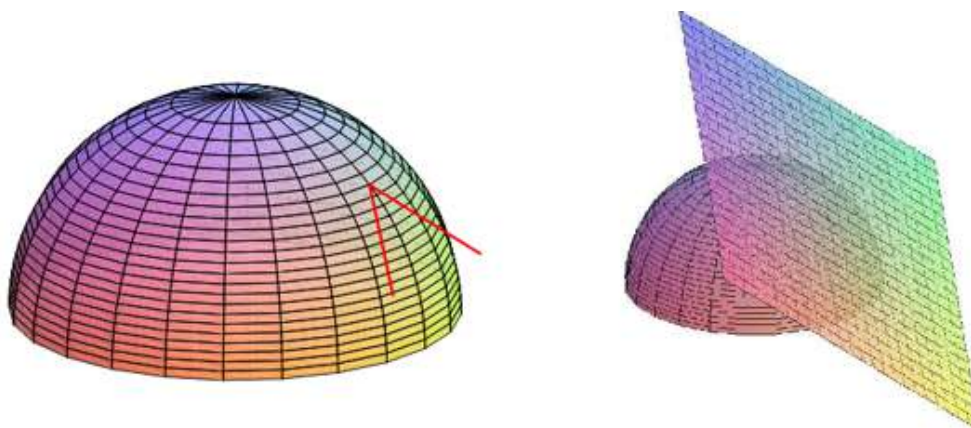
Definícia 2.3 Nech $P_0 = [x_0, y_0, z_0]$ je bod patriaci ploche S , a nech C je krivka prechádzajúca bodom P_0 a patriaca ploche S . Ak všetky dotyčnice k týmto krivkám v bode P_0 ležia v tej istej rovine, potom sa táto rovina nazýva dotyková rovina S v bode P_0 .

Definícia 2.4 Nech S je plocha definovaná diferencovateľnou funkciou $z = f(x, y)$, a nech $P_0 = [x_0, y_0]$ patrí do oboru definície funkcie $f(x, y)$. Potom rovnica dotykovvej roviny S v bode P_0 je daná rovnicou

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$



Obr. 2.4: Dotyková rovina k ploche S v bode P_0 obsahuje všetky dotyčnice ku krivkám v ploche S , ktoré prechádzajú bodom P_0



Obr. 2.5: Dotykové vektory a dotyková rovina

Dotyčnice majú viacero dôležitých aplikácií v rôznych oblastiach, najmä v matematike, fyzike, inžinierstve a geometrii. Niektoré aplikácie dotyčníc:

- Geometria a trigonometria
- Architektúra
- Inžinierstvo a dizajn
- Fyzika

Geometria atrigonometria

Dotyčnice zohrávajú dôležitú úlohu pri štúdiu kriviek. Sú to priamky, ktoré sa dotýkajú krivky v jednom bode, pričom sú kolmé na polomer krivky v tomto bode. Dotyčnice sa používajú na definovanie geometrických vlastností, ako sú polomer, priemer, chordy a dĺžka oblúka u kruhov.

Architektúra

Dotyčnice sa používajú pri navrhovaní kriviek v budovách, ako sú oblúky a kopuly. Architekti používajú dotyčnice na vytváranie kriviek, ktoré sú vizuálne príjemné a estetické.

Inžinierstvo a dizajn

Dotyčnice sa používajú na navrhovanie kriviek v cestách, mostoch a iných štruktúrach. Pomocou nich môžu inžinieri vytvárať krivky, ktoré sú bezpečné a efektívne na cestovanie. Krivky sa používajú v automobilovom dizajne, leteckom inžinierstve a civilnom inžinierstve na navrhovanie ciest, mostov a iných štruktúr s hladkými prechodmi a efektívnymi krivkami.

Fyzika

Dotyčnice sa používajú na analýzu pohybu objektov. Napríklad, dotyčnica k trajektórii projektilu v akomkoľvek bode predstavuje smer rýchlosti projektilu v tomto bode.

Dotyčnice v každodennom živote

- Navrhovanie parabolického oblúka – Parabolický oblúk je krivka, ktorá má tvar paraboly. Paraboly sa často používajú v architektúre na vytváranie oblúkov a kopúl.
- Navrhovanie kruhového mosta – Kružnicový most je most, ktorý má tvar kruhu. Kruhové mosty sa často používajú na premostenie riek a iných prekážok.
- Navrhovanie horskej dráhy – Horská dráha je navrhnutá tak, aby poskytla jazdcovi vzrušujúci zážitok. Inžinieri používajú dotyčnice na určenie tvaru trate. Dotyčnice zabezpečujú, že horská dráha je bezpečná a poskytuje jazdcovi hladký jazdu.
- Navrhovanie pretekárskej dráhy – Pretekárske dráhy sú navrhnuté tak, aby poskytli vodičovi náročný a vzrušujúci zážitok. Inžinieri používajú dotyčnice na určenie tvaru dráhy. Dotyčnice zabezpečujú, že dráha je bezpečná a poskytuje vodičovi spravodlivý závod.



- Navrhovanie golfového ihriska – Golfové ihriská sú navrhnuté tak, aby poskytli golfistom náročný a príjemný zážitok. Architekti používajú dotyčnice na určenie tvaru fairwayov a greenov. Dotyčnice zabezpečujú, že ihrisko je vhodné pre golfistov a výzvy, ktoré ponúka
- Navrhovanie skateboardového parku – Skateboardové parky sú navrhnuté tak, aby poskytli skateboardistom bezpečné a zábavné miesto na tréning. Architekti používajú dotyčnice na určenie tvaru rampa a bazénov. Dotyčnice zabezpečujú, že skateboardový park je bezpečný a ponúka skateboardistom rôzne výzvy.

6. Literatúra

- [1] https://www.sfu.ca/math-coursenotes/Math%20157%20Course%20Notes/sec_PartialDifferentiation.html
- [2] https://web.northeastern.edu/dummit/docs/calc3_2_partial_derivatives.pdf
- [3] <https://vipulnaik.com/math-195/>
- [4] https://nucinkis-lab.cc.ic.ac.uk/HELM/HELM_Workbooks_26-30/WB28-all.pdf
- [5] https://www.sfu.ca/math-coursenotes/Math%20157%20Course%20Notes/sec_PartialDifferentiation.html
- [6] https://math.libretexts.org/Courses/Mount_Royal_University/MATH_3200%3A_Mathematical_Methods/6%3A__Differentiation_of_Functions_of_Several_Variables/6.4%3A__Tangent_Planes_and_Linear_Approximations
- [7] <http://prac.im.pwr.wroc.pl/~kajetano/AM2/fun2var/fun2var-3.html>
- [8] <https://www.storyofmathematics.com/partial-derivatives/>
- [9] Miller, Jeff (2009-06-14). "Earliest Uses of Symbols of Calculus". Earliest Uses of Various Mathematical Symbols. Retrieved 2009-02-20
- [10] <https://www.geeksforgeeks.org/tangents-in-everyday-life/>
- [11] Videos: <https://www.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/multivariable-derivatives/partial-derivatives/v/partial-derivatives-introduction>

3 TĚMA: Gradient skalárneho poľa

1. Zdôvodnenie výberu témy

Vektorové pole alebo skalárne pole môžeme diferencovať vzhľadom na pozíciu tromi spôsobmi, aby sme vytvorili ďalšie vektorové alebo skalárne pole. Existujú tri derivácie: gradient skalárneho poľa, divergencia vektorového poľa a rotácia vektorového poľa.

Tento modul sa zaoberá gradientom skalárneho poľa.

2. Historické pozadie

Gradient ako prvý symbolom Δ označil v roku 1846 Hamilton. Do roku 1870 bol označovaný ∇ , čo je obrátené delta, a preto bol nazývaný "atle". V roku 1871 Maxwell napísal: "Množina ∇P je vektor. S veľkou úctou sa odvažujem nazvať to sklony P . Označenie "sklon" sa dlho nepoužívalo a bolo nahradené označením "gradient". "Gradient" pochádza zo slova "grade", čo označuje sklon cesty alebo povrchu. Označenie "del" sa prvýkrát objavilo v tlači v roku 1901, vo *Vector Analysis, A text-book for the use of students of mathematics and physics founded upon the lectures of J. Willard Gibbs*, od E.B. Wilsona.

3. Výsledky vzdelávania

Po dokončení tohto modulu by študenti mali byť schopní:

- nájsť gradient skalárneho poľa.
- vypočítať smerovú deriváciu.

Prerekvizity: Pred začatím tohto modulu by mali študenti:

- poznať pojem funkcie dvoch alebo troch premenných
- poznať pojem parciálnej diferenciácie
- poznať pojmy skalárneho a vektorového poľa.

4. Teoretické základy

Gradient

Definícia 3.1 Gradient skalárneho poľa $f(x, y, z)$ je vektor

$$\text{grad}f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k},$$

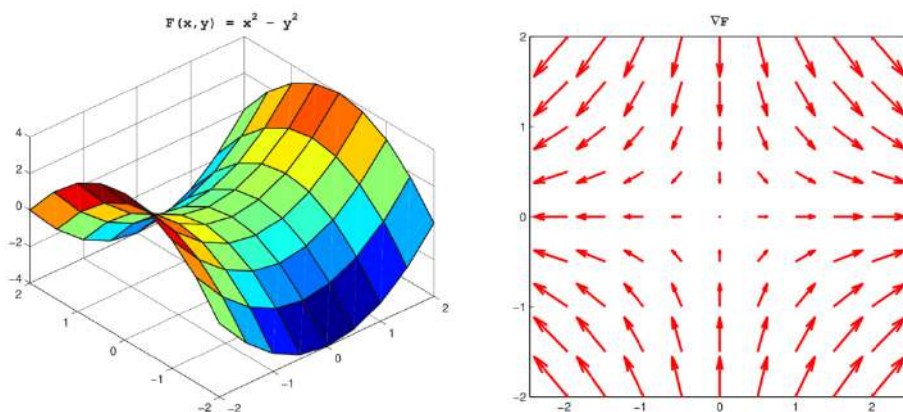
where $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sú jednotkové vektory v smeroch súradnicových osí x, y, z .

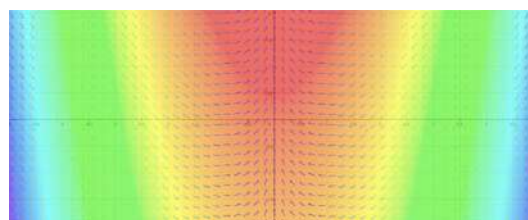
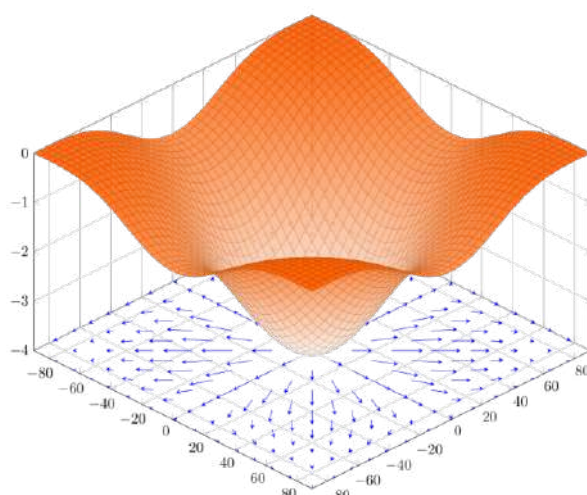
V niektorých aplikáciách je zvykom predstavovať gradient ako riadkový alebo stĺpcový vektor jeho súradníc v kartézskom súradnicovom systéme. Často sa namiesto $\text{grad}f$, používa zápis ∇f . (∇ je vektorový diferenciálny operátor nazývaný "del" alebo "nabla" definovaný ako $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}$. Ako vektorový diferenciálny operátor zachováva charakteristiky vektora a zároveň vykonáva diferenciáciu.)

Ak f je funkciou viac premenných, vo všeobecnosti n , gradient je definovaný analogicky: prvok vektora v ľubovoľných súradniciach x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, je parciálnou deriváciou $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ funkcie f podľa premennej x_i .

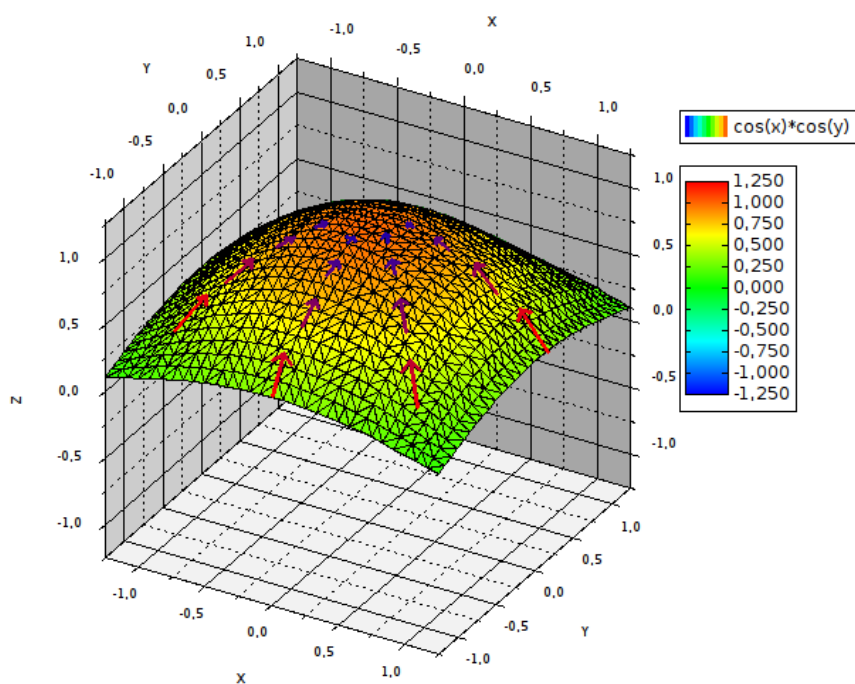
Funkcia f skalárnou funkciou (skalárne pole) ale $\text{grad}f$, vektorová funkcia (vektorové pole): má taký istý počet argumentov ako funkcia f , a výsledný vektor má taký istý počet súradníc..

V nasledujúcich obrázkoch sú zobrazené rôzne reprezentácie skalárnych funkcií a príslušných gradientových vektorových polí. Prvý obrázok ukazuje funkciu $f(x, y) = x^2 - y^2$, ďalší obrázok zobrazuje gradient funkcie $f(x, y) = -(\cos^2 x + \cos^2 y)^2$ ako projekciu vektorového poľa na dolnú rovinu, pričom gradient vyjadrený modrými šípkami ukazuje smer najväčšej zmeny skalárnej funkcie.





V ďalšom obrázku je gradient znázornený na povrchu - červené šípky predstavujú najväčšiu rast, modré šípky predstavujú pomalší rast a na vrchole je rast aj gradient nulový.



Vlastnosti gradientu:

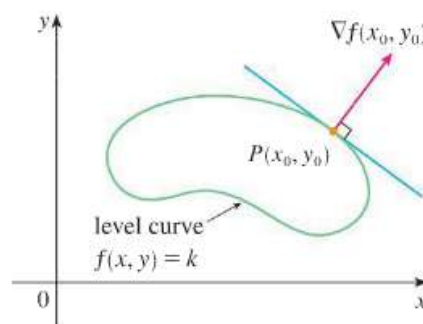
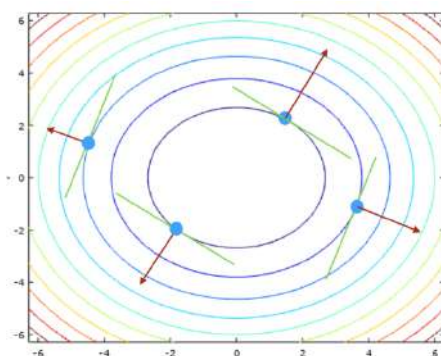
- **Linearita:** Gradient je lineárny v tom zmysle, že f_i , $i = 1, 2, \dots, n$ sú reálne diferencovateľné funkcie, a $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$ sú konštanty, potom

$$\text{grad}(c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_n f_n) = c_1 \text{grad} f_1 + c_2 \text{grad} f_2 + \dots + c_n \text{grad} f_n.$$

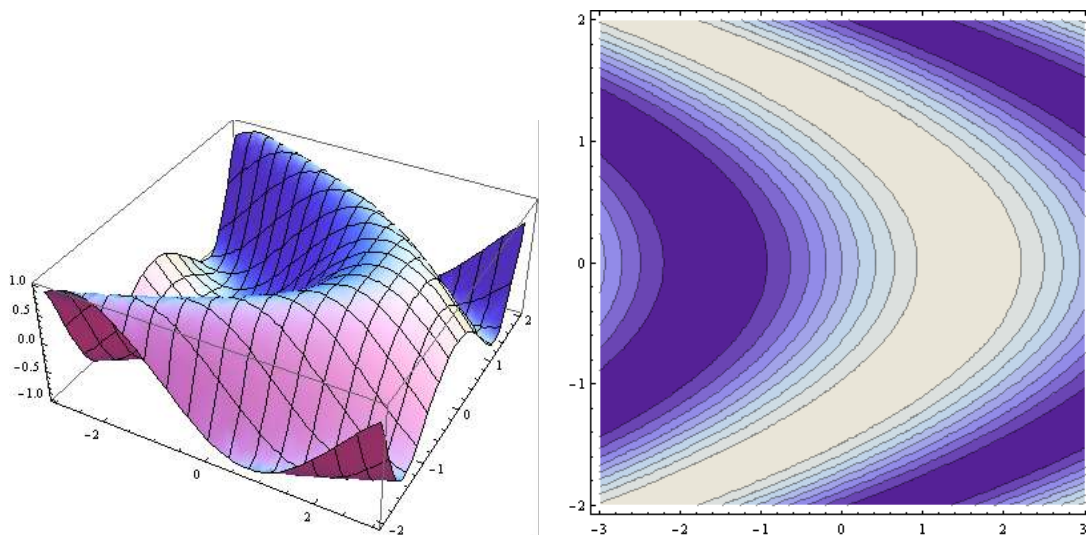
- **Pravidlo súčinu:** Ak f and g sú reálne diferencovateľné funkcie, potom pravidlo súčinu hovorí, že súčin $f g$ je diferencovateľná funkcia, a

$$\text{grad}(f g) = f \text{grad} g + g \text{grad} f.$$

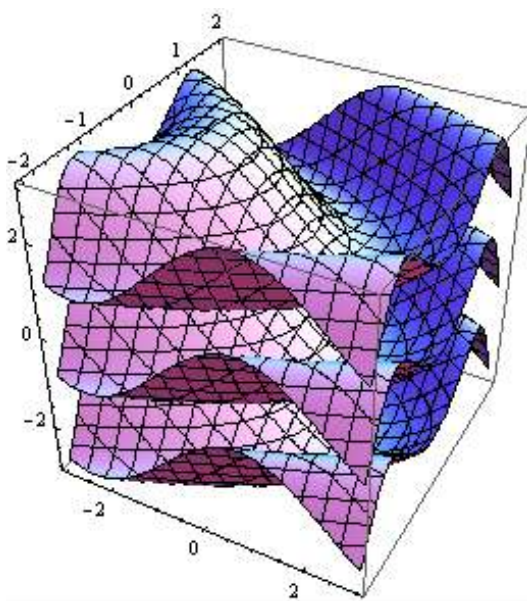
Vektor $\text{grad} f$ určuje veľkosť a smer najväčšej zmeny funkcie f v ľubovoľnom bode A . Gradientový vektor $\nabla f(x_0, y_0)$ je ortogonálny (alebo kolmý) na krivku $f(x, y) = k$ v bode $A = [x_0, y_0]$. Podobne, gradientový vektor $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ je ortogonálny na rovinu $f(x, y, z) = k$ v bode $A = [x_0, y_0, z_0]$. Nasledujúci obrázok zobrazuje kladný smer gradientového vektora v rôznych bodoch vrstevníc funkcie f_2 . Smer pozitívneho gradientu je označený červenou šípku. Dotyčnica k vrstevnici je znázornená zelenou.



V nasledujúcom obrázku je zobrazená funkcia $f(x, y) = \sin(x + y^2)$ a jej vrstevnice.



V nasledujúcom obrázku sú zobrazené ekvipotencionálne hladiny funkcie $f(x, y, z) = \sin(x + y^2) + z$.



Keďže vektor gradientu je $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$, dotyková rovina k funkcii $f(x, y, z) = k$ v bode $A = [x_0, y_0, z_0]$ má rovnicu

$$\frac{\partial f(A)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(A)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial f(A)}{\partial z}(z - z_0) = 0.$$

Ak potrebujeme priamku, ktorá je kolmá na rovinu v bode - normálu, je ľahké ju nájsť, ak si uvedomíme, že na rovnicu priamky nám stačí bod a rovnobežný vektor. Keďže chceme priamku v bode $A = [x_0, y_0, z_0]$ vieme, že bod musí ležať na priamke a vieme, že $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ je normálový vektor, ktorý je kolný na plochu, a teda bude rovnobežný s touto priamkou. Preto rovnica normály je:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + t \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} \\ y &= y_0 + t \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} \\ z &= z_0 + t \frac{\partial f(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}, \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

V predchádzajúcom sme zaviedli gradient funkcie v pravouhlom súradnicovom systéme. Gradient môže byť zavedený aj v iných súradnicových systémoch, napr. pomocou polárnych, cylindrických a sférických súradníc. V polárnych súradniciach je gradient daný rovnicami

$$\text{grad}f(r, \varphi) = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi,$$



v cylindrických súradniciach je gradient daný

$$\text{grad}f(r, \varphi, z) = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z,$$

kde r je osová vzdialenosť, φ je azimutálny alebo azimutový uhol (orientovaný uhol, ktorý má definovaný smer merania veľkosti), z je osová súradnica a $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ sú jednotkové vektory v smere súradnicových osí.

V sférických súradniciach je gradient daný

$$\text{grad}f(r, \varphi, \theta) = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta,$$

kde r veľkosť polomeru, φ je azimutový uhol a θ je polárny uhol $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta$ sú opäť jednotkové vektory v smere súradnicových osí.

Derivácia v smere vektora

Zmena funkcie f v danom smere (špecifikovanom ako jednotkový vektor \vec{l}) je určená skalárnym súčinom $\text{grad}f \cdot \vec{l}$. Tento skalárny súčin sa nazýva smerová derivácia (resp. derivácia v smere vektora).

Definícia 3.2 Ak $\vec{l} = (l_x, l_y)$ je jednotkový vektor, smerová derivácia funkcie f v smere vektora \vec{l} v ľubovoľnom bode $A = [x_0, y_0]$, označovaná $\frac{df(A)}{d\vec{l}}$, je definovaná ako

$$\frac{df(A)}{d\vec{l}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + hl_x, y_0 + hl_y) - f(x_0, y_0)}{h},$$

za predpokladu, že limita existuje.

Analogicky je smerová derivácia funkcie f definovaná aj pre funkciu viac premenných. Keď \vec{l} je jednotkový vektor v jednom zo smerov súradníc, smerová derivácia sa zjednoduší na príslušnú parciálnu deriváciu.

Veta 3.1 Ak \vec{l} je jednotkový vektor a f ktorá má všetky parciálne derivácie spojité, potom smerová derivácia spĺňa

$$\frac{df}{d\vec{l}} = \text{grad}f \cdot \vec{l}.$$

Tento výsledok vyžaduje, aby vektor \vec{l} bol jednotkový vektor. Ak požadovaný smerový vektor nie je jednotkový, najskôr je potrebné ho normalizovať.

Niekedy udávame smer zmeny x a y ako uhol. Napríklad môžeme povedať, že chceme rýchlosť zmeny funkcie f v smere uhla α . Jednotkový vektor, ktorý ukazuje týmto smerom je daný $\vec{l} = (\cos \alpha, \sin \alpha)$. V trojrozmernom priestore $\vec{l} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, kde α, β, γ sú uhly, ktoré vektor \vec{l} zvierá so súradnicovými osami, nazývame ich smerové kosínusy. V takomto prípade sa smerová derivácia počíta:

$$\frac{df(x, y)}{d\vec{l}} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \alpha, \quad \frac{df(x, y, z)}{d\vec{l}} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma.$$

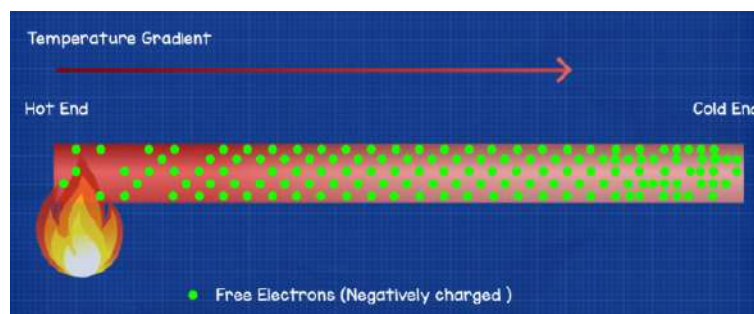
Z teórie gradientu pre výpočet smerových derivácií môžeme odvodiť niekoľko dôsledkov, ako veľkosť smerovej derivácie závisí na smere vektora \vec{l} :

Dôsledky: Predpokladajme, že f diferencovateľná funkcia s gradientom $\text{grad} f$ a \vec{l} je jednotkový vektor. Potom platí:

1. Maximálna hodnota $\frac{df}{d\vec{l}}$ je keď jednotkový vektor \vec{l} má smer v smere $\text{grad} f$, ak $\text{grad} f \neq 0$, a maximálna hodnota je $|\text{grad} f|$. Inými slovami, gradient ukazuje smer, v ktorom funkcia f rastie najrýchlejšie.
2. Minimálna hodnota $\frac{df}{d\vec{l}}$ je keď jednotkový vektor \vec{l} má opačný smer ako $\text{grad} f$, if $\text{grad} f \neq 0$, a minimálna hodnota je $-|\text{grad} f|$. Inými slovami, gradient ukazuje smer, v ktorom funkcia f klesá najrýchlejšie.
3. Hodnota $\frac{df}{d\vec{l}}$ je nulová vtedy a len vtedy, ak \vec{l} je ortogonálny ku $\text{grad} f$.

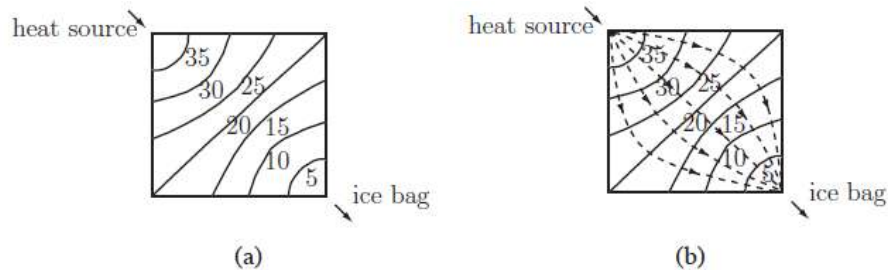
5. Aplikácie v každodennom živote

Predstavme si miestnosť, kde teplota je daná skalárnym poľom, T , takže v každom bode $[x, y, z]$ je teplota $T(x, y, z)$, nezávislá od času. V kažom bode miestnosti, gradient T v danom bode ukazuje smer, v ktorom teplota rasti najrýchlejšie, keď sa pohybujeme z bodu $[x, y, z]$. Veľkosť gradientu určuje, ako rýchlo teplota rastie v tomto smere.

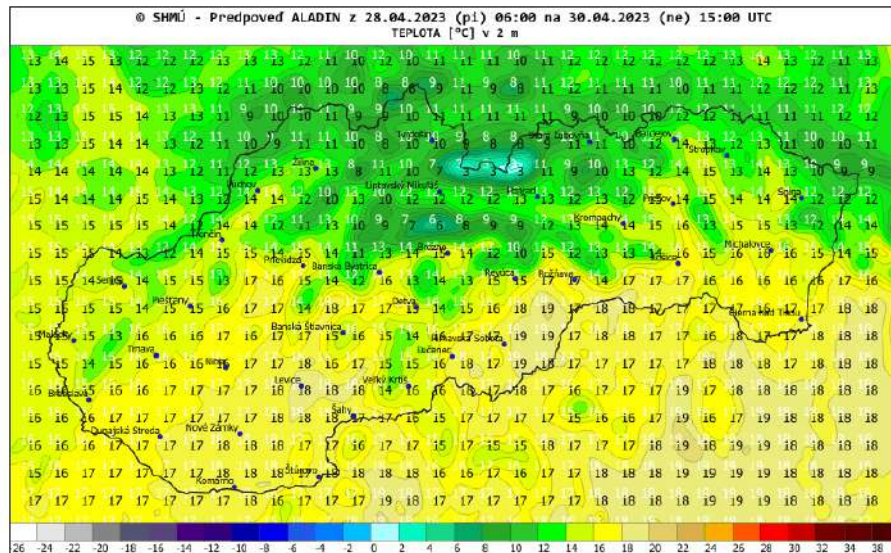




Na nasledujúcom obrázku sú zobrazené izotermy a línie prúdu tepla pre kovovú dosku. Smer prúdu tepla je pozdĺž prúdových čiar, ktoré sú kolmé na izotermy (bodkované čiary na obrázku (b)); tento prúd tepla je úmerný vektorovému poľu $\text{grad}f$.



Tiež sa často zverejňujú denné mapy, ktoré ukazujú teplotu v celej krajine pomocou izoterm. Príkladom je nasledujúci obrázok.



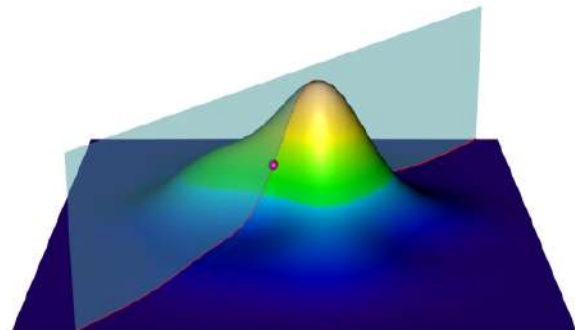
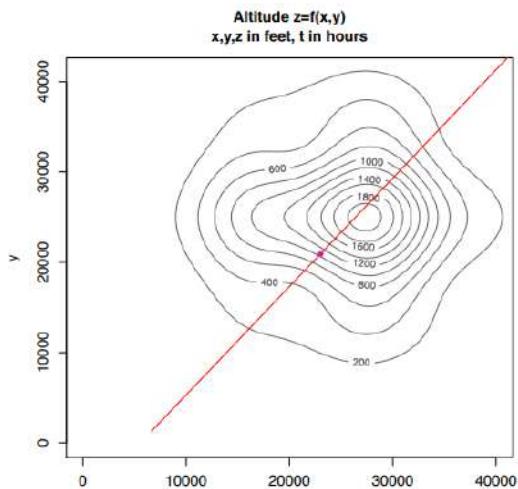
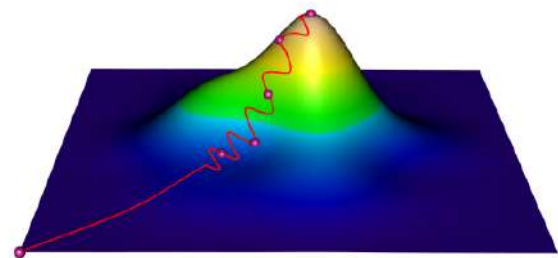
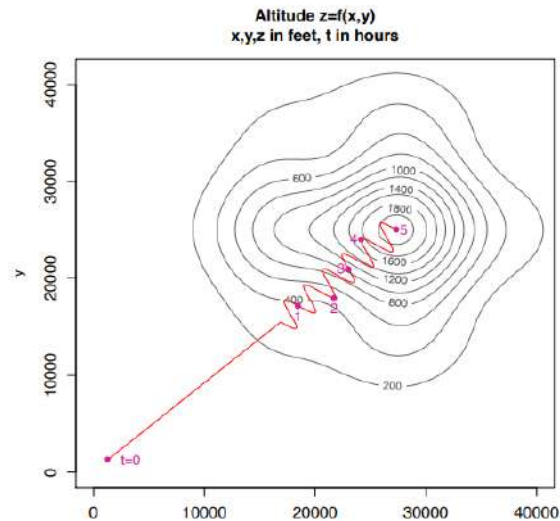
Predstavme si povrch, ktorého výška nad hladinou mora v bode $[x, y]$ is $f(x, y)$. Gradient funkcie f v bode je vektor, ktorý ukazuje smer najstrmšieho svahu alebo sklonu v tomto bode. Strmosť svahu v tomto bode je daná veľkosťou gradientového vektora.

Gradient sa tiež dá využiť na meranie toho, ako sa skalárne pole mení v iných smeroch, nielen v smere najväčšej zmeny, tým, že sa vezme skalárny súčin. Predpokladajme, že najstrmší svah na kopci je 40%. Cesta, ktorá ide priamo do kopca, má sklon 40%, ale cesta, ktorá ide okolo kopca pod uhlom, bude mať menší sklon. Napríklad, ak cesta zvierá s pohorím uhol 60° (keď sú obe smernice premietnuté do horizontálnej roviny), potom sklon pozdĺž cesty bude



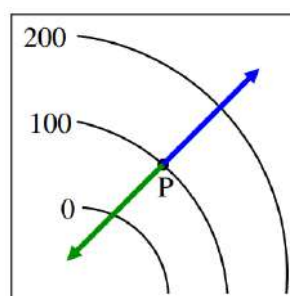
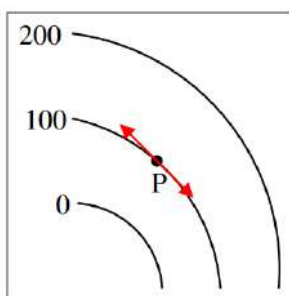
skalárny súčin medzi gradientovým vektorom a jednotkovým vektorom pozdĺž cesty, teda 40% krát kosínus 60° , alebo 20%.

Vo všeobecnosti, ak je funkcia f diferencovateľná, potom gradient funkcie f skalárne vynásobený jednotkovým vektorom, dá sklon svahu v smere tohto vektora, teda smerovú deriváciu f v smere jednotkového vektora \vec{l} .

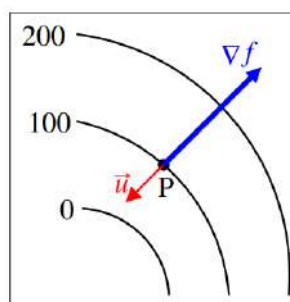
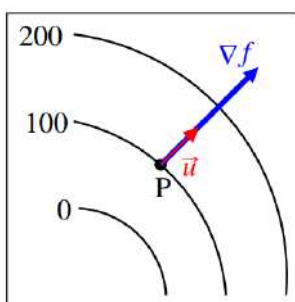


V bode P , v smere vektora \vec{u}

- The **silový turista** chce tú najstrmšiu cestu do kopca.
- The **silový lyžiar** chce najstrmší zjazd.
- The **lenivý turista** sa chce vyhnúť akejkoľvek zmene nadmorskej výšky.



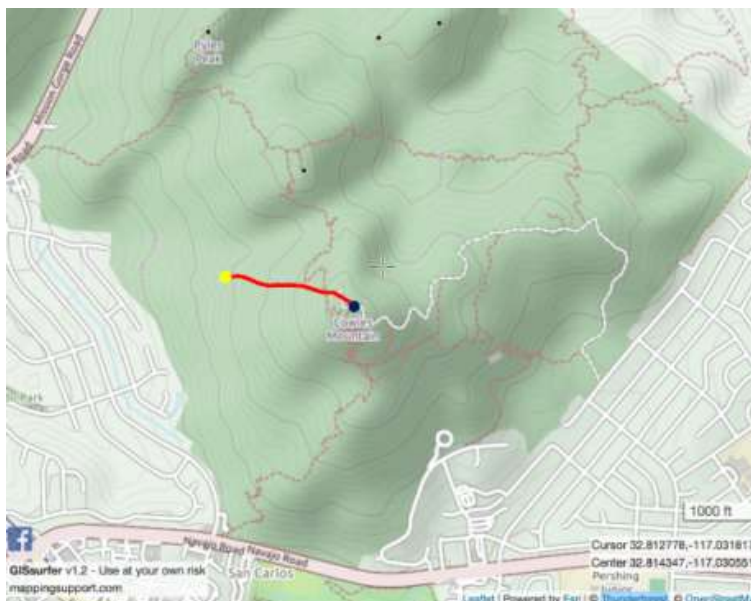
Aby sa lenivý turista vyhol zmene nadmorskej výšky, kráča pozdĺž rovinnej krivky. V bode P , je smer \vec{u} je dotyčnicou ku krivke, čo dáva dve možnosti uvedené vyššie. Na tejto ceste nie je žiadna zmena nadmorskej výšky, t. j. $\frac{df}{d\vec{u}} = 0$, tak $\text{grad}f \cdot \vec{u} = 0$, tak $\text{grad}f \perp \vec{u}$ - gradient je kolmý na hladinovú krivku.



V prípade silového lyžiara, je maximálna hodnota $\frac{df}{d\vec{u}}$ is $+|\text{grad}f|$, teda \vec{u} je jednotkový vektor v tom istom smere $\text{grad}f$ a $\vec{u} = \frac{\text{grad}f}{|\text{grad}f|}$. Toto je smer najstrmšieho stúpania alebo najrýchlejšieho stúpania. V prípade silového lyžiara je \vec{u} jednotkový vektor v opačnom smere ako $\text{grad}f$ a $\vec{u} = -\frac{\text{grad}f}{|\text{grad}f|}$. Toto je smer najstrmšieho alebo najrýchlejšieho poklesu.

Úloha:

- Cesta najstrmšieho vzostupu: Nakreslite cestu začínajúcu v bode (žltá), ktorá neustále mení smer, aby zostala kolmá na vrstevnice v smere stúpania (rastúcej hodnoty).
- Cesta najstrmšieho zostupu: Podobne, ale ísť dole kopcom.



Príklad 3.1 Predpokladajme, že výška kopca nad hladinou mora je daná funkciou $f(x, y) = 1000 - 0.01x^2 - 0.02y^2$. Ak ste v bode $(60, 100)$ v akom smere sa výška mení najrýchlejšie? Aká je maximálna rýchlosť zmeny výšky v tomto bode? Riešenie: Maximálna rýchlosť zmeny výšky nastane v smere vektora gradientu $\text{grad}f(x, y) = (-0.02x, -0.04y)$, $\text{grad}f(60, 100) = (-1.2, -4)$. Maximálna rýchlosť zmeny výšky v tomto bode je $|\text{grad}f(60, 100)| = \sqrt{(-1.2)^2 + 4^2} = \sqrt{17.44} = 4.176$. Poznamenajme, že sa nachádzame v bode $(60, 100)$ a smer maximálnej zmeny výšky je daný vektorom $(-1.2, -4)$. Keďže obidve zložky sú negatívne, vyzerá to tak, že smer maximálnej zmeny ukazuje smerom hore po kopci, smerom k stredu, nie od kopca.

6. Literatúra

- [1] <https://en.wikipedia.org/wiki/Gradient>
- [2] <https://machinelearningmastery.com/a-gentle-introduction-to-partial-derivatives-and-gradient-vectors/>
- [3] https://mathweb.ucsd.edu/~gptesler/20c/slides/20c_dirderiv_f18-handout.pdf
- [4] https://nucinkis-lab.cc.ic.ac.uk/HELM/HELM_Workbooks_26-30/WB28-all.pdf
- [5] https://web.northeastern.edu/dummit/docs/calc3_2_partial_derivatives.pdf



Co-funded by
the European Union



- [6] <https://tutorial.math.lamar.edu/Classes/CalcIII/PartialDerivAppsIntro.aspx>
- [7] <https://people.math.sc.edu/meade/PROJECT/DRAFTS/SMch16.pdf>
- [8] https://theengineeringmindset.com/temperature-sensors-explained/temperature-gradient/#google_vignette
- [9] Videos: <https://www.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/multivariable-derivatives/gradient-and-directional-derivatives/v/gradient>

4 TĚMA: Lokálne, viazané a absolútne extrémne funkcie viac premenných

1. Zdôvodnenie výberu témy

Používanie viazaných extrémov funkcií viac premenných sa často vyskytuje v optimalizačných úlohách, kde je potrebné maximalizovať alebo minimalizovať danú funkciu za určitých podmienok. V praxi sa viazané extrémne funkcie viac premenných bežne vyskytujú v ekonomických, inžinierskych a matematických problémoch, ako aj pri hľadaní matematického modelu pre daný problém v týchto oblastiach.

2. Historické pozadie

Funkcie viacerých premenných sú funkcie, ktoré majú viac než jeden vstupný argument. Tento koncept bol zavedený v starovekom Grécku, kde matematici ako Archimedes a Euklid používali viacero premenných na popis geometrických tvarov a pohybu. Za objav diferenciálneho počtu možno považovať indického matematika Bhaskaru (1114–1185), ktorý demonštroval príklad toho, čo dnes nazývame diferenciálnym koeficientom, a tiež poskytol základnú myšlienku dnešného Rolleho vety. Indický matematik Madhava, spolu s ďalšími matematikmi zo školy Kerala v 14. storočí, vykonal mnoho zaujímavých výskumov v oblasti diferenciálneho a integrálneho počtu. Skutočný pokrok však nastal v 17. storočí, keď Leibniz a Newton pracovali na tom, čo sa dnes považuje za objav diferenciálneho a integrálneho počtu. Prvé písomné zmienky o diferenciálnom počte sa nachádzajú v listoch, ktoré si vymieňali Leibniz a L'Hospital v roku 1695, kde Leibniz spomenul deriváciu poriadku 0,5. Vtedy ešte nemohol predpokladať jej význam alebo spôsob výpočtu, avšak poznamenal, že jedného dňa z tohto paradoxu vyplývajú užitočné praktické dôsledky. Ďalší významní vedci sa tejto myšlienky držali, medzi ktorými boli obri ako Bernoulli, Euler, Laplace, Fourier, Abel, Riemann a Cauchy. Dnes majú funkcie viacerých premenných dôležitú úlohu v mnohých oblastiach, ako sú matematika, fyzika, ekonomika, informatika, inžinierstvo a ďalšie vedy. Funkcie viacerých premenných sa používajú na modelovanie reálnych situácií a umožňujú výpočty komplexných systémov a procesov, ktoré by bolo ťažké alebo nemožné vyriešiť pomocou funkcií jednej premennej.

3. Výsledky vzdelávania

Po absolvovaní tohto modulu by mali študenti byť schopní

- definovať a používať techniky výpočtu lokálnych extrémov funkcií viacerých premenných,
- určiť obmedzené lokálne extrémny funkcie dvoch premenných,
- nájsť maximálne a minimálne hodnoty funkcie viac premenných na danej podmnožine M jej definičného oboru,
- aplikovať získané poznatky v praxi.

Prerekvizity: Pred začatím tohto modulu by študenti mali poznať:

- princíp diferenciacie funkcie jednej premennej,
- funkcie viacerých premenných,
- parciálne derivácie funkcií viacerých premenných

4. Teoretické základy

Lokálne extrémny funkcií dvoch premenných

Existujú dva typy lokálnych extrémov funkcie dvoch premenných: lokálne maximum a lokálne minimum.

Lokálne maximum funkcie $f(x, y)$ sa nachádza v bode (a, b) z definičného oboru, ak pre každý bod (x, y) z definičného oboru v určitom okolí bodu (a, b) platí, že $f(x, y) \leq f(a, b)$.

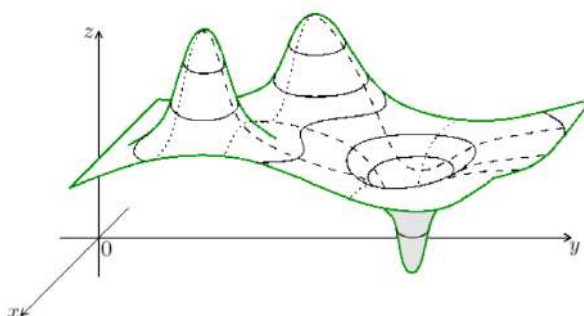
Lokálne minimum funkcie $f(x, y)$ sa nachádza v bode (a, b) z definičného oboru, ak pre každý bod (x, y) z definičného oboru v určitom okolí bodu (a, b) platí, že $f(x, y) \geq f(a, b)$.

Existuje viacero metód na nájdenie lokálnych extrémov funkcie dvoch premenných, ako je metóda parciálnych derivácií, Hessianova matica alebo Lagrangeove multiplikátory. Tieto metódy umožňujú určiť body, v ktorých funkcia prechádza z rastúcej na klesajúcu alebo z klesajúcej na rastúcu, a tým určiť, či ide o lokálne maximum alebo minimum. Nech $f(x, y)$ je funkcia so spojivými druhými parciálnymi deriváciami v okolí bodu (a, b) . Hessianova matica funkcie f je matica druhých parciálnych derivácií, a determinant Hessianovej matice (Hessian) sa vypočíta ako:



$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

Potom platí: Ak determinant Hessianovej matice funkcie f v bode (a, b) je kladný a druhá parciálna derivácia podľa x v bode (a, b) je kladná, potom funkcia f má lokálne minimum v bode (a, b) . Ak determinant Hessianovej matice funkcie f v bode (a, b) je kladný a druhá parciálna derivácia podľa x v bode (a, b) je záporná, potom funkcia f má lokálne maximum v bode (a, b) . Ak determinant Hessianovej matice funkcie f v bode (a, b) je záporný, potom funkcia f nemá lokálny extrém v bode (a, b) . Tento test nám umožňuje určiť lokálne extrémym funkcie dvoch premenných, ak je funkcia dostatočne hladká a má kontinuálne druhé parciálne derivácie v okolí bodu (a, b) . Ak je determinant Hessianovej matice nulový, je potrebné použiť iné metódy na určenie lokálnych extrémov.



Viazané lokálne extrémym funkcií dvoch premenných

Problémom je nájsť bod A v množine M , taký, že funkčná hodnota $f(A)$ je najväčšia alebo najmenšia v porovnaní s hodnotami f v bodoch množiny M , ktoré ležia blízko bodu A . Bod A sa nazýva bodom viazaného extrémym. Definujeme viazaný extrém funkcií dvoch premenných takto:

Nech f je funkcia dvoch premenných definovaná na $D(f) \supset E^2$ a nech množina $V = [x, y] \in D(f) : g(x, y) = 0 \supset D(f)$ je daná. Podmienka určená rovnicou $g(x, y) = 0$, ktorá je splnená pre všetky body z definičného oboru funkcie f v množine V , sa nazýva väzba. Extrémym funkcie f , dosiahnuté na množine $V \supset D(f)$, určené väzboou, sú viazané lokálne extrémym funkcie f .

Bod $A = [x_0, y_0]$ sa nazýva bodom viazaného lokálneho maxima (minima) funkcie f pre väzbu $g(x, y) = 0$, ak existuje také okolie $O_\epsilon(A)$ bodu A , že pre všetky $X \in O_\epsilon(A)$, ktorých súradnice spĺňajú danú väzbu, platí $f(X) \leq f(A)$ ($f(X) \geq f(A)$). V prípade ostrých nerovností hovoríme o ostrom viazanom lokálnom maxime alebo minime. Viazané lokálne minimum a maximum funkcie sa spoločne nazývajú viazané lokálne extrémny funkcie.

Ako určiť viazané lokálne extrémny funkcie $f(x, y)$?

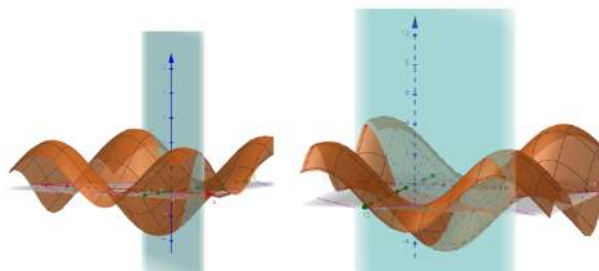
1. Premenná y môže byť vyjadrená z väzby $g(x, y) = 0$ ako funkcia premennej x , $y = h(x)$. Táto funkcia môže byť dosadená do funkcie $f(x, y)$, čím získame zloženú funkciu jednej premennej x , definovanú na množine V , teda $f(x, h(x)) = F(x)$. Všetky lokálne extrémny funkcie $F(x)$ na množine V sú zároveň viazané lokálne extrémny $f(x, y)$ na množine V .

2. Premenná x môže byť vyjadrená z väzby $g(x, y) = 0$ ako funkcia premennej y , $x = h(y)$. Táto funkcia môže byť dosadená do funkcie $f(x, y)$, čím získame zloženú funkciu jednej premennej y , definovanú na množine V , teda $f(h(y), y) = F(y)$. Všetky lokálne extrémny funkcie $F(y)$ na množine V sú zároveň viazané lokálne extrémny $f(x, y)$ na množine V .

3. V prípade, že žiadnu z premenných x alebo y nemožno vyjadriť z väzby $g(x, y) = 0$ a nie je možné ju vyjadriť v závislosti od druhej, môže sa použiť metóda Lagrangeových multiplikátorov. Definujeme pomocnú funkciu nazývanú Lagrangeova funkcia: $L(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$, kde λ je ľubovoľná konštanta nazývaná Lagrangeov multiplikátor. Funkcia $L(x, y)$ je definovaná na množine $D(f)$, a navyše, pre všetky body množiny V platí $L(x, y) = f(x, y)$ ako $g(x, y) = 0$ v bodoch množiny V .

Ak akýkoľvek bod $A = [x_0, y_0] \in V$ je bodom lokálneho extrémny funkcie $L = f + \lambda g$, potom bod A je bodom viazaného lokálneho extrémny funkcie f pre väzbu $g(x, y) = 0$.

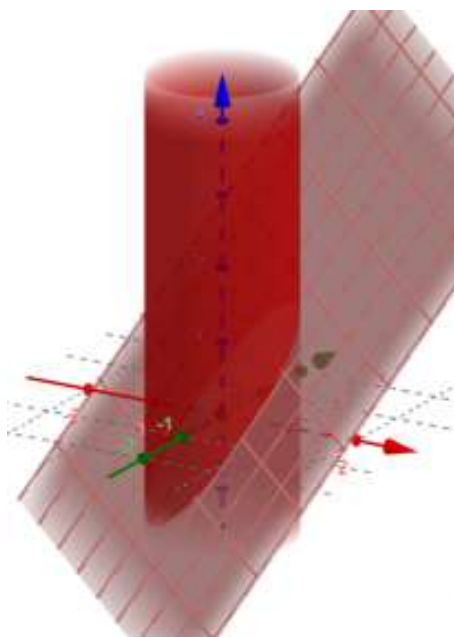
Geometrická interpretácia viazaných lokálnych extrémny funkcie f sú hodnoty z -súradníc extrémny umiestnených na krivke, ktorá je priesečníkom grafu funkcie $G(f)$ s valcovou plochou určenou krivkou definovanou v rovine xy danou väzbou, pričom čiary na tejto ploche sú v smere z -ovej osi.



Globálne extrémny funkcie viac premenných

Na určenie maximálnych a minimálnych hodnôt viac premennej funkcie na danej podmnožine M jej definičného oboru. Maximálne a minimálne hodnoty funkcie na M určujeme a vyberáme nasledovne:

- i) všetky lokálne extrémny funkcie dvoch premenných na podmnožine M ,
- ii) všetky viazané lokálne extrémny na hranici M ,
- iii) určením hodnôt na hranici M , kde funkcia dosahuje svoje maximálne a minimálne hodnoty.



5. Aplikácie v každodennom živote

- V obchodovaní môže byť užitočné venovať osobitnú pozornosť extrémnym cenovým hladinám – ako sú najvyššie a najnižšie ceny na trhu – aby bolo možné reagovať na príležitosti na



nákup alebo predaj. V oblasti financií môžu extrémne hodnoty tiež súvisieť s rizikom. Napríklad rizikový kapitál môže byť použitý na financovanie nových a inovatívnych projektov, ale môže byť tiež spojený s vysokými stratami a neúspechom.

- V lekárskej praxi sú extrémne prípady často kľúčové pri určovaní diagnózy a liečby pacienta. Lekári musia byť schopní rozpoznať a liečiť pacientov s najzávažnejšími príznakmi alebo stavmi.
- V priemyselnej výrobe môžu extrémne hodnoty tvoriť súčasť procesov kontroly kvality a monitorovania. Napríklad priemyselné zariadenia môžu byť navrhnuté na prácu pri extrémnych teplotách alebo pod tlakom, aby sa zabezpečila vysoká kvalita výroby.
- V oblasti počítačovej bezpečnosti môžu extrémne prípady súvisieť s najnebezpečnejšími hrozbami a útokmi na systémy. Bezpečnostné tímy musia byť schopné rozpoznať a riešiť tieto najväznejšie hrozby.
- V marketingu môžu extrémne prípady súvisieť s najúspešnejšími kampaniami a stratégiami, ktoré viedli k zvýšeniu predaja alebo povedomia o značke. Analyzovanie týchto prípadov môže byť užitočné pri navrhovaní nových kampaní.
- V poistení a finančnom plánovaní môžu extrémne prípady súvisiace s nehodami alebo stratou majetku byť kľúčové pri hodnotení rizika a určovaní poistného plánu.
- V meteorológii sú extrémne prípady, ako sú hurikány, tornáda alebo povodne, dôležité pre predpovedanie počasia a vydávanie varovaní. Meteorologické tímy musia byť schopné identifikovať a riešiť extrémne prípady, aby minimalizovali škody.
- Vo vede a výskume môžu byť extrémne prípady rozhodujúce pre objavovanie nových poznatkov a rozvoj vedeckých teórií. Napríklad extrémne podmienky, ako sú veľmi nízke alebo vysoké teploty, môžu byť využité na testovanie vlastností materiálov a objavovanie nových vedeckých prielomov.
- I v športe a fitness sa extrémne prípady týkajú najlepších výkonov a rekordov. Tréningové plány môžu byť navrhnuté na maximalizovanie výkonu športovcov a dosiahnutie extrémnych výsledkov, ako sú olympijské medaily alebo svetové rekordy.

6. Literatúra

[1] Velichová D.: Mathematics II, STU Bratislava 2016, ISBN 978-80-227-4532-1



- [2] <https://www.khanacademy.org/math/multivariable-calculus/applications-of-multivariable-derivatives/constrained-optimization/a/lagrange-multipliers-single-constraint>
- [3] <https://riunet.upv.es/bitstream/handle/10251/82485/Herrero%20-%20Constrained%20extrema%20of%20two%20variables%20functions.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- [4] <http://evlm.stuba.sk/~partner1/DBfiles/Lec6.pdf>
- [5] <https://www.youtube.com/watch?v=CQnZy4n85fE>
- [6] <https://math.fel.cvut.cz/en/people/habala/teaching/veci-ma2/ema2r3.pdf>
- [7] <https://sites.und.edu/timothy.prescott/apex/web/apex.Ch13.S8.html>
- [8] https://math.libretexts.org/Courses/Georgia_State_University_-_Perimeter_College/MATH_2215%3A_Calculus_III/14%3A_Functions_of_Multiple_Variables_and_Partial_Derivatives/Constrained_Optimization
- [9] <https://math.stackexchange.com/questions/3689844/finding-extrema-with-a-constraint-of-the-function>
- [10] <https://math.fel.cvut.cz/mt/txtz/1/txe3za1c.htm>

5 TĚMA: Prieniky telies

1. Zdôvodnenie výberu témy

Prieskum rezov mnohostena (definovaných ako prieniky roviny a mnohostena) predstavuje základný koncept geometrie. Tento postup je široko využívaný na analyzovanie geometrických vlastností telies a štruktúr výsledných roviných častí [Anwar, N., a Najam, F. A. (2017)]. Zlepšuje pochopenie trojrozsomernej geometrie študentmi a prehľbuje ich schopnosť interpretácie priestorových vzťahov medzi dvojrozmernými a trojrozmernými tvarmi. Rezy sú mimoriadne dôležité v mnohých oblastiach STEM. Ako poznamenal P. Lewis [P. Lewis, 2016], prierezový pohľad poskytuje dve rozdielne architektonické reprezentácie súborne: sekcia odhaľuje skryté detaily, ako je hrúbka stien a vertikálna organizácia, zatiaľ čo perspektíva umožňuje divákovi interpretovať vplyv sekcie z jediného bodu pohľadu. Prierezy sú taktiež široko používané v inžinierstve, kde sú nevyhnutné na pochopenie štruktúry a správania sa rôznych tvarov sekcií. Pomocou parametrových a obecných metód inžinieri vypočítavajú geometrické vlastnosti a analyzujú zložitejšie sekcie, čo je kľúčové pre zlepšovanie výkonu inžinierskych systémov [Smith, 2019]. Okrem toho sa prierezy používajú v počítačovej grafike [Schumaker, 1990], najmä na vytváranie realistických a detailných 3D modelov. Rezanie trojrozmerného objektu poskytuje dôležité dáta na výpočet špecifických rozmerov potrebných na daný účel.

2. Historické pozadie

Starovekí Egypťania a Mezopotámci patrili medzi prvých, ktorí prakticky využívali geometriu, najmä na meranie pôdy a v architektúre. Egypťania, známi svojimi schopnosťami pri stavbe monumentálnych štruktúr, ako sú pyramídy, pravdepodobne mali implicitné chápanie prierezov. Hoci ich poznatky boli v podstate výsledkom aplikovanej vedy, vytvorili základy geometrických konceptov, ktoré neskôr rozvinuli grécki a helénistickí myslitelia. Štúdium geometrie sa stalo formalizovanejším vďaka matematikom, ako bol Euklides, ktorý vytvoril systematický prístup k tejto disciplíne vo svojom diele Základy (Elements). Euklidove štúdie zahŕňali delenie tvarov na prierezy za účelom skúmania ich vlastností, čím položil základ pre ďalšiu prácu s prierezmi.

Grécki matematici považovali geometrické tvary za objekty matematickej analýzy a symboly filozofických myšlienok. Schopnosť “rezať” tvary a skúmať ich vnútornú štruktúru bola revolučnou myšlienkou, ktorá odrážala ich širšie hľadanie porozumenia neviditeľným štruktúram



reality. Počas renesancie, obdobia rozkvetu umenia, vedy a architektúry, sa štúdiom prierezoz vyvíjalo ešte ďalej. Umeleckí a vedeckí veľikáni, ako Leonardo da Vinci, a doboví architekti využívali prierezy na plánovanie budov, štúdiom anatómie a tvorbu presnejších kresieb. Leonardove anatomické štúdie zahŕňali pitvy tiel aj objektov, čo mu poskytlo hlboké poznatky o ich fungovaní zvnútra. Architekti začali používať prierezy na vizualizáciu vnútornej štruktúry zložitých stavieb, čo im umožnilo vytvárať nielen esteticky pôsobivé, ale aj konštrukčne pevné návrhy.

Aj práca Johanna Keplera zahŕňala štúdiom a analýzu prierezoz. Kepler, známy predovšetkým svojím prínosom k poznaniu pohybu planét, vo svojom menej známom diele *Nova Stereometria Doliorum Vinariorum* skúmal objemy nepravidelných telies, konkrétne vínnych sudov s komplexnými zakrivenými tvarmi. Uvedomil si, že tradičné geometrické vzorce na výpočet objemu nie sú pre tieto nepravidelné tvary vhodné. Riešením bolo konceptuálne “rezanie” sudov na nekonečné množstvo tenkých prierezoz, ktorých plochy sčítal, aby získal približný objem celého suda. Táto metóda, založená na sčítaní plôch prierezoz, pripomína koncept integrácie, ktorý neskôr formalizovali Isaac Newton a Gottfried Wilhelm Leibniz pri rozvoji kalkulu.

Dnes sú prierezy neoddeliteľnou súčasťou moderného života a ich využitie ďaleko presahuje matematiku a fyziku. Technológie umožňujú architektom a inžinierom vytvárať detailné digitálne modely prierezoz, ktoré zvyšujú odolnosť a efektivitu navrhovaných štruktúr. V skratke, prierezy sa vyvinuli z nástroja na pochopenie tvarov na dôležitý moderný prostriedok, ktorý spája minulosť s prítomnosťou a poháňa inovácie v rôznych oblastiach, ako sú zdravotníctvo, technológie a dizajn.

3. Výsledky vzdelávania

Po ukončení tohto modulu by študenti mali byť schopní:

- Rozvíjať schopnosť vizualizovať a interpretovať tvary vznikajúce prienikom roviny a mnohostenu;
- Vykonávať rotácie a mentálne manipulácie telies, pričom dokážu predvídať tvar rezu mnohostena bez použitia fyzických alebo digitálnych pomôcok;
- Rozpoznať vzťah medzi trojrozmernými útvarmi a ich dvojrozmernými rezmi;
- Uvedomiť si, ako symetria mnohostena ovplyvňuje tvar vzniknutého rezu;



- Premýšľať a uvažovať geometricky pri modelovaní telies vzniknutých prienikmi rôznych rovín s mnohostenmi;
- Presne popísať rezy pomocou geometrickej terminológie (napr. polygóny, rovnobežné, kolmé);
- Prezentovať zistenia a predikcie o rezoch prostredníctvom verbálneho opisu, kresieb alebo modelov;
- Riešiť problémy týkajúce sa metrických a geometrických vlastností rezov;
- Skúmať rôzne metódy na dosiahnutie zhodných rezov;
- Kriticky analyzovať vplyv orientácie roviny na výsledný rez;
- Preskúmať prípady s neočakávanými výsledkami.

Prerekvizity: Predpoklady pre úspešné zvládnutie modulu zahŕňajú: (1) Znalosť základných dvojrozmerných geometrických tvarov (napr. polygónov a kruhov) a trojrozmerných telies (napr. kociek, valcov, kužeľov a gúľ); (2) Pochopenie vzťahu medzi stenami, hranami a vrcholmi, čo je nevyhnutné pre vizualizáciu a opis 3D tvarov; (3) Poznanie geometrických výsledkov týkajúcich sa prieniku rovín; (4) Pre pokročilejšie štúdium prierezov základné porozumenie trojrozmernému súradnicovému systému (x, y, z) , ktoré umožňuje analyzovať, kde a ako rovina pretína teleso. To je obzvlášť užitočné pri nepravidelných prierezoch alebo pri pochopení matematiky rezania; (5) Predbežné pochopenie transformácií, ako sú rotácie a zrkadlenia v 2D a 3D priestore, čo napomáha pochopeniu symetrie a klasifikácie prierezov v rôznych situáciách; (6) V neskoršej fáze môže byť dôležitá znalosť sférických súradníc, ktoré sú významné pri pokročilejšej analýze prierezov.

4. Teoretické základy

Na pochopenie rezov mnohostenov je kľúčové zväziť tvrdenia týkajúce sa vzťahov medzi priamkami a rovinami. Nižšie sú uvedené základné vety:

Veta 5.1 *Prienik dvoch rovín v priestore je buď prázdny, alebo tvorí priamku.*

Veta 5.2 *Priamka l je rovnobežná s rovinou α práve vtedy keď existuje priamka $m \subset \alpha$ taká, že l je rovnobežná s priamkou m .*

Ako priamy dôsledok máme:

- *Ak je priamka ℓ rovnobežná s dvomi rôznobežnými rovinami, potom ℓ je rovnobežná aj s každou z týchto rovín.*

Veta 5.3 *Ak je priamka rovnobežná s rovinou, každá rovina, ktorá obsahuje túto priamku a pretína pôvodnú rovinu, tak činí pozdĺž priamky, ktorá je rovnobežná s pôvodnou priamkou.*

Táto veta pomáha predpovedať orientáciu prierezov. Napríklad, ak rovina rezu pretína mnohosten a je rovnobežná s jednou z jeho hrán, výsledný prierez bude obsahovať čiary rovnobežné s touto hranou, pozri Obrázok 1.

Veta 5.4 *Dve roviny sú rovnobežné, ak a len ak jedna z nich obsahuje dvojicu priamok, ktoré sú rovnobežné s druhou rovinou.*

Veta 5.5 *Ak rovina pretína dve rovnobežné roviny, prieniky sú dve rovnobežné priamky.*

Preskúmame teraz niektoré rezy vytvorené prienikom roviny s tetraédrom, kockou alebo dodekaédrom. Tieto konvexné mnohosteny patria do rodiny piatich Platónových telies, ktorých steny sú zhodné pravidelné mnohouholníky. Táto skupina obsahuje tetraédre, kocky, oktaédre, dodekaédre a ikosaédre, pozri Obrázok 2. Tieto telesá, známe už od staroveku, boli podrobne študované Platónom, ktorý každé z nich priradil k jednému zo základných živlov prírody: zem (kocka), vzduch (oktaéder), oheň (tetraéder), voda (ikosaéder) a vesmír (dodekaéder).

Každému Platónovmu telesu môžeme priradiť **Schläfliho symbol** zložený z dvoch hodnôt, $\{p, q\}$, kde p je počet strán každej steny a q je počet stien stretávajúcich sa v každom vrchole. Napríklad ikosaéder má Schläfliho symbol $\{3, 5\}$, pretože každá stena je rovnostranný trojuholník (3) a v každom vrchole sa stretáva päť trojuholníkov. Pre dodekaéder je Schläfliho symbol $\{5, 3\}$, pretože každá stena je pravidelný päťuholník (5), so stretnutím troch takýchto stien v každom vrchole. K každému z týchto telies môžeme tiež priradiť jeho vrcholovú konfiguráciu, čo je postupnosť stien okolo vrcholu. Napríklad, **vrcholová konfigurácia** ikosaédra je 3.3.3.3.3, zatiaľ čo pre dodekaéder je 5.5.5. Kombinatorický popis Platónových telies je uvedený v nasledujúcej tabuľke.



Polyhedron		Vertices	Edges	Faces	Schläfli symbol	Vertex configuration
Regular tetrahedron		4	6	4	{3, 3}	3.3.3
cube		8	12	6	{4, 3}	4.4.4
Regular octahedron		6	12	8	{3, 4}	3.3.3.3
dodecahedron		20	30	12	{5, 3}	5.5.5
icosahedron		12	30	20	{3, 5}	3.3.3.3.3

https://en.wikipedia.org/wiki/Platonic_solid

Priečne rezy v tetraédri

Na úvod si uvedme niektoré geometrické vlastnosti tetraédra:

Veta 5.6 *Nech \mathcal{T} je tetraéder s dĺžkou hrany a . Potom platí:*

(a) Výška h tetraédra je $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$;

(b) Celková plocha povrchu $A_{\mathcal{T}}$ tetraédra je $A_{\mathcal{T}} = a^2\sqrt{3}$;

(c) Objem V tetraédra je $V = a^3\frac{\sqrt{2}}{12}$.

Veta 5.7 *Pravidelný tetraéder má 24 rôznych symetrií, ktoré zahŕňajú 12 rotačných symetrií, 6 čistých zrkadlových symetrií (reflexie) a 6 rotačných reflexií (kombinácie rotácie a reflexie).*

Každá symetria tetraédra zachováva jeho vrcholy, preto môže byť reprezentovaná permutáciou vrcholov A, B, C, D . Predpokladajme, že

tetraéder \mathcal{T} má označené vrcholy A, B, C , a D .

- **12 rotačných symetrií** Tieto symetrie zachovávajú orientáciu a zahŕňajú:

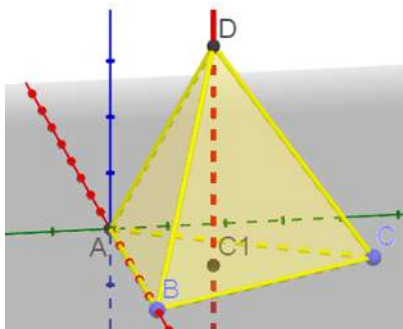
(a) **identita**;

(b) **8 rotácií** o 120° a 240° okolo osí prechádzajúcich vrcholmi a stredmi protilahlých stien

(c) **3 rotácie o 180°** okolo osí prechádzajúcich stredmi protilahlých hrán.

(1) **Identita** je reprezentovaná permutáciou: $\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & B & C & D \end{pmatrix}$.

Poďme teraz charakterizovať rotácie o 120° a 240° okolo osi prechádzajúcej vrcholom D a stredom $C1$ protíľahlej steny $[A, B, C]$, pozri Obrázok 1.

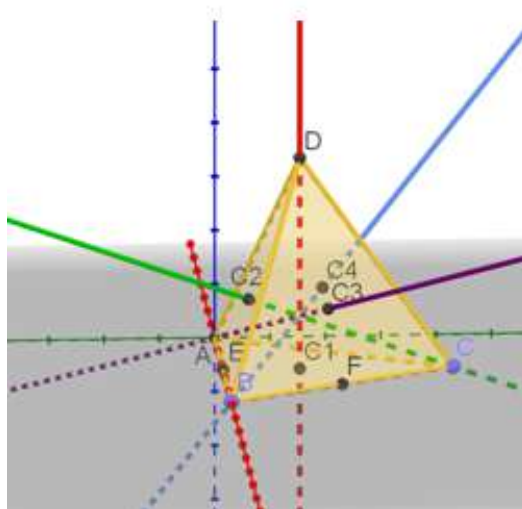


Obr. 5.1: Rotácie okolo osi spájajúcej vrchol so stredom protíľahlej steny.

Príslušné zobrazenia vo forme permutácií sú nasledovné:

$$(2) \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & A & D \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & A & B & D \end{pmatrix}.$$

Existujú 4 vrcholy, takže máme štyri osi rotácie, pozri Obrázok 2.



Obr. 5.2: Štyri osi rotácie spájajúce vrchol so stredom protíľahlej steny.

Permutácie zodpovedajúce rotáciám okolo zelenej, modrej a fialovej osi sú:

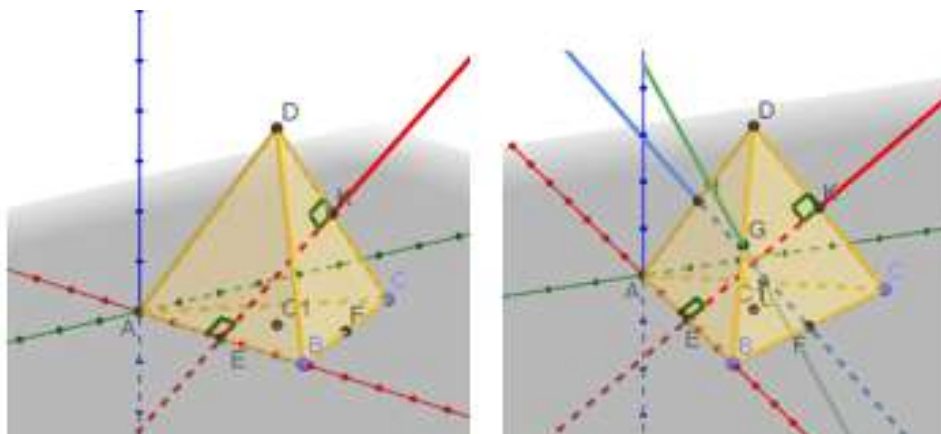
$$(4) \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & D & C & A \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & A & C & B \end{pmatrix};$$



$$(6) \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & B & D & A \end{pmatrix} \quad (7) \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & B & A & C \end{pmatrix};$$

$$(8) \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & C & D & B \end{pmatrix} \quad (9) \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & D & B & C \end{pmatrix};$$

Máme ešte tri rotácie o polotočenie, cez osi prechádzajúce stredmi dvoch opačných hrán, pozri Obrázok 3.



Obr. 5.3: Rotácie okolo osí spájajúcich stredy protilahlých stien.

Permutácie zodpovedajúce polotočeniam okolo červenej, modrej a zelenej osi sú nasledovné:

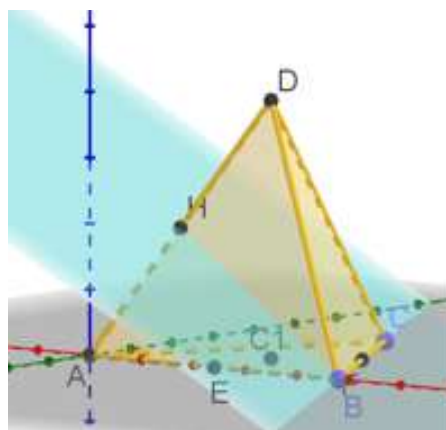
$$(10) \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix} \quad (11) \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & C \end{pmatrix} \quad (12) \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{pmatrix}.$$

• **12 rotačných symetrií**, ktoré neuchovávajú orientáciu, pozostávajú z:

- (a) **6 (čistých) zrkadlení**, každý na rovine prechádzajúcej hranou a stredom opačnej hrany;
a
- (b) **6 rotačných zrkadlení**, každý vzniknutý kombinovaním rotácie s čistým zrkadlovým odrazom.

Poďme charakterizovať **6 čistých zrkadlení**. Zvážme obraz v rovine obsahujúcej hranu $[BC]$ a stred $[AD]$, pozri Obrázok 4. Tento obraz fixuje body B a C a permutuje ostatné dva vrcholy. Preto ho môžeme vyjadriť permutáciou,

$$(1) \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & B & C & A \end{pmatrix}.$$



Obr. 5.4: Zrkadlový odraz v rovine obsahujúcej hranu a prechádzajúcej stredom opačnej hrany.

Keďže tétrahéder má 6 hrán, existuje 5 ďalších zrkadlových rovín. Nasledujúce permutácie reprezentujú tieto ďalšie zrkadlové symetrie:

$$(2) \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & B & C & A \end{pmatrix}; \quad (3) \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & B & C & A \end{pmatrix}; \quad (4) \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & B & C & A \end{pmatrix};$$

$$(5) \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & B & C & A \end{pmatrix}; \quad (6) \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & B & C & A \end{pmatrix}.$$

6 rotačných zrkadlení tétrahédu sú tie, ktoré sú reprezentované permutáciami uvedenými nižšie. Pre každú z týchto symetrií predstavíme kombináciu, ktorá zahŕňa čistý zrkadlový odraz a rotáciu.

$$(1) \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & B & C & A \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & A & D \end{pmatrix}.$$

$$(2) \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & D & B & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & B & D & C \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & B & A \end{pmatrix}.$$

$$(3) \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & C & A & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & B & D & C \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{pmatrix}.$$

$$(4) \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & D & A & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & C & B & D \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & D & A & B \end{pmatrix}.$$

$$(5) \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ C & A & D & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & C & B & D \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix}.$$

$$(6) \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & A & B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & C & B & D \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ D & A & C & B \end{pmatrix}.$$

Keďže grupa permutácií štyroch prvkov má presne 24 prvkov, môžeme uzavrieť, že symetrická grupa tétrahédu je úplne určená.

Teraz sa pozrime na rezy, ktoré môžeme získať prienikom roviny s tétrahédom. Na tento účel využijeme tri rôzne prístupy, každý prispôbený predpokladom, ktoré môžu mať čitatelia tohto modulu. Začneme s **jednoduchý prístupom**, ktorý vyžaduje len minimálne predpoklady. Následne predstavíme **stredne pokročilý prístup**, ktorý predpokladá základné porozumenie izometrickým transformáciám v priestore. Nakoniec predstavíme **pokročilý prístup**, kde je nevyhnutné solidné pochopenie symetrickej skupiny, spolu s obratnosťou v sférických súradniciach.

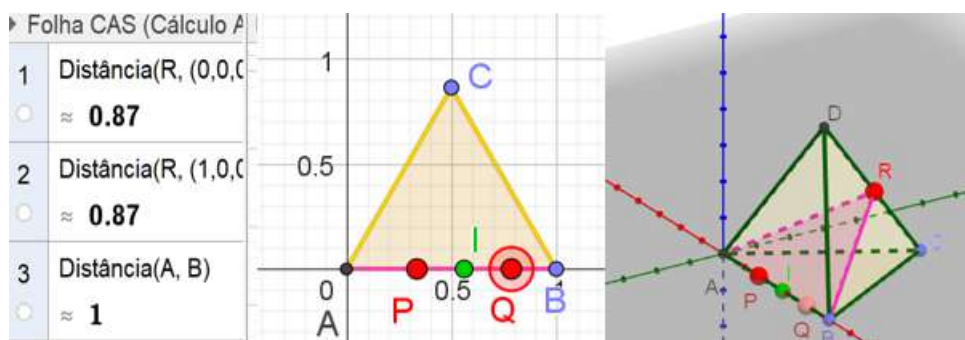
Priečne rezy tetraédra - jednoduchý prístup

Zvážme tetraéder \mathcal{T} s vrcholmi A, B, C , a D . Keďže steny \mathcal{T} ležia v rovine, podľa Vety 5.1, ak rovina pretína stenu \mathcal{T} , musí ju pretínať buď v jednom vrchole, alebo pozdĺž úsečky, ktorá spája dve hrany tejto steny. Pretože tri nekolineárne body určujú rovinu, na určenie roviny rezu postačuje zvoliť definičné body, ktoré ležia na (uzavretých) hranách tetraéda.

Nech P, Q a R sú tri nekolineárne body v $\mathcal{E} = [AB] \cup [BC] \cup [AC] \cup [AD] \cup [BD] \cup [CD]$, a π je rovina definovaná týmito bodmi.

- Ak predpokladáme, že P a Q sú body patriace tej istej hrane e tetraéda, pričom môžu byť aj koncovými bodmi tejto hrany, potom R musí ležať na protíľahlej hrane e' , a rez vytvorený rovinou π v \mathcal{T} je trojuholník, viď Obrázok 5.

Tento trojuholník je vždy rovnoramenný, bez ohľadu na konkrétne polohy bodov P a Q na hrane e a R na hrane e' . Prečo je to tak? Pozorujeme, že trojuholníky $[ADR]$ a $[BDR]$ sú zhodné podľa kritéria zhodnosti strán-uhol-strán (SUS).

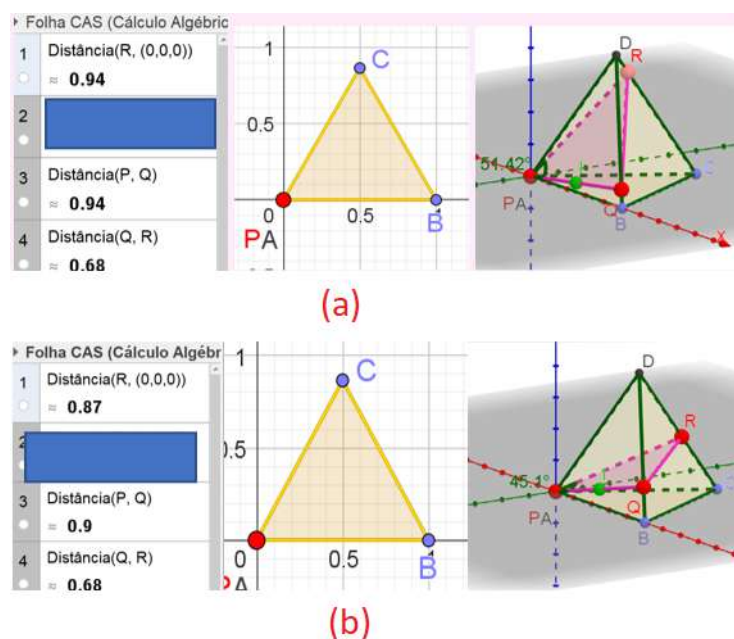


Obr. 5.5: Rez vytvorený rovinou prechádzajúcou bodmi P, Q a R .

(<https://geogebra.com/m/1020176675> - Ana Breda)

Navyše, trojuholníkový rez nemôže byť rovnostranný, pretože uhol pri bode A je menší ako $\frac{\pi}{6}$ rad.

- Predpokladajme teraz, že P , Q , a R sú tri body, pričom žiadne dva z nich neležia na rovnakej hrane, a jeden z nich, napríklad P , je vrcholom tetraéda. V takom prípade je rez rovnoramenný alebo rôznostranný trojuholník, ako je znázornené na Obrázku 6(a) a 6(b).



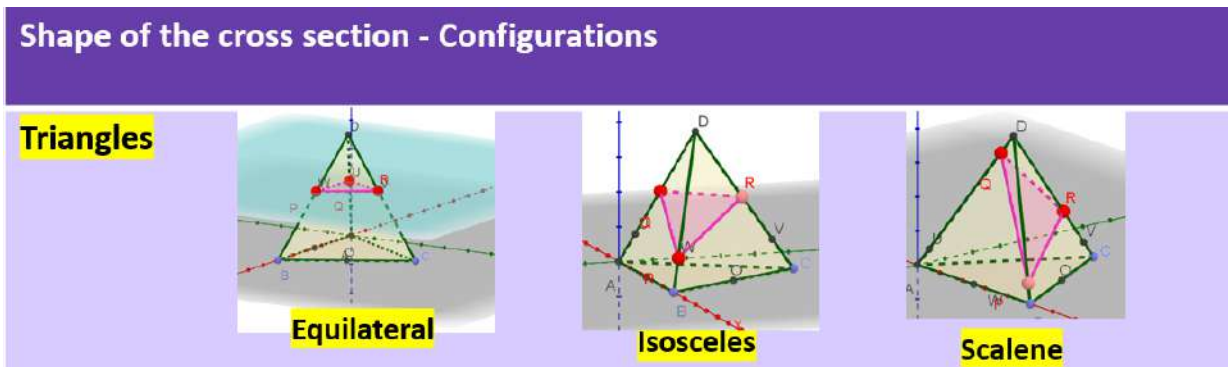
Obr. 5.6: Rez vytvorený rovinou prechádzajúcou bodmi P, Q a R .

(<https://geogebra.com/m/1020176675> - Ana Breda)

Je možné získať rovnostranný trojuholníkový prierez za daného predpokladu? Použite dostupnú aplikáciu na adrese <https://geogebra.com/m/1020176675>, aby ste preskúmali správanie uhla a dĺžok strán trojuholníka v reze. Na základe svojich pozorovaní zostavte matematické zdôvodnenie, ktoré vedie k záveru, že za daných predpokladov nie je možné dosiahnuť rovnostranný rez.

- Predpokladajme teraz, že body P , Q a R neležia na rovnakej hrane tetraéda; žiadny z týchto bodov sa nezhoduje so žiadnym vrcholom tetraéda a všetky ležia na hranách, ktoré vychádzajú z rovnakého vrcholu.

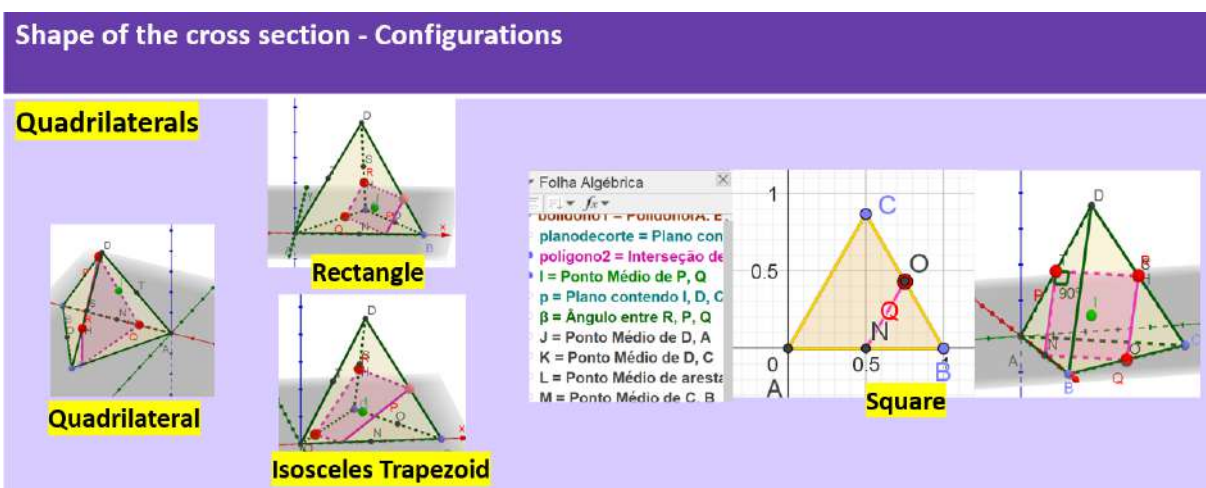
Na analýzu typu mnohouholníka vytvoreného v priereze tetraéda rovinou definovanou bodmi P , Q a R použite aplikáciu GeoGebra (<https://geogebra.com/geogebra> (https://geogebra.com/geogebra)). Umiestnite body P , Q a R podľa požiadaviek a popíšte svoje pozorovania, viď. Obrázok 7. Vysvetlite pozorované výsledky pomocou matematického zdôvodnenia.



Obr. 5.7: Rez vytvorený rovinou prechádzajúcou bodmi P, Q a R .
(<https://geogebra.com/geogebra> - Ana Breda)

- Nakoniec predpokladajme, že body P, Q a R sú také, že žiadne dva z nich neležia na rovnakej hrane, žiaden z nich nie je vrcholom tetraéda a zároveň nepatria všetky na hrany vychádzajúce z rovnakého vrcholu.

Použite rovnakú aplikáciu a pozorne sledujte formovanie prierezov, viď Obrázok 8.

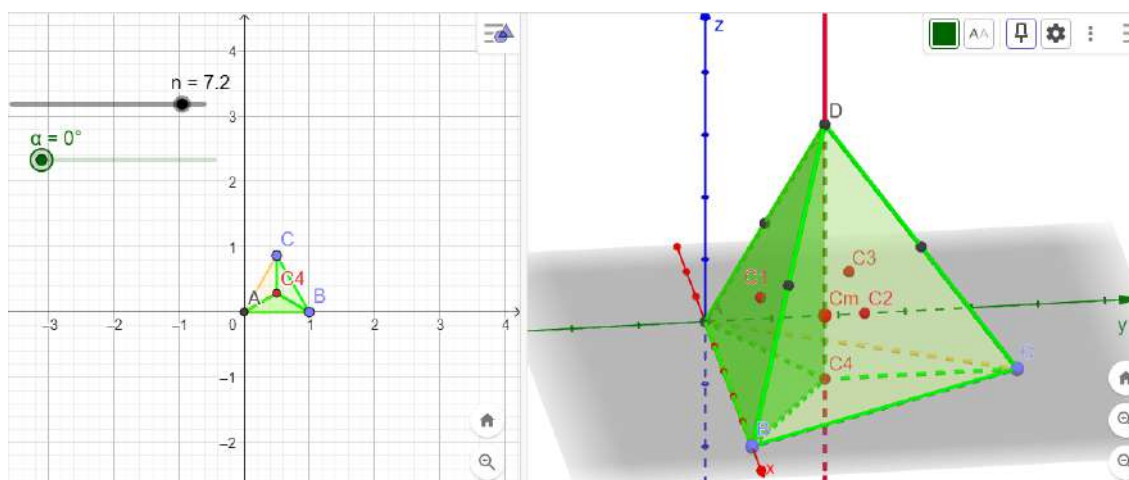


Obr. 5.8: Rez vytvorený rovinou prechádzajúcou bodmi P, Q a R .
(<https://geogebra.com/geogebra> - Ana Breda)

Na základe vašich simulácií a pozorovaní, mohli by ste predložiť matematické argumenty, ktoré tieto pozorovania podporujú?

Rezy v tetraédri – Stredne pokročilý prístup

Štúdium rezov rovín v tetraédri môže byť výrazne systematizované pomocou konceptu symetrie. Vo Vete 5.7 sme opísali symetrickú grupu tetraédra. V tomto prístupe stačí zväziť len jednu z jej podskupín, napríklad podskupinu generovanú rotáciou o 120 stupňov okolo osi prechádzajúcej vrcholom a stredom protilahlej steny, viď. Obrázok 9.

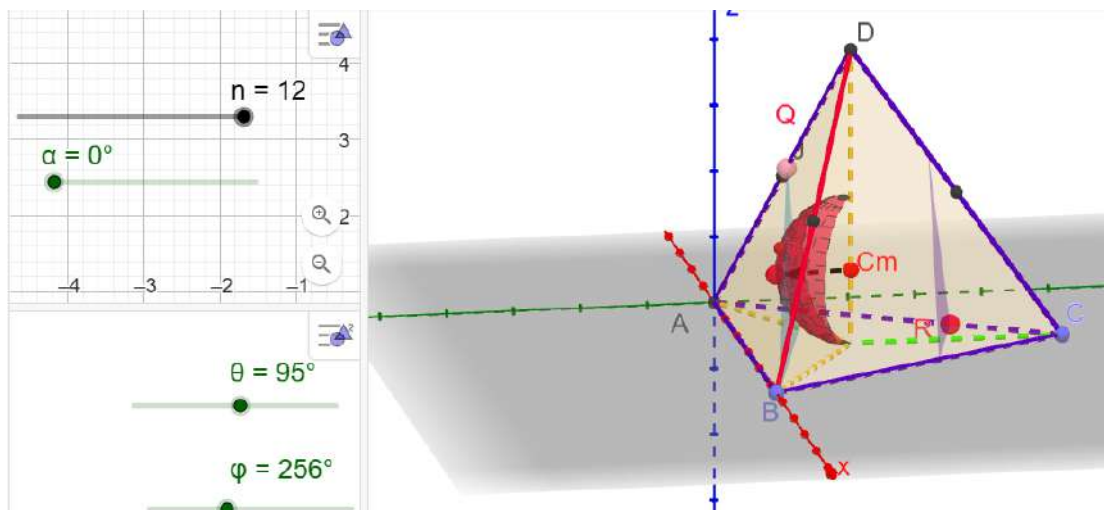


Obr. 5.9: Rez vytvorený rovinou prechádzajúcou bodmi P, Q a R .

(<https://geogebra.tools/pages.dev/tetraedro-intermedia> - Ana Breda)

Aby sa zabezpečilo, že žiadna rovina nebude vynechaná, stačí zväziť jednotkové vektory v sférickom limite pyramídy s vrcholmi A, B, C_4, D . Pre každý z týchto vektorov zväzte rovinu, ktorá je naň kolmá a prechádza bodom ležiacim na hranách pyramídy, a nakoniec zväzte skupinu rovnobežných rovín. Na opis sférickej oblasti boli použité **sférické súradnice**.

Použite časť II aplikácie GeoGebra na systematické sledovanie formovania rezov, viď Obrázok 10.



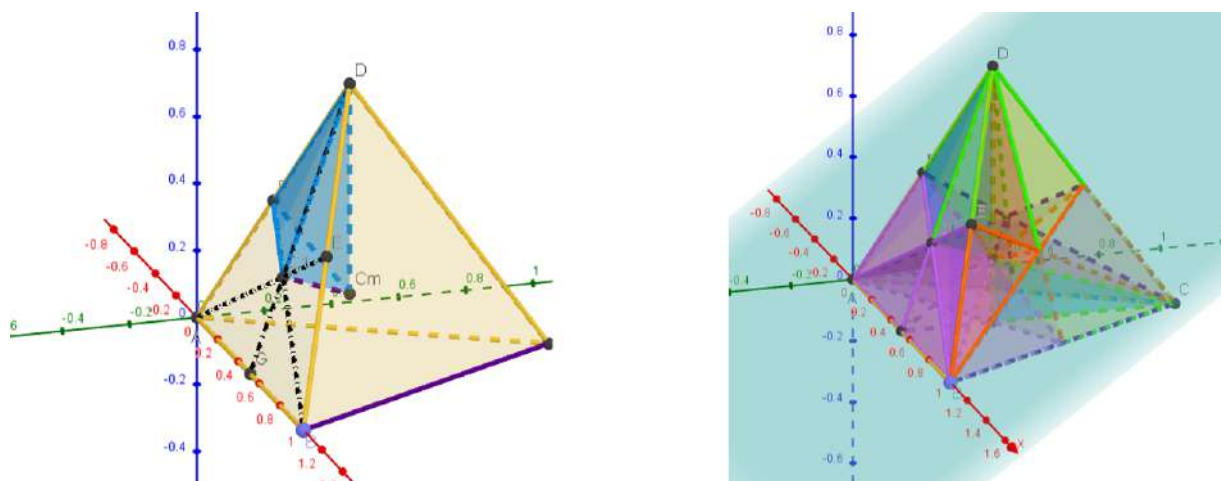
Obr. 5.10: Prierez v tetraédri – Stredne pokročilý prístup.

(<https://geogebra.tools/pages.dev/tetraedro-intermedia> - Ana Breda)

Rezy v tetraédri – Pokročilý prístup

Pokračujúc v tejto línii uvažovania môžeme ďalej filtrovať štúdium rezov, obmedzením našej analýzy na reprezentatívnu oblasť tetraéda, základnú oblasť, čím výrazne znížime počet simulačných prípadov, ktoré je potrebné vykonať. Tento prístup využíva skutočnosť, že všetky možné konfigurácie možno získať prácou len v základnej oblasti. Umožňuje to efektívnejšiu klasifikáciu potenciálnych prierezov, keďže každá konfigurácia v základnej oblasti reprezentuje triedu ekvivalentných prierezov v celom tetraéde.

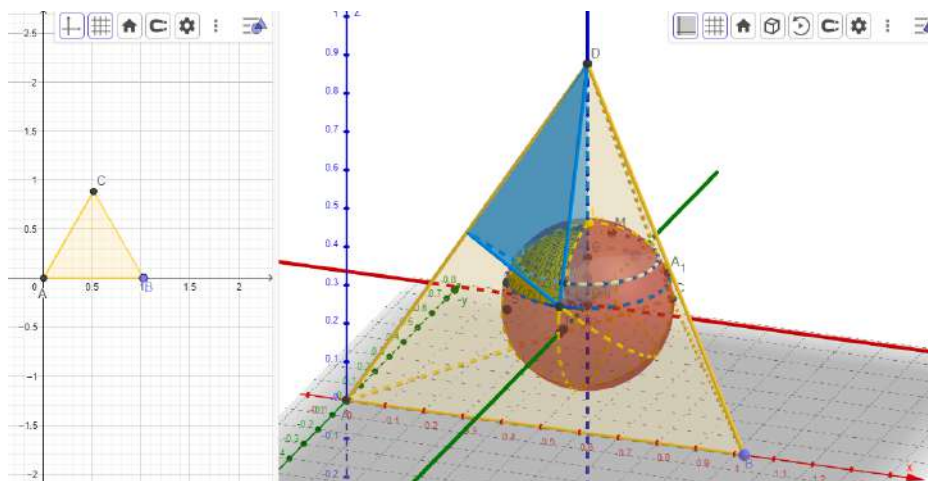
Základná oblasť môže byť opísaná ako pyramída s vrcholmi v ťažisku tetraéda, vnútornom bode a stredoch jedného z jeho stien, viď Obrázok 11. Prístupom cez <https://geogebra.tools/pages.dev/regiao-fundamental-tetraedro> môžeme preskúmať, ako symetrická grupa pôsobí na základnú oblasť.



Obr. 5.11: Základná oblasť tetraédra.

(<https://geogebra.com/m/AnaBreda/regiao-fundamental-tetraedro> - Ana Breda)

Teraz môžeme aplikovať postupy vykonané v stredne pokročilom prístupe, prepozične na úroveň základnej oblasti. Tento prístup nám umožňuje sústrediť sa na menšiu, no úplne reprezentatívnu oblasť tetraéda, čím znižujeme výpočtovú zložitosť a zachováваме úplnú analytickú presnosť, viď Obrázok 12. Sústredenie sa na základnú oblasť urýchľujeme štúdium rezov, keďže každá konfigurácia získaná z informácií v tejto oblasti efektívne reprezentuje celý súbor ekvivalentných konfigurácií v tetraédri.



Obr. 5.12: Rez v tetraédri – Pokročilý prístup.

(<https://geogebra.com/m/AnaBreda/tetraedro-avancado> - Ana Breda)

advancedapproach.png

Použitím konceptu symetrie nielen zjednodušujeme matematické spracovanie, ale aj zlepšujeme naše pochopenie dvojrozmerných geometrických štruktúr (rezov), ktoré sa vytvárajú.



5. Aplikácie v každodennom živote

Pochopenie rezov telies nie je len doménou inžinierov alebo vedcov, ide o koncept, ktorý podporuje mnohé aspekty našich každodenných životov. V architektúre a stavebníctve pomáhajú pohľady na prierezy projektantom a stavbárom plánovať pevné a stabilné štruktúry. Keď architekti navrhujú prierezy nosníkov alebo stĺpov, zohľadňujú nielen estetické kvality, ale aj pevnosť a odolnosť konštrukcie, aby budovy, mosty a domy vydržali a odolávali každodennému opotrebeniu. V zdravotníctve hrajú prierezy kľúčovú úlohu. Techniky ako MRI (zobrazovanie magnetickou rezonanciou) a CT (počítačová tomografia) poskytujú detailný pohľad do ľudského tela, umožňujúc lekárom získať "rez po reze" pohľad na naše orgány, tkanivá a kosti. Týmto spôsobom dokážu včas odhaliť zdravotné problémy a presne ich diagnostikovať, často bez potreby invazívneho chirurgického zákroku. V priemyselnej výrobe môže preskúmanie prierezu produktu odhaliť skryté chyby alebo slabiny. Tento dôraz na detail v konečnom dôsledku znamená bezpečnejšie a kvalitnejšie produkty pre spotrebiteľov. Geológovia používajú prierezy zemských vrstiev na pochopenie toho, čo sa skrýva pod povrchom. Keď banské spoločnosti hľadajú minerály alebo ropu, spoliehajú sa na tieto mapy prierezov, aby vedeli, kde vrtám alebo kopám. Tieto znalosti nám pomáhajú získať dôležité zdroje pri minimalizácii dopadu na životné prostredie. Prierezy sú taktiež mocnými nástrojmi v triede. Pomáhajú študentom vizualizovať tvary a vlastnosti 3D objektov spôsobom, ktorý je ľahšie pochopiteľný. Mnoho každodenných predmetov, ako káble, plechovky a fľaše, je navrhnutých s špecifickými tvarmi prierezov z praktických dôvodov. Napríklad kruhová trubica umožňuje hladký a efektívny prietok vody, zatiaľ čo valcovitý tvar maximalizuje skladovací priestor a zachováva odolnosť.

6. Literatúra

[?] Anwar, N., & Najam, F. A. (2017). Understanding Cross-Sections. En *Elsevier eBooks* (pp. 39-136).

<https://doi.org/10.1016/b978-0-12-804443-8.00002-6>

[?] Lewis, P. (2016). Slow Section. *Journal of Architectural Education*, 70(1), 42–43.

<https://doi.org/10.1080/10464883.2016.1128277>

[?] Schumaker, L.L. (1990). Reconstructing 3D Objects from Cross-Sections. In: Dahmen, W., Gasca, M., Micchelli, C.A. (eds) *Computation of Curves and Surfaces*. NATO ASI Series, vol 307. Springer, Dordrecht.



Co-funded by
the European Union



https://doi.org/10.1007/978-94-009-2017-0_9

6 TĚMA: Vektory a ich vlastnosti

1. Zdôvodnenie výberu témy

Vektory zohrávajú dôležitú úlohu v rôznych oblastiach, ako sú fyzika, inžinierstvo, počítačová grafika a strojové učenie, kde sa používajú na výpočty a modelovanie fyzikálnych javov a matematických operácií. V inžinierstve sa často odkazuje na fyzikálne veličiny, ako sú sila, rýchlosť a čas. Napríklad hovoríme o rýchlosti auta alebo sile v stlačenej pružine. Je užitočné rozdeliť tieto fyzikálne veličiny na dva typy. Veličiny prvého typu sú známe ako skaláry. Tieto môžu byť úplne popísané jedným číslom, ktoré sa nazýva veľkosť. Veličiny druhého typu sú tie, ktoré si vyžadujú špecifikáciu smeru, okrem veľkosti, než sú úplne popísané. Tieto sa nazývajú vektory. Vektor je veličina, ktorá má veľkosť a smer. Veličiny, ktoré sú vektory, sa musia manipulovať podľa určitých pravidiel. Pre manipuláciu s vektormi vo výpočtoch boli vyvinuté špeciálne metódy, ktoré dali vznik oblastiam ako vektorová algebra, vektorová geometria a vektorový počet. Okrem toho vektory nám pomáhajú určovať pozíciu a zmenu pozície bodov. V rôznych oblastiach fyziky a matematiky sa vektory používajú na pochopenie správania sa smerových veličín v dvoj- a trojrozmerných priestoroch.

2. Historické pozadie

Vektory sa zrodili v prvých dvoch desaťročiach 19. storočia s geometrickými reprezentáciami komplexných čísel. Matematici a vedci s týmito novými číslami pracovali a aplikovali ich rôznymi spôsobmi. V roku 1837, William Rowan Hamilton (1805 – 1865) ukázal, že komplexné čísla môžeme abstraktne považovať za usporiadané dvojice (a, b) reálnych čísel. Táto myšlienka bola súčasťou snahy mnohých matematikov hľadať spôsob, ako rozšíriť dvojrozmerné "čísla" do troch rozmerov, ale nikto sa to nepodarilo, pričom sa zachovali základné algebraické vlastnosti reálnych a komplexných čísel. Rozvoj algebry vektorov a vektorovej analýzy, akú poznáme dnes, bol prvýkrát predstavený v súboroch pozoruhodných poznámok J. Willarda Gibbsa (1839 – 1903).

Historicky boli vektory zavedené v geometrii a vo fyzike (v mechanike) pre veličiny, ktoré majú veľkosť a smer, ako sú posuny, sily a rýchlosť. Tieto veličiny sú reprezentované geometrickými vektormi rovnakým spôsobom, akým sú vzdialenosti, hmotnosti a čas reprezentované reálnymi číslami.



3. Výsledky vzdelávania

Po absolvovaní tejto kapitoly by študenti mali byť schopní:

- kategorizovať niektoré bežné fyzikálne veličiny ako skaláry alebo vektory,
- reprezentovať vektory pomocou orientovaných úsečiek,
- kombinovať alebo sčítať vektory pomocou trojuholníkovej pravidla,
- rozložiť vektor na dve kolmé zložky.

Prerekvizity: Pred začatím tejto kapitoly by študenti mali:

- byť oboznámení so všetkými základnými pravidlami algebry

4. Teoretické základy

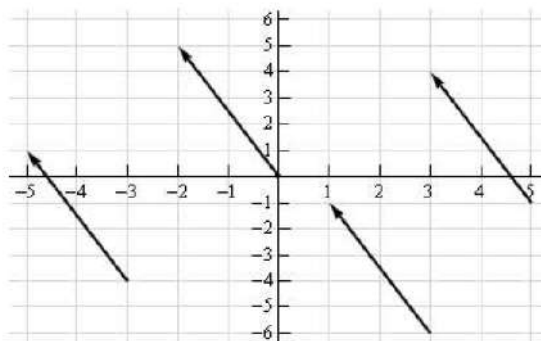
Definícia 6.1 Vektor je objekt, ktorý má veľkosť a smer.



Obr. 6.1:

Geometricky môžeme vektor zobraziť ako orientovanú úsečku, ktorej dĺžka je veľkosťou vektora a šípka označuje smer. Smer vektora je od jeho konca k jeho začiatku.

V grafickom zmysle sú vektory reprezentované orientovanými úsečkami. Dĺžka úsečky je veľkosťou vektora a smer úsečky je smerom vektora. Avšak, pretože vektory neuvádzajú žiadne informácie o tom, kde je veličina aplikovaná, akákoľvek orientovaná úsečka s rovnakou dĺžkou a smerom bude predstavovať ten istý vektor.



Obr. 6.2:

Každá z orientovaných úsečiek na obrázku 6 reprezentuje ten istý vektor. V každom prípade vektor začína na špecifickom bode a potom sa pohybuje o 2 jednotky doľava a o 5 jednotiek hore. Notácia, ktorú použijeme pre tento vektor, je:

$$\vec{v} = (-2, 5)$$

a každá z orientovaných úsečiek na tomto obrázku sa nazýva reprezentáciou vektora.

Reprezentácia vektora $\vec{v} = (a_1, a_2)$ v dvojrozmernom priestore je akákoľvek orientovaná úsečka, \overrightarrow{AB} , z bodu $A = (x, y)$ do bodu $B = (x + a_1, y + a_2)$. Podobne, reprezentácia vektora $\vec{v} = (a_1, a_2, a_3)$ v trojrozmernom priestore je akákoľvek orientovaná úsečka, \overrightarrow{AB} , z bodu $A = (x, y, z)$ do bodu $B = (x + a_1, y + a_2, z + a_3)$.

Reprezentácia vektora $\vec{v} = (a_1, a_2, a_3)$ začína v bode $A = (0, 0, 0)$ a končí v bode $B = (a_1, a_2, a_3)$ sa nazýva **pozícia vektora** z bodu (a_1, a_2, a_3) . Keď hovoríme o polohových vektorech, špecifikujeme začiatočný a koncový bod vektora.

Musíme tiež uvažovať ako vygenerovať vektor, keď máme začiatočný a koncový bod vektora. Majme dva body $A = (a_1, a_2, a_3)$ a $B = (b_1, b_2, b_3)$, potom vektor s reprezentáciou \overrightarrow{AB} je,

$$\vec{w} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

We have to be very careful with direction here. The vector above is the vector that starts at A and ends at B . The vector that starts at B and ends at A , i.e. with representation \overrightarrow{BA} is,

$$\overrightarrow{w} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

Tieto dva vektory sú rozdielne, a preto musíme vždy venovať pozornosť tomu, ktorý bod je začiatočný a ktorý je koncový. Pri určovaní vektora medzi dvoma bodmi vždy odpočítavame začiatočný bod od koncového bodu.

Definícia 6.2 Veľkosť alebo dĺžka vektora $\vec{v} = (a_1, a_2, a_3)$ je daná vzťahom,

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Definícia 6.3 Ľubovoľný vektor s veľkosťou 1, i.e. $\|\vec{u}\| = 1$, sa nazýva jednotkový vektor.

Definícia 6.4 Vektor $\vec{w} = (0, 0, 0)$ s dĺžkou 0, t.j. $\|\vec{w}\| = 0$, sa nazýva nulový vektor.

Poznámka 6.1 Nulové vektory sa často označujú $\vec{0}$. Musíme byť pozorní, aby sme dokázali rozpoznať 0 (číslo) od $\vec{0}$ (vektor). Číslo 0 označuje miesto v priestore, zatiaľ čo vektor $\vec{0}$ označuje vektor, ktorý nemá žiadnu veľkosť a ani smer.

Definícia 6.5 Vektory $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$, sa nazývajú jednotkové vektory, vektory bázy.

Definícia 6.6 Vektor, ktorý má rovnakú veľkosť ako daný vektor \vec{v} a opačný smer k vektoru \vec{v} sa nazýva opačný vektor k vektoru \vec{v} a označuje sa $-\vec{v}$.

Definícia 6.7 Vektory sa nazývajú rovnaké, ak majú rovnaký smer, a opačné, ak majú opačný smer.

Definícia 6.8 Vektory, ktoré majú rovnaké alebo paralelné smery, sa nazývajú kolineárne vektory.

Definícia 6.9 Vektory, ktoré majú rovnaký začiatočný bod, sa nazývajú koinicálne vektory.

Definícia 6.10 Vektory, ktoré majú rovnaký koncový bod, sa nazývajú koterminálne vektory.

Definícia 6.11 Vektor, ktorý je zobrazený paralelne s daným vektorom cez špecifikovaný bod v priestore, sa nazýva lokalizovaný vektor.

Definícia 6.12 Systém vektorov sa nazýva komplanárny, ak ich podporované priesečníky sú paralelné s tou istou rovinou. Inak sa nazývajú nekomplanárne vektory.

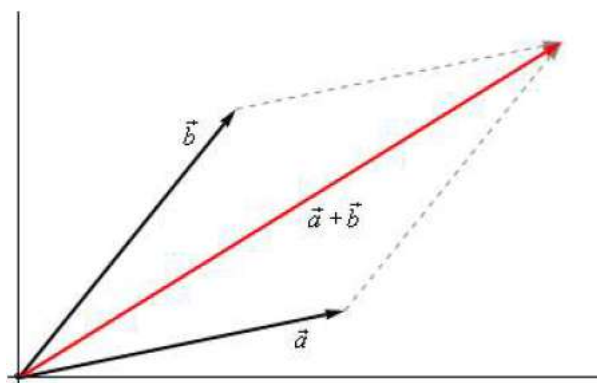
Poznámka 6.2 Vektory môžu existovať vo všeobecnom n -rozmernom priestore. Všeobecný zápis n -rozmerného vektora je

$$\vec{v} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$$

a každý prvok (a_i) 's sa nazýva prvok vektora.

Definícia 6.13 Nech $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ a $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ sú dva vektory. Súčet týchto dvoch vektorov je daný nasledujúcim vzťahom

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$



Obr. 6.3: Geometrická interpretácia sčítania dvoch vektorov.

Poznámka 6.3 Niekedy sa to nazýva aj trojuholníkové pravidlo.

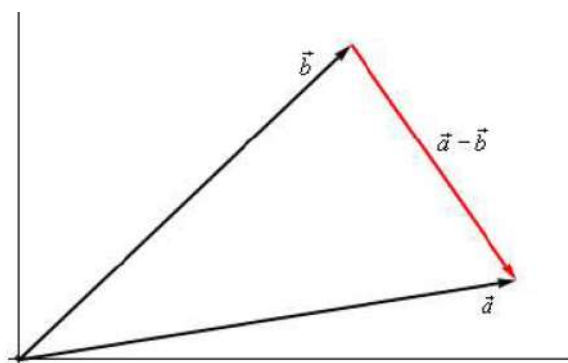
Vlastnosti sčítania vektorov

- $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (komutatívnosť)
- $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$ (asociatívnosť)
- $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ (aditívnosť sčítania)
- $\vec{a} + \vec{-a} = \vec{0}$ (súčet opačného vektora)
- $(k_1 + k_2)\vec{a} = k_1\vec{a} + k_2\vec{a}$ (násobenie skalárom)

- $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ (násobenie skalárom)
- $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ a $|\vec{a} - \vec{b}| \geq ||\vec{a}| - |\vec{b}||$

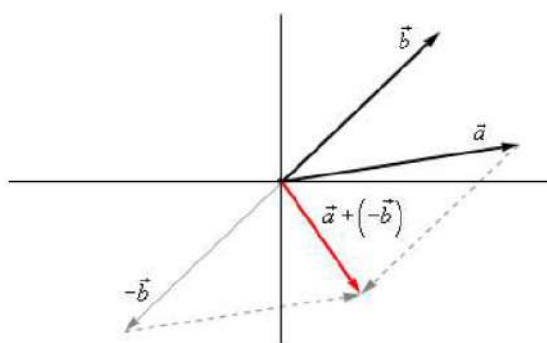
Definícia 6.14 Nech $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ a $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ sú dva vektory. Rozdiel dvoch vektorov je daný vzťahom:

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$



Obr. 6.4: Geometrická interpretácia rozdielu dvoch vektorov.

Je trochu ťažšie vidieť túto geometrickú interpretáciu. Aby sme si to uľahčili, môžeme namiesto o odčítaní vektorov uvažovať o sčítaní vektorov \vec{a} a $-\vec{b}$. Prvý krok je, ako uvidíme o chvíľu, $-\vec{b}$ je rovnaký vektor ako \vec{b} ale s opačnými znamienkami všetkých prvkov. Inými slovami, $-\vec{b}$ má opačný smer ako vektor \vec{b} . Zapisujeme to $\vec{a} + (-\vec{b})$.



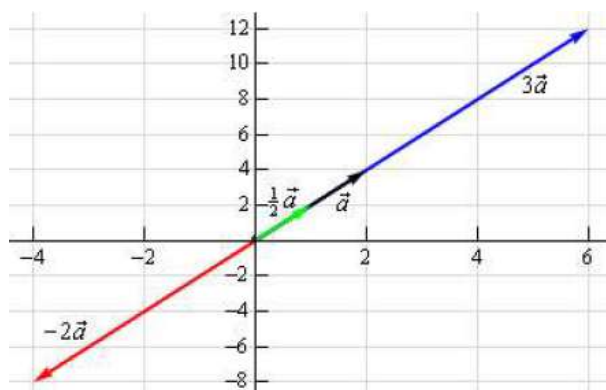
Obr. 6.5: Geometrická interpretácia rozdielu dvoch vektorov ako ich súčet.



Definícia 6.15 Nech je daný vektor $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ a λ je skalár. Potom súčin vektora \vec{a} skalárom λ je

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$$

a nazývame ho súčin vektora so skalárom.



Obr. 6.6: Geometrická interpretácia násobenia vektora skalárom.

Ak λ je kladné číslo väčšie ako 1, ktorým budeme násobiť zadaný vektor (ak $\lambda > 1$) alebo kladné číslo menšie ako 1 (ak $\lambda < 1$) neovplyvní to smer vektora. Podobne, ak λ je záporné číslo, ktorým budeme zadaný vektor násobiť, smer vektora sa zmení na opačný a opäť sa zmení veľkosť vektora v závislosti od hodnoty λ .

Existuje niekoľko aplikácií skalárneho súčinu. Prvou sú paralelné vektory. Dva vektory sú pparalelné, ak majú rovnaký smer alebo ich smer je navzájom opačný.

Predpokladajme, že \vec{a} a \vec{b} sú paralelné vektory. Ak dva vektory sú paralelné, potom musí existovať číslo λ tak, že,

$$\vec{a} = \lambda \vec{b}$$

Takže, dva vektory sú paralelné, ak jeden je skalárnym násobkom druhého.

Dôležité vlastnosti

- $|\lambda \vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|$
- $|\lambda \vec{0}| = \vec{0}$
- $l(-\vec{a}) = -l\vec{a} = -(l\vec{a})$



- $(-l)(-\vec{a}) = l\vec{a}$
- $l_1(l_2\vec{a}) = l_1l_2\vec{a} = l_2(l_1\vec{a})$
- $(l_1 + l_2)\vec{a} = l_1\vec{a} + l_2\vec{a}$
- $l(\vec{a} + \vec{b}) = l\vec{a} + l\vec{b}$

Vyššie sme predstavili základný pojem vektora.

Nech

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$$

Súčet dvoch vektorov môžeme vyjadriť aj

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (a_1, a_2, a_3) \\ &= (a_1, 0, 0) + (0, a_2, 0) + (0, 0, a_3)\end{aligned}$$

Využitím skalárneho násobenia môžeme ďalej vektor zapísať:

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (a_1, 0, 0) + (0, a_2, 0) + (0, 0, a_3) \\ &= a_1(0, 0, 0) + a_2(0, 1, 0) + a_3(0, 0, 1)\end{aligned}$$

Nakoniec si všimnime, že tieto tri nové vektory sú v podstate tri jednotkové vektory v trojrozmernom priestore.

$$(a_1, a_2, a_3) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

Definícia 6.16 Nech $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ a $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ sú dva ľubovoľné vektory. Ich skalárny súčin je

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Poznámka 6.4 Niekedy sa skalárny súčin nazýva aj násobenie s bodkou. Skalárny súčin je tiež príkladom vnútorného súčinu, a preto ho občas môžete počuť nazývať aj vnútorným súčinom.

Vlastnosti skalárneho súčinu

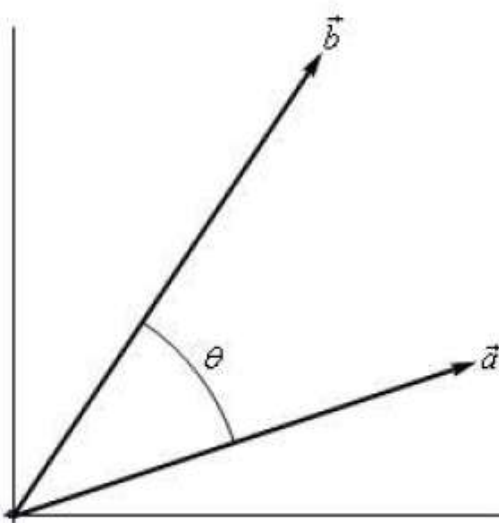
Nech sú dané tri ľubovoľné vektory $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ a $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$. Potom

- $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$



- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
- $\vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2$
- $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$
- $\vec{a} \cdot \vec{0} = 0$
- If $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$ then $\vec{a} = \vec{0}$

Existuje aj pekná geometrická interpretácia skalárneho súčinu. Predstavme si, že θ je uhol medzi vektorom \vec{a} a vektorom \vec{b} taký, že $0 \leq \theta < \pi$ a ako je znázornené na obrázku nižšie.



Obr. 6.7:

Môžeme sformulovať nasledujúce vety:

Veta 6.1

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta$$

Poznámka 6.5 Vzťah na výpočet skalárneho súčinu dvoch vektorov sa často používa práve na výpočet veľkosti uhlu, ktorý tieto dva vektory zvierajú.

Výpočet skalárneho súčinu nám poskytuje veľmi peknú metódu na určenie, či sú dva vektory na seba kolmé. V praxi na vyjadrenie kolmosti dvoch vektorov často používame termín ortogonálne vektory namiesto kolmé vektory.

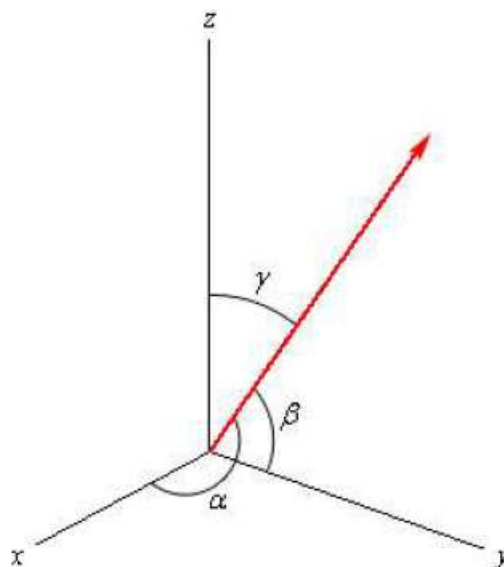
Ak sú dva vektory ortogonálne, potom ich uhol je 90° . Toto nám vlastne hovorí, že ak sú dva vektory ortogonálne, potom

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Podobne, ak sú dva vektory paralelné, potom ich uhol je 0° (vektory majú rovnaký smer) alebo 180° (vektory majú opačný smer).

Smerové kosínusy

Nech v trojrozmernom priestore je daný vektor \vec{a} . Tento vektor bude zvierat uhly s osou x (α), s osou y (β) a s osou z (γ). Tieto uhly sa nazývajú smerové uhly a kosíny týchto uhlov sa nazývajú smerové kosíny.



Obr. 6.8:

Veta 6.2 *Vzťahy, ktoré platia pre smerové kosínusy:*

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{\|\vec{a}\|} = \frac{a_1}{\|\vec{a}\|}, \quad \cos \beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{j}}{\|\vec{a}\|} = \frac{a_2}{\|\vec{a}\|}, \quad \cos \gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{k}}{\|\vec{a}\|} = \frac{a_3}{\|\vec{a}\|}$$



Poznámka 6.6 Niekoľko vlastností, ktoré platia pre smerové kosínusy:

- Vektor $\vec{u} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ je jednotkový vektor.
- Platí, že $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$
- $\vec{a} = \|\vec{a}\|(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$

Vektorový súčin

Definícia 6.17 Nech vektor $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ a vektor $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ sú dva ľubovoľné vektory. Vektorový súčin týchto dvoch vektorov je daný vzťahom:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$$

Tento vzťah sa zapamätáva ťažko. Existujú ale dva spôsoby ako si ho môžeme odvodiť. Oba spôsoby využívajú skutočnosť, že sa vlastne jedná o výpočet determinantu z matice typu 3×3 . Výpočet determinantov je nasledovný:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

V prvom riadku sú jednotkové vektory a musia byť zapísané v danom poradí. V druhom riadku sú súradnice vektora \vec{a} a v treťom riadku súradnice vektora \vec{b} . Teraz si ukážeme rôzne spôsoby výpočtu:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

Tento výpočet sa dá pomerne ľahko zapamätať. Dôležité je uvedomiť si, že sa tu striedajú znamienka a že determinanty z matice typu 2×2 neobsahujú stĺpec pod jednotkovým vektorom.

Poznámka 6.7 Všimnite si, že zmena poradia vektorov vo vektorovom súčine len zmení znamienka vo výsledku. To znamená, že dva vektorové súčiny budú smerovať presne opačnými smermi, pretože sa líšia iba znamienkom.



Existuje aj geometrická interpretácia vektorového súčinu. Predstavme si, že uhol θ je uhol medzi dvomi vektormi \vec{a} a \vec{b} , pričom $0 \leq \theta \leq \pi$, potom platí nasledujúce tvrdenie

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \theta$$

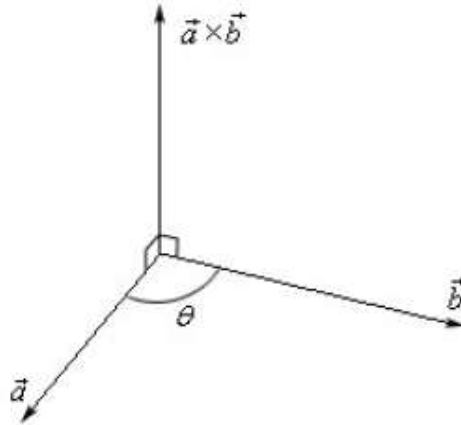


Figure 6.9:

Ako môžeme z obrázku vidieť, vektorový súčin je kolmý na oba pôvodné vektory. Bude to platiť vždy, až na jednu výnimku, ku ktorej sa dostaneme neskôr.

Vieme, že vektorový súčin smeruje nahor (v tomto prípade) podľa pravej ruky: Toto pravidlo hovorí, že ak vezmeme našu pravú ruku a začneme od vektora \vec{a} a otočíme prsty smerom k vektoru \vec{b} palec nám ukáže smer vektorového súčinu. Preto, ak by sme zobrazili $\vec{b} \times \vec{a}$, dostali by sme vektor smerujúci nadol.

Ak $\vec{a} \times \vec{b} = 0$ potom vektory \vec{a} a \vec{b} potom sú paralelné vektory.

Ak $\vec{a} \times \vec{b} \neq 0$ potom vektorový súčin vektorov $\vec{a} \times \vec{b}$ je kolmý na oba vektory \vec{a} a \vec{b} .

Vlastnosti vektorového súčinu

Nech $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ a $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ sú ľubovoľné vektory a λ je číslo, potom

- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
- $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$

- $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

-

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Predpokladajme, že máme tri vektory \vec{a} , \vec{b} a \vec{c} a vytvoríme z nich trojrozmerný obraz.

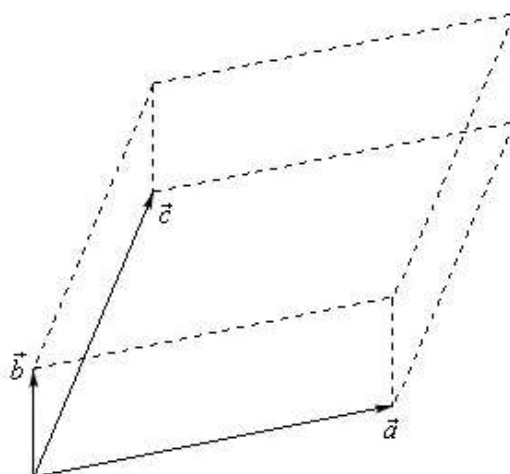


Figure 6.10:

Plocha S z rovnobežníka (dvojrozmerná predná časť tohto objektu) je daná vzťahom

$$S = \|\vec{a} \times \vec{b}\|$$

a objem V rovnobežnostena (celý trojrozmerný objekt) je daný vzťahom

$$V = |\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$$

Poznámka 6.8 Pozor, je potrebné použiť absolútnu hodnotu, pretože výsledok sice môže byť záporný, ale objem záporný byť nemôže.

Tento fakt o objeme môžeme využiť na zistenie, či tri vektory ležia v rovnakej rovine, alebo nie. Ak tri vektory ležia v tej istej rovine, objem rovnobežnostena bude nulový.



5. Aplikácie v každodennom živote

Vektory sa využívajú v každodennom živote na pomoc pri lokalizácii ľudí, miest a vecí. Používajú sa aj na opis vecí, ktoré reagujú na vonkajšie sily, ktoré na ne pôsobia. Napríklad, hmotnosť pneumatiky auta, ktoré je v pohybe, má začiatočnú rýchlosť, konečnú rýchlosť, zrýchlenie, gravitačnú reakciu, trenie a vďaka svojmu otáčaniu má aj moment sily. Kvantita, ktorá má veľkosť a smer, sa nazýva vektor. Prvý, druhý a tretí Newtonov zákon je o vzťahoch medzi vektormi, ktoré presne popisujú pohyb telies, keď sú vystavené vplyvu vonkajšej sily. Newtonove zákony pokrývajú širokú škálu javov a môžu sa využiť na popis čohokoľvek, od lopty vo voľnom páde až po raketu na ceste na Mesiac.

- vojenské využitie
- projektil
- vektor v hrách
- horské dráhy
- plaviaca sa loď po rieke
- hranie kriketu
- bočný vietor

Vojenské využitie

Akékoľvek delo, ktoré vystrelí projektil použitím strelného prachu alebo iného typu výbušného pohonu, je považované za kanón. Kaliber, dostrel, mobilita, kadencia a uhol streľby kanónov sa líšia. V závislosti od úlohy, ktorú má každý typ kanóna zohrávať na bojisku, sa tieto charakteristiky kombinujú a vyvažujú v rôznej miere. Na to je potrebné použiť vektor. Vektory rozhodujú, kam projektil zamieri a kde zasiahne zem.

Projektil

Vektor sa automaticky využíva aj v športoch, ako je basketbal a bejzbal. Hráči na konci buď zasiahnu cieľ, alebo hodia loptu v smere pod určitým uhlom, pričom obe tieto činnosti vykonali využitím svojich vedomostí o vektoroch. Podobne aj v niektorých športoch, ako napríklad hod oštepom, je nevyhnutné posúdiť uhol, ktorý vektor projektilu vytvára so zemou, aby oštep letel čo najďalej.



Vektor v hrách

Vektory sa využívajú pri ukladaní informácií o pozíciách, smeroch a rýchlostiach v počítačových hrách. Vektor pozície nám hovorí, ako sú vzdialené objekty, vektor rýchlosti nám hovorí, ako dlho bude trvať, kým sa objekt pohne, alebo akú silu musíme aplikovať, a vektor smeru nám hovorí, akým spôsobom by sme mali túto silu aplikovať, aby sme boli v hre úspešní.

Horská dráha

Väčšina pohybu počas jazdy na horskej dráhe je reakciou na gravitačnú silu, ktorú vyvíja Zem. Pri navrhovaní bezpečnostného systému je nevyhnutné zohľadniť vektory síl, zrýchlenia a rýchlosti. Tieto vektory sú dôležité pri konštrukcii horskej dráhy.

Plavba lode po rieke

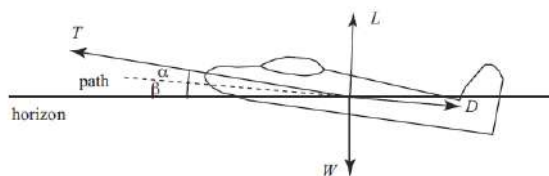
Keď loď pláva po rieke, rýchlosť lode a rýchlosť rieky sa podieľajú na celkovej rýchlosti lode. Keď sa zmení rýchlosť rieky, mení sa aj kurz, ktorý loď sleduje. Preto musí lodník určiť uhol, akým má loď riekou preplávať, aby sa dostala priamo ku brehu. Vektor tu zohráva dôležitú úlohu.

Kriket

Keď pálkar udrie do loptičky, uhol, pod akým ju odpáli a rýchlosť, akou ju udrie, sú dôležité faktory pri určovaní, či loptička preletí cez hranicu. Ak oba tieto faktory splnia požiadavky na maximálnu silu, loptička cez hranicu preletí. Vektor tu opäť zohráva dôležitú úlohu.

Bočný vietor

Pojem bočného vetra je nám známy. Vietor, ktorý fúka v smere kolmom na dráhu pohybu, nazývame bočným vetrom. Keď lietadlo pristáva, niekedy sa stretne s problémami práve v dôsledku bočného vetra. Pomocou vektora môže pilot určiť výslednú rýchlosť a smer pristávania.



Obr. 6.11: Sily pôsobiace na lietadlo.



6. Literatúra

- [1] <https://www.educative.io/answers/properties-of-vectors>
- [2] https://mathinsight.org/vector_introduction
- [3] <https://www.math.mcgill.ca/labute/courses/133f03/VectorHistory.html>
- [4] <https://www.lboro.ac.uk/departments/mlsc/student-resources/helm-workbooks/>
- [5] <https://tutorial.math.lamar.edu/>
- [6] <https://www.learnbse.in/vector-algebra-class-12-notes/>
- [7] [https://math.libretexts.org/Bookshelves/Calculus/Supplemental_Modules_\(Calculus\)/Vector_Calculus](https://math.libretexts.org/Bookshelves/Calculus/Supplemental_Modules_(Calculus)/Vector_Calculus)
- [8] https://nucinkis-lab.cc.ic.ac.uk/HELM/helm_workbooks.html
- [9] <https://unacademy.com/content/jee/study-material/mathematics/how-vectors-can-be-used-in-daily-life-situations/>
- [10] <https://myscale.com/blog/practical-examples-vector-application-daily-life/>



7 TÉMA: Polárne, cylindrické a sférické súradnice

1. Odôvodnenie výberu témy

Rovnako ako v trojrozmernom priestore, štandardný (x, y, z) súradnicový systém sa nazýva karteziánsky súradnicový systém. Keďže tento súradnicový systém nie je vždy najjednoduchší na používanie, budeme sa zaoberať aj niektorými alternatívnymi súradnicovými systémami.

V rámci tejto témy sa predstavujú polárne, cylindrické a sférické súradnice.

Cylindrické súradnice sú trojrozmerný súradnicový systém, ktorý vyjadruje body pomocou vzdialenosti od pevnej osi (z), uhla okolo tejto osi (azimut) a výšky pozdĺž osi. Sférické súradnice vyjadrujú body pomocou vzdialenosti od pevného bodu (pôvod), uhla od pevného smeru (zenit) a azimutálneho uhla okolo tohto smeru.

V mnohých prípadoch môžu výpočty zahŕňajúce cylindrické alebo sférické súradnice byť efektívnejšie ako tie v karteziánskych súradniciach. Cylindrické súradnice sú intuitívne pre rotačnú symetriu – zhodujú sa s našim prirodzeným chápaním rotácie a výšky. Kým karteziánske súradnice sa často používajú v každodennom živote kvôli svojej jednoduchej štruktúre, cylindrické a sférické súradnice poskytujú cenný nástroj na pochopenie a analýzu javov týkajúcich sa cylindrickej alebo sférickej symetrie, rotačného pohybu alebo priestorovej orientácie. Ich aplikácie zahŕňajú širokú škálu oblastí, od inžinierstva a navigácie až po fyziku, techniku a robotiku.

2. Historické pozadie

Historický vývoj cylindrických a sférických súradníc je spojený s rozvojom astronómie, kartografie a navigácie. Tieto súradnicové systémy sa vyvinuli počas storočí a stali sa nepostrádateľnými nástrojmi na pochopenie a reprezentáciu priestorových vzťahov v rôznych oblastiach. Vývoj cylindrických a sférických súradníc môžeme vystopovať až k starovekým civilizáciám. Tieto súradnicové systémy pravdepodobne vznikli ako nástroje na pochopenie a meranie priestorových vzťahov v astronómii a navigácii. Pôvod cylindrických súradníc sa spája so starovekými gréckymi matematikmi Apollóniom z Pergy a Hipparchom. Títo vedci aplikovali princípy valcových súradníc pri štúdiu lunárneho pohybu a mapovaní nočnej oblohy, pretože poskytovali pohodlný spôsob reprezentácie polohy hviezd vzhľadom na nebeskú sféru. Najstaršie známe použitie sférických súradníc pochádza od starovekých Grékov. Astronómovia ako Aristarchos zo Samu a



Hipparchos využívali sférické súradnice na mapovanie polôh nebeských telies. Ich práca položila základy pre rozvoj sférickej trigonometrie, ktorá je nevyhnutná pre výpočty zahrňajúce sférické súradnice. Počas stredoveku a renesancie sa sférické súradnice naďalej používali predovšetkým v astronómii. Astronómovia ako Ptolemaios a Mikuláš Koperník ich využívali na vypracovanie modelov slnečnej sústavy. Vynález astrolábu, navigačného prístroja, ktorý využíval sférické súradnice, ďalej potvrdil ich význam v praktických aplikáciách. Sférické súradnice používali aj prví námorníci na určenie svojej polohy na povrchu Zeme. Zemepisná šírka a dĺžka zodpovedajú sklonu a azimutu. 17. storočie prinieslo významné pokroky v chápaní tohto súradnicového systému. Isaac Newton a Gottfried Wilhelm Leibniz vyvinuli kalkulus, ktorý poskytol silný matematický rámec na analýzu sférických súradníc. Následný vývoj diferenciálnej geometrie a vektorového kalkulu ešte viac zdokonalil teóriu.

3. Výsledky vzdelávania

Po absolvovaní tohto modulu by mali študenti byť schopní:

- vyjadriť body a funkcie v polárnych, cylindrických a sférických súradniciach,
- používať konverzné vzorce na prevod súradníc bodov a obory definícií z karteziánskych do polárnych, cylindrických a sférických súradníc a naopak.

Prerekvizity: Pred začatím tohto modulu by mali študenti

- byť oboznámení s pojmi bodov a funkcií dvoch a troch premenných v karteziánskych súradniciach.

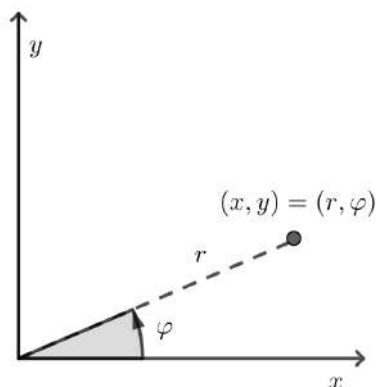
4. Teoretické základy

Polárne súradnice

Začneme s dvojrozmerným priestorom a predstavíme si polárny súradnicový systém. Súradnicové systémy nie sú vlastne nič iné ako spôsob, akým definujeme bod v priestore. Napríklad v karteziánskom súradnicovom systéme je bod definovaný súradnicami (x, y) , pričom bod definujeme tak, že začneme v začiatku súradnicového systému a pohybujeme sa o x jednotiek horizontálne a následne o y jednotiek vertikálne. Toto však nie je jediný spôsob, ako definovať bod v dvojrozmernom priestore. Miesto toho, aby sme sa pohybovali vertikálne a horizontálne od začiatku súradnicového systému k bodu, môžeme ísť priamo od začiatku až k bodu a potom určiť uhol φ tktorý táto priamka zvierá s kladnou časťou osi x . Následne môžeme použiť vzdialenosť



r bodu od začiatku a uhol, o ktorý sme museli otáčať kladnú časť osi x , ako súradnice bodu. Tento systém sa nazýva polárny súradnicový systém.



Súradnice v tomto systéme sa nazývajú **polárne súradnice**.

Existuje dôležitý rozdiel medzi karteziánskymi a polárnymi súradnicami. V karteziánskych súradniciach existuje presne jedna sada súradníc pre každý bod. V polárnych súradniciach to nie je pravda. V polárnych súradniciach existuje doslova nekonečný počet súradníc pre daný bod. Napríklad, nasledujúce štyri body predstavujú rôzne súradnice toho istého bodu:

$$\left(4, \frac{\pi}{3}\right) = \left(4, -\frac{5\pi}{3}\right) = \left(-4, \frac{4\pi}{3}\right) = \left(-4, -\frac{2\pi}{3}\right).$$

Tieto štyri súradnice reprezentujú rovnaký bod bez toho, aby sme rotovali okolo súradnicovej osi viac ako raz. Ak umožníme, aby sa uhol otočil o ľubovoľný počet celých rotácií okolo osi, existuje nekonečne veľa súradníc pre ten istý bod. V skutočnosti, bod (r, φ) môže byť reprezentovaný akoukoľvek z nasledujúcich dvojíc súradníc:

$$(r, \varphi + 2\pi n), \quad (-r, \varphi + (2n + 1)\pi), \quad \text{kde } n \in \mathbb{Z}.$$

Musíme sa zamyslieť nad prevodmi medzi týmito dvoma súradnicovými systémami. Použitím pravouhlého trojuholníka na obrázku vyššie môžeme získať nasledujúce vzorce na prepočet medzi polárnymi a karteziánskymi súradnicami:

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi.$$

Pre prepočet z karteziánskych súradníc všimneme si túto veľmi užitočnú rovnicu:

$$x^2 + y^2 = (r \cos \varphi)^2 + (r \sin \varphi)^2 = r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = r^2 \cdot 1 = r^2.$$

Odmocnime obe strany rovnice (za predpokladu, že r je kladné číslo), dostaneme $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Pre získanie rovnice pre φ , začneme s $\frac{y}{x} = \frac{r \sin \varphi}{r \cos \varphi} = \tan \varphi$ a nájdeme inverznú funkciu k obom stranám rovnice, dostaneme, $\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$. Musíme si uvedomiť, že inverzná funkcia tangens nadobúda hodnoty z intervalu $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$. Nezabudnime, že existuje aj druhý uhol, pre $\varphi + \pi$.

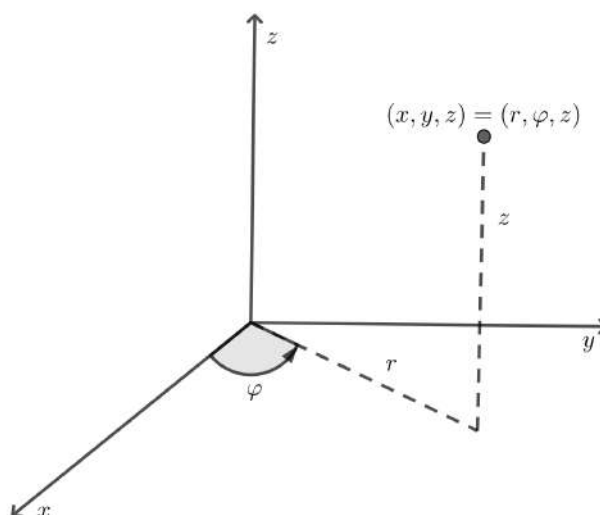
Na záver máme vzťahy na prevod z karteziánskych súradníc do polárnych:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ or } r^2 = x^2 + y^2$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Cylindrické súradnice

Cylindrický súradnicový systém je pomerne jednoduchý, pretože je to v podstate rozšírenie polárnych súradníc do troch rozmerov. Jediné, čo sa pridáva, je z súradnica, ako tretia súradnica. Polomer r a uhol φ sú tie isté ako pri polárnych súradniciach. Tu je zobrazenie bodu v \mathbb{R}^3 .



Na prevod x a y sa používajú rovnaké vzťahy ako pri polárnych súradniciach. Ak máme daný bod v cylindrických súradniciach, karteziánske súradnice môžeme získať pomocou nasledovných

vzorcov: conversions:

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$z = z.$$

Tretí vzťah je len potvrdením, že z súradnica bodu v karteziánskych a polárnych súradniciach je rovnaká.

Naopak, ak máme daný bod v karteziánskych súradniciach, jeho vyjadrenie v cylindrických súradniciach môžeme získať pomocou nasledovných vzorcov:

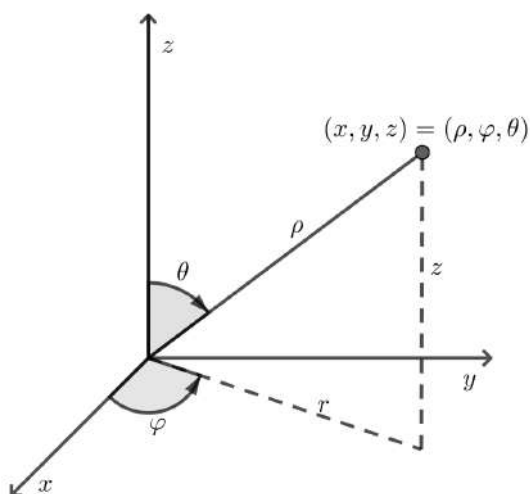
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ or } r^2 = x^2 + y^2$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

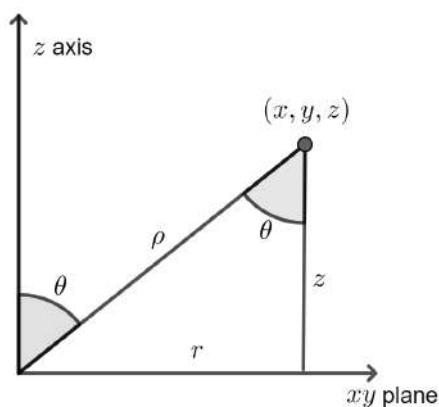
$$z = z.$$

Sférické súradnice

Sférický súradnicový systém sa skladá z nasledujúcich troch veličín. Prvou je polomer ρ , čo je vlastne vzdialenosť od začiatku súradnicového systému k bodu, a musí platiť $\rho \geq 0$. Ďalej je to uhol φ . Je to ten istý uhol, ako v polárnych/cylindrických súradniciach. Je to uhol medzi kladnou časťou osi x a priamkou označenou ako r (je to tá istá priamka r ko v polárnych/cylindrických súradniciach). Na uhol φ nie sú kladené žiadne podmienky. A nakoniec je tu uhol θ . Toto je uhol medzi kladnou časťou osi z a priamkou od začiatku súradnicového systému k bodu. Musí platiť $0 \leq \theta \leq \pi$. Zhrnieme si, že ρ je vzdialenosť od začiatku súradnicového systému k bodu, θ je uhol, o ktorý musíme rotovať od kladnej časti osi z , aby sme sa dostali k bodu, a φ je uhol, o ktorý musíme rotovať okolo osi x , aby sme sa dostali k bodu. Tu je náčrt bodu v \mathbb{R}^3 .



Na získanie prepočtových vzorcov začneme bodom v sférických súradniciach a spýtame sa, aké sú cylindrické súradnice tohto bodu. Takže, ak sú (ρ, φ, θ) dané, potrebujeme vypočítať (r, φ, z) . V skutočnosti musíme nájsť len ρ a z pretože φ je rovnaké v oboch súradnicových systémoch. Ak sa pozrieme na náčrt vyššie, získame nasledovný náčrt:



Vieme, že uhol medzi osou z a uhlom ρ je θ a s trochou geometrie vieme tiež, že uhol medzi ρ a vertikálnou stranou pravouhlého trojuholníka je tiež θ . Potom, s použitím trigonometrie pravouhlého trojuholníka, dostaneme:

$$z = \rho \cos \theta$$

$$r = \rho \sin \theta.$$

A to sú presne tie vzorce, ktoré sme hľadali. Takže, ak máme bod v sférických súradniciach, cylindrické súradnice bodu budú:

$$r = \rho \sin \theta$$

$$\varphi = \varphi$$

$$z = \rho \cos \theta.$$

Všimnime si, že z Pythagorovej vety dostaneme: $\rho^2 = r^2 + z^2$.

Ďalej, ak chceme získať karteziánske súradnice toho istého bodu, použijeme cylindrické prepočtové vzorce z predchádzajúcej sekcie a vzorce pre r a z a dostaneme:

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = \rho \cos \theta$$

Tiež vieme, že ak $r^2 = x^2 + y^2$ tak, $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Prepočty bodov z karteziánskych alebo cylindrických súradníc na sférické súradnice sa zvyčajne robia pomocou týchto rovnakých prepočtových vzorcov.

5. Aplikácie v každodennom živote

V modernej dobe sa cylindrické a sférické súradnice stali nevyhnutnými nástrojmi v rôznych oblastiach, ako je fyzika, inžinierstvo a počítačová grafika. Používajú sa na popis pohybu častíc, modelovanie fyzikálnych javov a reprezentáciu trojrozmerných údajov. Konkrétnejšie, cylindrické súradnice sa používajú v dynamike tekutín na výpočet prietokov v potrubiach alebo vplyv síl na ponorené povrchy, v štruktúrnom inžinierstve sa používajú pri analýze štruktúr pozostávajúcich z kruhových komponentov ako veže, valce alebo kupoly, v softvérovom inžinierstve, najmä v 3D grafike a simuláciách, kde je potrebné digitálne reprezentovať objekty s kruhovými alebo valcovými vlastnosťami.

Cylindrické súradnice sa často používajú na popis geometrie cylindrických objektov, ako sú rúry, hriadele alebo ozubené kolesá. Týmto sa uľahčuje návrh a analýza ich vlastností. V procesoch výroby, ako je sústruženie alebo frézovanie, sa cylindrické súradnice používajú na riadenie pohybu nástrojov pri vytváraní cylindrických tvarov.

Polia, ako elektrické a magnetické polia, môžu byť lepšie popísané pomocou cylindrických



súradníc, najmä pri práci s cylindrickou symetriou, ako sú dlhé vodiče alebo solenoidy, a pomocou sférických súradníc, najmä pri riešení symetrických situácií, ako sú náboje alebo prúdy.

Cylindrické a sférické súradnice sa používajú na analýzu prúdenia tekutín okolo cylindrických objektov, ako sú rúry alebo stĺpy, alebo okolo objektov s guľovou symetriou, ako sú bubliny alebo kvapky.

V problémoch týkajúcich sa prenosu tepla môžu byť cylindrické súradnice užitočné na analýzu situácií s cylindrickou symetriou, ako je vedenie tepla v rúre alebo v cylindri.

Robotické ramená často používajú sférické súradnice na určenie polohy a orientácie svojho koncového efektora. To umožňuje presné pohyby a vykonávanie úloh, ako je zváranie alebo montáž.

Spracovanie údajov zo senzorov: Sensory na robotoch alebo autonómnych vozidlách môžu používať cylindrické alebo sférické súradnice na reprezentáciu údajov, ako je smer zvuku alebo poloha objektov; v prípade cylindrických súradníc sú objekty relatívne k centrálnej osi.

Meteorológovia používajú cylindrické súradnice na popis veterných vzorcov okolo centrálneho bodu, čo pomáha pri pochopení a predpovedaní poveternostných podmienok.

GPS systémy používajú sférické súradnice na presné určenie polohy zariadenia na povrchu Zeme. Zemepisná šírka a dĺžka sú v podstate sférické súradnice, pričom šírka predstavuje zenitový uhol a dĺžka predstavuje azimutálny uhol.

Na určenie vzdialenosti medzi dvoma bodmi sa používajú sférické súradnice v spojení s polomerom Zeme na výpočet najkratšej cesty medzi nimi.

Vo virtuálnej realite sa objekty často modelujú pomocou sférických súradníc. To umožňuje presné zobrazenie a manipuláciu s trojrozmernými objektmi.

Astronómovia používajú sférické súradnice na sledovanie polôh hviezd, planét a iných nebeských telies. Pravý ascendent a deklinácia sú ekvivalentné azimutálnemu a zenitovému uhlu.

Pochopenie obežných dráh nebeských telies zahŕňa použitie sférických súradníc na opísanie ich polohy a rýchlosti vzhľadom na centrálny bod.

6. Literatúra

[1] <https://tutorial.math.lamar.edu/>

8 TĚMA: Trigonometrické funkcie

1. Zdôvodnenie výberu témy

Trigonometria je kritickým odvetvím matematiky, ktorá tvorí základ pre pokročilé témy vo výpočtch, fyzike, inžinierstve a architektúre. Je nevyhnutné, aby študenti ovládali trigonometrické koncepty, keď postupujú vo svojej akademickej a profesionálnej kariére. Trigonometria ale môže byť pre mnohých študentov abstraktná a náročná, najmä pokiaľ ide o vizualizáciu a pochopenie príslušných priestorových vzťahov.

Použitie VR pri štúdiu trigonometrie rieši tieto výzvy tým, že poskytuje úplne iný zážitok z učenia. VR umožňuje študentom vizualizovať trigonometrické koncepty v troch rozmeroch, čo uľahčuje pochopenie zložitých myšlienok. Študenti môžu napríklad manipulovať s uhlami a trojuholníkmi vo virtuálnom priestore, pozorovať účinky zmien v reálnom čase a lepšie porozumieť jednotkovej kružnici a jej aplikáciám. Tento interaktívny vizuálny prístup pomáha posilniť učenie, robí trigonometriu dostupnejšou a pútavejšou pre študentov s rôznymi štýlmi učenia.

Tento modul využíva virtuálnu realitu (VR) na výučbu základných pojmov trigonometrie. Študenti budú vtiahnutí do 3D prostredia, aby preskúmali a pochopili vzťahy medzi uhlami a stranami v pravouhlých trojuholníkoch, jednotkovej kružnici a goniometrických funkciách, ako sú sínus, kosínus a tangens. Skúsenosti s VR umožňujú interaktívne skúmanie týchto konceptov a poskytujú praktický prístup k pochopeniu princípov trigonometrie.

2. Historické pozadie

Trigonometria (z gréckeho *τριγωνον* (trígōnon) 'trojuholník' a *μετρον* (métron) 'mera') je odvetvie matematiky, ktoré sa zaoberá vzťahmi medzi uhlami a dĺžkami strán trojuholníkov. Práve goniometrické funkcie spájajú uhly pravouhlého trojuholníka s pomermi dĺžok jeho strán.

Trigonometria má dlhú a bohatú históriu, ktorá siaha až do staroveku. Vznikla v heleniistickom období počas 3. storočia p. n. l. z aplikácií geometrie na astronómiu. Štúdium trojuholníkov možno vysledovať do 2. tisícročia p. n. l. v egyptskej matematike (*Rhindov matematický papyrus*) a babylonskej matematike. Babylončania a Egypťania používali rané trigonometrické myšlienky na praktické účely, ako je astronómia a zememeračstvo. Trigonometria prevládala aj v kušitskej matematike.

Formálne štúdium trigonometrie začalo u Grékov, najmä dielom *Hipparcha* okolo roku 150 p.



n. l., ktorému sa pripisuje zostavenie prvej známej trigonometrickej tabuľky. *Ptolemaios* neskôr rozšíril Hipparchovu prácu a významne prispel k tejto oblasti. V indickej astronómii prekvitalo štúdium goniometrických funkcií v období Gupta, najmä vďaka *Aryabhatovi* (6. storočie n. l.), ktorý objavil sínus, kosínus a iné goniometrické funkcie.

Gréci sa zamerali na výpočet akordov, zatiaľ čo matematici v Indii vytvorili prvé známe tabuľky hodnôt pre trigonometrické pomery (trigonometrické funkcie).

Trigonometria sa stala samostatnou disciplínou v islamskom svete, kde bolo známych všetkých šesť goniometrických funkcií. Počas zlatého islamského veku urobili vedci ako *Al-Battani*, *Abu al-Wafa* a *Al-Khwarizmi* ďalšie pokroky, najmä v sférickej trigonometrii, ktorá bola veľmi dôležitá pre navigáciu a astronómiu. Preklady arabských a gréckych textov viedli k tomu, že trigonometria bola prijatá ako predmet na latinskom západe, počnúc renesanciou s Regiomontanom.

Vývoj modernej trigonometrie sa posunul počas západného veku osvietenstva, počnúc matematikou 17. storočia (*Johannes Kepler*, *Isaac Newton*, *James Stirling* a kol.) a dosiahol svoju modernú podobu *Leonhardom Eulerom* (1748). Ich práca pomohla integrovať trigonometriu do širšej oblasti matematiky a jej aplikácií vo vede.

Začlenením VR do štúdia trigonometrie tento modul spája študentov s historickým vývojom predmetu a so špičkovou technológiou súčasnosti. Tento prístup nielen zlepšuje zážitok z učenia, ale tiež ilustruje pokračujúci význam a aplikáciu trigonometrie v modernom svete.

3. Výsledky vzdelávania

1. Porozumenie základných trigonometrických konceptov:

- Pochopenie goniometrických pomerov: Študenti by mali byť schopní definovať a vysvetliť základné trigonometrické pomery – sínus, kosínus a tangens – v kontexte pravouhlého trojuholníka.
- Aplikácia pomerov: Študenti by mali byť schopní použiť tieto pomery na riešenie jednoduchých problémov týkajúcich sa strán a uhlov pravouhlých trojuholníkov.

2. Visualizácia trigonometrických vzťahov:

- Štúdium jednotkovej kružnice: Študenti by mali získať základné znalosti o jednotkovej kružnici, vrátane toho, ako uhly zodpovedajú súradniciam na kružnici a ako to súvisí s funkciami sínus a kosínus.
- Interakcia v reálnom čase: Pomocou VR by študenti mali byť schopní vizualizovať,



ako zmena uhla v trojuholníku alebo na jednotkovej kružnici ovplyvňuje hodnoty sínus, kosínus a tangens, čím sa zlepší ich priestorové chápanie týchto pojmov.

3. Grafické znázorňovanie trigonometrických funkcií:

- Základná interpretácia grafov: Študenti by mali byť schopní rozpoznať a interpretovať grafy funkcií sínus, kosínus a tangens, pričom by mali rozumieť ich kľúčovým vlastnostiam, ako je amplitúda, perióda a frekvencia.
- Kreslenie grafov: Študenti by mali byť schopní načrtnúť alebo rozpoznať základné grafy týchto funkcií na základe daných údajov alebo simulácií VR.

4. Aplikácie v reálnom svete:

- Spojenie so scenármi v reálnom svete: Študenti by mali byť schopní identifikovať a opísať aspoň jednu aplikáciu trigonometrie v reálnom svete (napr. navigáciu, architektúru alebo fyziku), ako to môže byť demonštrované v prostredí VR.

5. Zlepšená angažovanosť a dôvera:

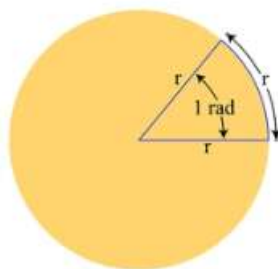
- Lepšie porozumenie trigonometrie: Pohlcujúca povaha VR by mala pomôcť študentom cítiť sa istejšie a zapojiť sa do trigonometrických konceptov, čím sa znižuje úzkosť alebo frustrácia často spojená s učením matematiky.
- Vylepšené zručnosti pri riešení problémov: Študenti by mali preukázať zlepšené schopnosti riešiť problémy tým, že svoje pochopenie trigonometrických pojmov aplikujú na scenáre založené na VR alebo jednoduché slovné úlohy.

4. Teoretické základy

1. Meranie uhlov v radiánoch

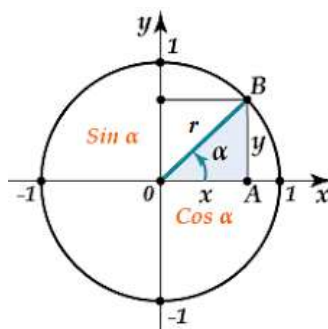
Spolu s praktickým meraním uhlov v stupňoch sa v teoretických otázkach používa aj meranie v radiánoch, hodnota uhla α , ktorý je centrálny voči obvodu, sa meria pomerom dĺžky l oblúka príslušného k tomuto uhlu k dĺžke polomeru r tejto kružnice: $\alpha = \frac{l}{r}$. V tomto meraní je jednotkou *radián* – uhol, ktorý je stredom oblúka, ktorého dĺžka sa rovná polomeru kruhu. Jeden *radián* sa rovná $57^{\circ}17'44''{,}8$, čo znamená, že $1^{\circ} = 0,017453$ radiánu. Prechod z jednej miery do druhej sa uskutočňuje podľa vzorcov:

$$\alpha^{\circ} = \frac{180}{\pi} \alpha(rad), \quad \alpha(rad) = \frac{\pi}{180} \alpha^{\circ}.$$



2. Trigonometrické pomery

Goniometrické funkcie sa určujú pomocou jednotkovej kružnice z trojuholníka s ostrým uhlom (pre ostré uhly). Jednotková kružnica je kružnica s polomerom 1 so stredom v počiatku súradnicovej sústavy. Body 0 , A a B tvoria zodpovedajúci trojuholník.



The coordinates (x, y) correspond to $((\cos \alpha, \sin \alpha))$ for a given angle (α) as follows:

- Sínus (sin): Definovaný ako pomer protiláhej odvesny ku prepone pravouhlého trojuholníka:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r} = y = AB.$$

- Kosínus (cos): Definovaný ako pomer príľahlej odvesny ku prepone pravouhlého trojuholníka:

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} = x = OB.$$

- Tangens (tan): Definovaný ako pomer protiláhej odvesny k príľahlej:

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} = \frac{AB}{OB}.$$

Ďalšie goniometrické funkcie je možné definovať na základe predchádzajúcich definícií:

- Kontangens (\cot): Definovaný ako \tan :

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{OB}{AB}.$$

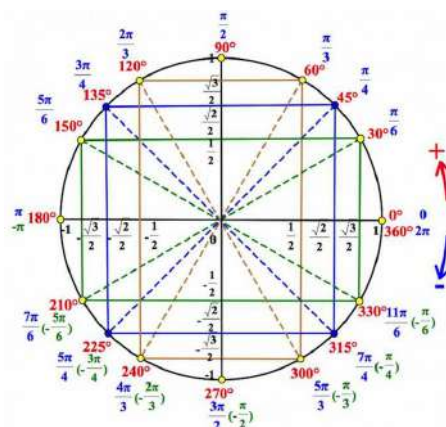
- Sekans (\sec): Definovaný ako prevrátená hodnota funkcie \cos :

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{1}{x}.$$

- Kosekans (\csc): Definovaný ako prevrátená hodnota funkcie \sin :

$$\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{y}.$$

Keď sa uhol mení od 0 do 2π (v ľubovoľnom smere), zodpovedajúce hodnoty goniometrických funkcií sú definované podľa symetrie a so zodpovedajúcimi znamienkami.



Z definícií to môžeme ľahko usúdiť, že

- goniometrické funkcie $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$ sú definované na \mathbb{R} ;
- goniometrické funkcie $f(x) = \tan x$ a $f(x) = \sec x$, sú definované na $\mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2}, \forall k \in \mathbb{Z}\}$;
- goniometrické funkcie $f(x) = \cot x$ and $f(x) = \csc x$, sú definované na $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, \forall k \in \mathbb{Z}\}$;
- goniometrické funkcie $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \sec x$, a $f(x) = \csc x$ sú periodické s periódou 2π : $f(x) = f(x + 2k\pi), \forall k \in \mathbb{Z}$, *i.e.*

$$\sin(2k\pi + x) = \sin x, \quad \cos(2k\pi + x) = \cos x,$$



$$\sec(2k\pi + x) = \sec x, \quad \csc(2k\pi + x) = \csc x$$

- goniometrické funkcie $\tan x$ a $\cot x$ sú periodické s periódou π : $f(x) = f(x+k\pi), \forall k \in \mathbb{Z}$ i.e.

$$\tan\left(\frac{k\pi}{2} + x\right) = \tan x, \quad \cot\left(\frac{k\pi}{2} + x\right) = \cot x.$$

- goniometrické funkcie $\cos x$ a $\sec x$ sú párne: $f(-x) = f(x), \forall x \in D_f$;
- goniometrické funkcie $\sin x, \csc x, \tan x$, a $\cot x$ sú nepárne: $f(-x) = -f(x), \forall x \in D_f$;
- pre všetky $x \in \mathbb{R}$, platí

$$-1 \leq \sin x \leq 1; \quad -1 \leq \cos x \leq 1;$$

- pre všetky $x \in D_f$, obor hodnôt $\tan x$ a $\cot x$ je $-\infty$ to $+\infty$;
- pre všetky $x \in D_f$, obor hodnôt $\sec x$ a $\csc x$, je $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Základné trigonometrické identity:

- Pythagorova identita: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$;
- $\sin x \csc x = 1, \quad \cos x \sec x = 1$;
- $\sec^2 x - \tan^2 x = 1, \quad \csc^2 x - \cot^2 x = 1$.

Vyjadrenie jednej goniometrickej funkcie pomocou inej:

- $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \frac{\tan x}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 x}}$;
- $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 x}} = \frac{\cot x}{\sqrt{1 + \cot^2 x}}$;
- $\tan x = \frac{\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x} = \sqrt{\sec^2 x - 1} = \frac{1}{\sqrt{\csc^2 x - 1}}$;
- $\cot x = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 x}}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 x - 1}} = \sqrt{\csc^2 x - 1}$.

3. Vzorce pre súčet a rozdiel uhlov:

- $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$;
- $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$;
- $\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$;
- $\cot(x \pm y) = \frac{\cot x \cot y \mp 1}{\cot y \pm \cot x}$.

4. Vzorce pre dvojnásobný uhol:



- $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$;
- $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$;
- $\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$;
- $\cot(2x) = \frac{\cot^2 x - 1}{2 \cot x}$.

5. Vzorce pre polovičný uhol:

- $\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos x)}$;
- $\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos x)}$;
- $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$;
- $\cot\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}} = \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$.

6. Súčet a rozdiel goniometrických funkcií

- $\sin x + \sin y = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$;
- $\sin x - \sin y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$;
- $\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$;
- $\cos x - \cos y = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$;
- $\tan x \pm \tan y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cos y}$;
- $\cot x \pm \cot y = \pm \frac{\sin(x \pm y)}{\sin x \sin y}$.

7. Súčiny niektorých goniometrických funkcií:

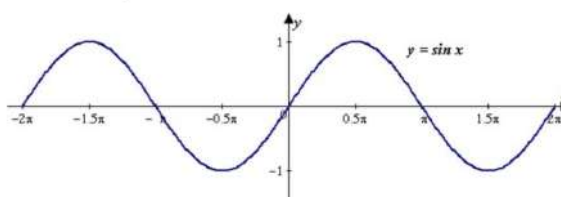
- $\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)]$;
- $\cos x \cos y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) + \cos(x + y)]$;
- $\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x - y) + \sin(x + y)]$.

8. Druhé mocniny niektorých goniometrických funkcií:

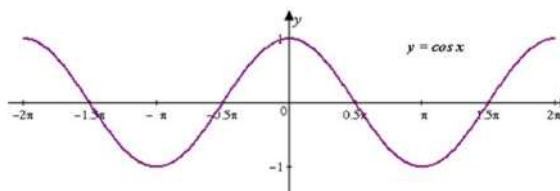
- $\sin^2 x = \frac{1}{2}[1 - \cos(2x)]$; $\cos^2 x = \frac{1}{2}[1 + \cos(2x)]$.

9. Grafy základných goniometrických funkcií:

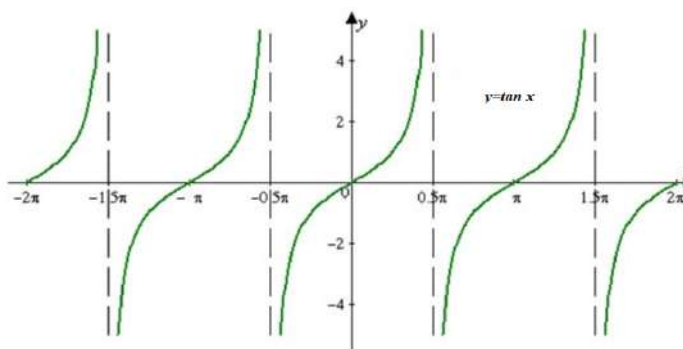
- Graf funkcie $\sin x$:



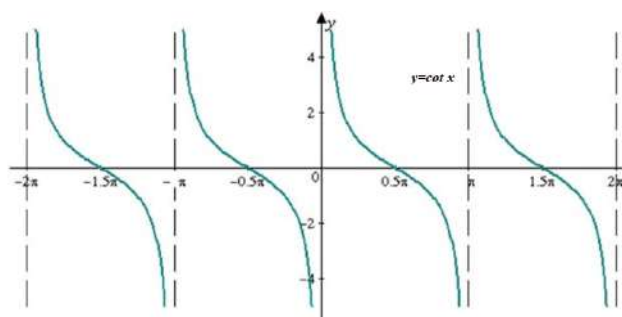
- Graf funkcie $\cos x$:



- Graf funkcie $\tan x$:



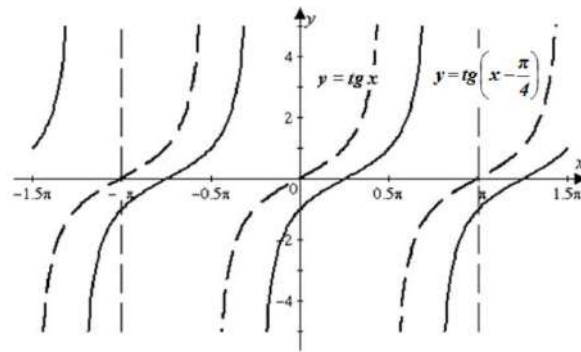
- Graf funkcie $\cot x$:



Príklady

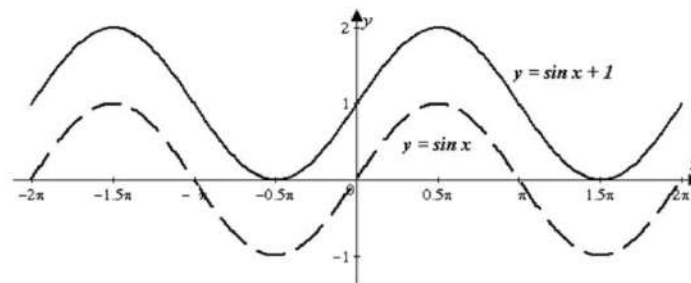
- Nakreslite graf funkcie $y = \tan(x - \frac{\pi}{4})$.

Riešenie. Hľadaný graf dostaneme z grafu funkcie $y = \tan x$ posunutím doprava v smere osi x o $\frac{\pi}{4}$:



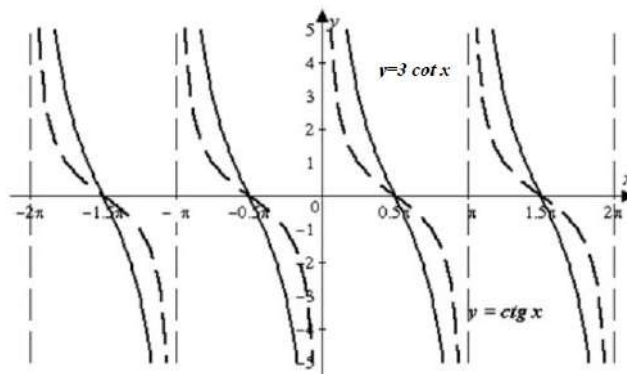
- Nakreslite graf funkcie $y = \sin x + 1$.

Riešenie. Hľadaný graf dostaneme z grafu funkcie $y = \sin x$ posunutím hore v smere osi y o 1:



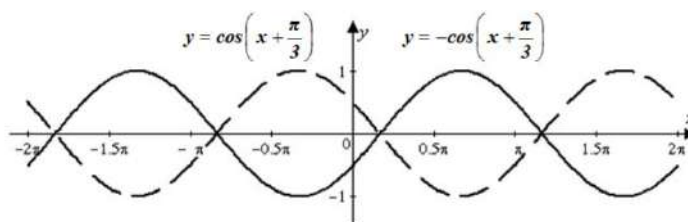
- Nakreslite graf funkcie $y = 3 \cot x$.

Riešenie. Hľadaný graf dostaneme z grafu funkcie $y = \cot x$ natiahnutím v smere osi y trikrát (vzdialenosť každého bodu grafu od osi x sa strojnásobí):



- Nakreslite graf funkcie $y = -\cos(x + \frac{\pi}{3})$.

Riešenie. Daný graf zostrojíme z grafu funkcie $y = \cos(x + \frac{\pi}{3})$ prevrátením okolo osi x :



Inverzné funkcie ku goniometrickým funkciám

Inverzné goniometrické funkcie k základným goniometrickým funkciám: sínus, kosínus, tangens, kotangens, sekans a kosekans sú zvyčajne označované ako arcsin, arccos, arctan, arccot, arcsec a arccsc, umožňujú nám určiť uhol, ktorý zodpovedá danému trigonometrickému pomeru.

Napríklad, ak $\sin \theta = x$ pre nejaký uhol θ , potom môže byť uhol vyjadrený ako:

$$\theta = \arcsin(x).$$

Každá inverzná trigonometrická funkcia má obmedzený obor hodnôt, aby sa zabezpečilo, že je dobre definovaná a prostá. Tieto obory hodnôt sú zvolené tak, aby každá inverzná funkcia zachytávala jeden úplný cyklus pôvodnej funkcie. Konkrétne obory hodnôt sú nasledovné:

- $\arcsin(x) : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,
- $\arccos(x) : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$,
- $\arctan(x) : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Vzťah medzi goniometrickou funkciou a jej inverznou funkciou je definovaný oborom hodnôt pôvodnej funkcie a definičným oborom inverznej funkcie. Napríklad funkcia $\sin(x)$ je definovaná pre všetky reálne hodnoty x , ale obor hodnôt $\sin(x)$ je medzi $[-1, 1]$. V dôsledku toho je inverzná funkcia $\arcsin(x)$ definovaná len pre $x \in [-1, 1]$ a vytvára uhol v obmedzenom obore hodnôt $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Toto obmedzenie oboru hodnôt inverznej funkcie pomáha vyriešiť nejednoznačnosť. Keďže goniometrické funkcie sú periodické, bez tohto obmedzenia nie sú prosté.

Inverzné goniometrické funkcie zohrávajú kľúčovú úlohu pri riešení rovníc, kde uhly musia byť určené zo známych goniometrických hodnôt. Aplikácie týchto funkcií siahajú do rôznych oblastí, ako je fyzika, inžinierstvo a informatika, najmä v kontextoch, kde je potrebné určiť uhol.



Inverzné goniometrické funkcie majú aplikácie v rôznych oblastiach, vrátane fyziky, inžinierstva a počítačovej grafiky, kde je určovanie uhlov zo známych pomerov nevyhnutné.

5. Aplikácie v každodennom živote

Trigonometria síce nemá svoje priame aplikácie pri riešení praktických problémov, ale využíva sa v rôznych oblastiach, ktoré máme radi. Napríklad hudba, zvuk sa šíri vo vlnách a tento vzorec, aj keď nie taký pravidelný ako funkcie \sin alebo \cos , je stále užitočný pri vývoji počítačovej hudby. Počítač zjavne nemôže počúvať a chápať hudbu ako my, takže počítače ju matematicky reprezentujú pomocou jej základných zvukových vln. A to znamená, že zvučkári musia poznať aspoň základy trigonometrie. A dobrá hudba, ktorú títo zvučkári produkujú, sa používa na to, aby nás upokojila v živote plného stresu – to všetko vďaka trigonometrii.

- 1. Trigonometria v astronómii.** Ľudí vždy priťahoval vesmír. Astronómia bola hnacou silou pokroku v trigonometrii. Väčšina skorých objavov v trigonometrii súvisela so sférickou trigonometriou, hlavne kvôli jej aplikácii v astronómii. Tri hlavné postavy, o ktorých vieme vo vývoji gréckej trigonometrie, sú *Hipparchos*, *Menelaos* a *Ptolemaios*. Pravdepodobne existovali aj iní autori, ale postupom času sa ich diela stratili a ich mená sa zabudli. Ako ďaleko sú hviezdy? Počas celého roka sa Zem točí okolo Slnka a zdá sa, že zdanlivá poloha hviezdy sa mierne posúva voči hviezdám, ktoré sú oveľa ďalej. Tento jav môžete pozorovať celkom jednoducho. Natiahnite ruku pred seba palcom nahor. Potom sa na to pozrite najprv ľavým a potom pravým okom. Môžete si všimnúť, že prst mení polohu. Ak priblížite prst k očiam, posun vo vzťahu k pozadiu bude väčší. Naše oči sú umiestnené v určitej vzdialenosti, a preto priame čiary, ktoré mentálne kreslíme od prsta k očiam, vytvárajú uhol. Ako pokračujeme v týchto rovinkách, nájdeme dve rôzne polohy prsta. A uhol medzi nimi bude závisieť od toho, čím bližšie je prst k očiam. Tento jav je známy ako paralaxa. Astronómovia odhadujú vzdialenosť k blízkym objektom vo vesmíre pomocou tejto metódy, ktorá sa nazýva hviezdna paralaxa alebo trigonometrická paralaxa.
- 2. Trigonometria pri meraní výšky budovy alebo hôr.** Trigonometria sa dá použiť na meranie výšky napríklad hôr: ak poznáte vzdialenosť, z ktorej pozorujete, a uhol elevácie, ľahko určíte výšku hory. Rovnako, ak máte hodnotu jednej strany a uhla sklonu z vrcholu kopca, môžete nájsť druhú stranu v trojuholníku, stačí vedieť jednu stranu a uhol trojuholníka. Podľa overených faktov americkí vedci tvrdia, že na určenie vzdialenosti k akémukoľvek objektu náš mozog najprv odhadne uhol medzi rovinou pohľadu a rovi-



nou zeme. Vo všeobecnosti nie je myšlienka “merania uhlov” nová. Vzdialené predmety vyššie v zornom poli nakreslili maliari starovekej Číny, pričom trochu zanedbávajú zákony perspektívy. Arabský vedec jedenásteho storočia, *Alha-zen*, sformuloval teóriu určovania vzdialenosti odhadom uhlov.

3. **Trigonometria v stavebníctve.** Pri stavbe budov, ciest, mostov atď. ľudia potrebujú trigonometriu, aby:

- zmerali polia, pozemky a plochy;
- zmerali výšku budovy, šírku, dĺžku, atď.
- postavili steny rovnobežné a kolmé;
- položili keramické dlaždice;
- navrhli sklon strechy a podobne.

Architekti používajú trigonometriu na výpočet štrukturálneho zaťaženia, sklonov strechy, povrchov pôdy a mnohých ďalších aspektov, vrátane tienenia a svetelných uhlov.

Trigonometriu možno nazvať géniom architektúry, väčšina budov, ktoré poznáme, bola navrhnutá práve vďaka nej. Niektoré známe príklady takýchto budov sú:

- Mary Axe v Londýne:



- Budova opery v Sydney:





- Reštaurácia v Los Manantiales v Argentíne:



- Gaudího materská škola v Barcelone:



- Bodegas Isios vinárstvo v Španielsku:



4. **Trigonometria v letectve.** Letoví inžinieri musia brať do úvahy rýchlosť letu, vzdialenosť a smer spolu s rýchlosťou a smerom vetra. Vietor hrá dôležitú úlohu v tom, ako a kedy lietadlo priletí tam, kde je to potrebné, toto sa rieši pomocou vektorov na vytvorenie trojuholníka pomocou trigonometrie.
5. **Trigonometria v biológii.** Jednou z charakteristických črt živj prírody je cyklický charakter väčšiny procesov v nej prebiehajúcich. Medzi pohybom nebeských telies a živých organizmov existuje súvislosť. Biorytmy sú pomerne pravidelné zmeny povahy živého organizmu a intenzity jeho biologických procesov. To je bežné vo všetkých živých organizmoch a schopnosť robiť takéto zmeny sa dedí. Tento jav možno pozorovať tak v jednotlivých bunkách, ako aj v celých populáciách živých organizmov. Biologické rytmy sa delia na ekologické (zhodujúce sa s rytmom prostredia) a fyziologické (obdobia od zlomkov sekundy



po niekoľko minút). Z časového hľadiska môžu byť biorytmy sezónne, ročné, denné a pod. Pomocou goniometrických funkcií je možné zostaviť aj model biorytmov.

Morskí biológovia často používajú trigonometriu na stanovenie meraní. Napríklad zistiť, ako úrovne svetla v rôznych hĺbkach ovplyvňujú schopnosť rias fotosyntetizovať. Trigonometria sa používa na zistenie vzdialenosti medzi nebeskými telesami. Morskí biológovia tiež využívajú matematické modely na meranie a pochopenie morských živočíchov a ich správania. Morskí biológovia môžu použiť trigonometriu na určenie veľkosti voľne žijúcich zvierat na diaľku.

6. **Trigonometria v navigácii.** Trigonometria sa používa na nastavenie smerov, ako je sever, juh, východ a západ. Povie vám, akým smerom sa máte vybrať pomocou kompasu, aby ste sa dostali priamo na miesto. Používa sa v navigácii na určenie polohy. Používa sa aj na zistenie vzdialenosti brehu od bodu v mori. Používa sa aj na videnie horizontu.
7. **Trigonometria vo videohrách.** Predstavte si hráča, ktorý hladko kľže po blokoch cesty. V skutočnosti neskáče rovno pozdĺž osi y , je to mierne zakrivená dráha alebo parabolická dráha, ktorou sa snaží prekonať prekážky na svojej ceste. Preskočiť tieto prekážky mu pomáha trigonometria. Herný priemysel je o IT a počítačoch a trigonometria je pre týchto inžinierov rovnako dôležitá.

6. Literatúra

[1.] Wikipedia, the free encyclopedia.

[2.] Weber, K. Students' understanding of trigonometric functions. Math Ed Res J 17, 91–112 (2005). <https://doi.org/10.1007/BF03217423>

[3.] Rahmawati N. D., Buchori A., Wibisono A. Effectiveness of VAR (Virtual Augmented Reality)-Based Educational Games in Trigonometry Learning in University, 2nd International Conference on Education and Technology (ICETECH 2021), Conference paper. 10.2991/as-sehr.k.220103.039

[4.] The Impact of Virtual Reality Technology on the learning of Trigonometry for High School Students. Video: <https://hundred.org/en/innovations/the-impact-of-virtual-reality-technology-on-the-learning-of-trigonometry-for-high-school-students>

[5.] Gibilisco S. Trigonometry demystified. A self-teaching Guide. MvGraw Hill. 2003.



9 TĚMA: Neeuklidovská geometria

1. Zdôvodnenie výberu témy

Neeuklidovská geometria (NEG) poskytuje alternatívny a podnetný pohľad na základy axiomatiky, pričom zásadne mení naše chápanie geometrie (Coxeter, 1965). Tým, že spochybňuje hlboko zakorenené predpoklady euklidovskej geometrie, NEG otvára priestor na rozvoj pokročilých kognitívnych schopností, ktoré sú nevyhnutné v matematickom vzdelávaní a širšom vedeckom bádani. Pri práci s neeuklidovskými geometrickými modelmi sa študenti aktívne konfrontujú s obmedzeniami euklidovských rámcov, čo ich núti kriticky analyzovať rôzne modely. Tento proces posilňuje ich logické a kritické myslenie a podporuje tvorivé riešenie problémov, čo je neoceniteľné pre vedecké inovácie (Buda, 2017; Sukestiyarno a kol., 2023; Kranz a kol., 2014).

Skúmanie neeuklidovských priestorov je obohacujúce, pretože ponúka situácie, ktoré popierajú obvyklú euklidovskú intuíciu, ako napríklad geometria zakrivených povrchov v hyperbolických alebo eliptických kontextoch.

Euklidov piaty postulát, často formulovaný ako Playfairov postulát, tvrdí, že pre každú priamku l a bod $A \notin l$ existuje práve jedna priamka s , ktorá obsahuje bod $A \in s$ a je rovnobežná s l . V neeuklidovských geometriách to však neplatí. Hyperbolická geometria umožňuje nekonečne mnoho rovnobežných priamok s l prechádzajúcich bodom A , zatiaľ čo eliptická geometria neumožňuje žiadne. Tento odklon od euklidovskej normy núti študentov prehodnotiť, čo znamená priestor, "priamka" alebo "rovina", čo je mentálne náročné, no mimoriadne prínosné z hľadiska intelektuálneho rozvoja. NEG tiež zdôrazňuje silu axiomatického prístupu, čo je metóda, ktorá je základom vedeckého pokroku v rôznych oblastiach poznania. Práca s alternatívnymi axiomami a skúmanie toho, ako malé zmeny v základných predpokladoch vedú k úplne odlišným matematickým štruktúram, umožňuje študentom pochopiť geometriu a oceniť rigoróznosť formálnych metód. Tieto skúsenosti sú neoceniteľné v pokročilých štúdiách, ako sú topológia, diferenciálna geometria a teoretická fyzika (napríklad geometria časopriestoru), kde sa tieto metódy uplatňujú. V edukačných kontextoch, najmä v dynamických prostrediach, ako je GeoGebra, alebo v projektoch založených na virtuálnej realite, môže byť NEG vizualizovaná spôsobmi, ktoré tradičné euklidovské konfigurácie nedokážu zachytiť. To umožňuje budúcim učiteľom a študentom interaktívne skúmať tieto zložité koncepty. Prostredníctvom projektov podporujúcich modelovú analýzu a spoluprácu môžu študenti vnímať NEG nielen

ako abstraktnú alebo neobvyklú oblasť matematiky, ale ako stimulujúci a nevyhnutný aspekt matematického bádania s priamymi dôsledkami pre vedecké a technologické oblasti.

2. Historické pozadie

Po mnoho storočí bola euklidovská geometria považovaná za ideálny model “reálneho sveta”. Avšak piaty postulát, známy ako postulát o rovnobežnosti, sa stal predmetom debaty medzi matematikmi. Mal by byť považovaný za postulát alebo za vetu? Mnohé pokusy o jeho dokázanie zlyhali. Medzi priekopníkov patrí Carl Friedrich Gauss, nazývaný “princ matematikov,” ktorý vykonal významný výskum v oblasti neeuklidovskej geometrie, hoci sa rozhodol svoje výsledky nezverejniť (Coxeter, 1977). Ďalším významným prispievateľom bol maďarský matematik János Bolyai, ktorý formuloval verziu neeuklidovskej geometrie, ktorú nazval *absolútna geometria* (Gray, 2004). Bolyai svoje objavy zdieľal so svojím otcom Farkasom Bolyaiom, ktorý ho dôrazne povzbudzoval k ich publikovaniu. Nezávisle a približne v rovnakom čase ruský matematik Nikolaj Ivanovič Lobačevskij vyvinul podobnú formu neeuklidovskej geometrie, ktorú nazval *imaginárna geometria* (Bonola, 1955). Práca týchto matematikov ukázala možnosť vytvoriť koherentné geometrické (axiomatické) systémy, ktoré vylučujú postulát o rovnobežnosti, čo viedlo k vzniku a rozvoju neeuklidovských geometrických systémov. Objav neeuklidovských geometrií mal ďalekosiahle dôsledky, ktoré spochybnili dlhodobé presvedčenie, že euklidovská geometria je jediným platným opisom priestoru, v ktorom žijeme.

3. Výsledky vzdelávania

Po absolvovaní tohto modulu by mali študenti:

- Pochopiť, ako zmeny axiém vedú k vývoju úplne nových geometrických štruktúr, čím sa prehĺbi pochopenie povahy matematických systémov;
- Rozvinúť kritické myslenie prostredníctvom porovnávania a kontrastovania euklidovskej a neeuklidovskej geometrie, čo podporuje schopnosť skúmať zavedené predpoklady;
- Zlepšiť deduktívne myslenie prostredníctvom dôkazov a viet platných iba v neeuklidovských štruktúrach, čo umožňuje vývoj komplexnejších logicko-deduktívnych konštruktov;
- Analyzovať a hodnotiť viaceré geometrické modely, pochopiť ich silné a slabé stránky;
- Zlepšiť priestorové vnímanie riešením neintuitívnych konceptov, ako sú zakrivené priestory a rovnobežky správajúce sa odlišne od tých v euklidovskom priestore;



- Prepojiť princípy neeuklidovskej geometrie s aplikáciami v reálnom svete;
- Posilniť tvorivé riešenie problémov riešením náročných a neznámych geometrických situácií, ktoré odporujú štandardnej euklidovskej intuícii;
- Získať pochopenie kľúčových konceptov pre pokročilé štúdiá v oblastiach, ako sú topológia, diferenciálna geometria a fyzika;
- Rozvíjať ocenenie štruktúrovanej a podnetnej sily matematického myslenia, pričom si uvedomujú, že rôzne predpoklady môžu viesť k rovnako platným, ale odlišným matematickým štruktúram;
- Rozpoznať historický a filozofický vývoj geometrie, oboznámiť sa s prínosmi matematikov ako Gauss, Bolyai a Lobačevskij k NEG a pochopiť dopad neeuklidovskej geometrie na vedecké myslenie.

Prerekvizity: Predpokladmi pre tento modul sú (1) znalosť euklidovskej geometrie vrátane jej axióm a konceptov, ako sú rovnobežné čiary, trojuholníky a súčty uhlov, pretože neeuklidovská geometria na týchto princípoch stavia a kontrastuje s nimi; (2) skúsenosti s metódami matematických dôkazov, vrátane priamych dôkazov, dôkazov sporom (3) Porozumenie súradnicovým systémom a algebraickým reprezentáciám geometrických objektov, keďže tieto nástroje sa často používajú pri analýze hyperbolických a eliptických modelov; (4) Základné znalosti trigonometrických funkcií a identít.

4. Teoretické základy

Definition: Axiomatický systém je logický rámec, ktorý začína množinou postulátov, teda tvrdení považovaných za pravdivé bez dôkazu. Tieto postuláty slúžia ako východiskový bod, z ktorého je možné logicky odvodiť ďalšie tvrdenia (vety). Euklidovská geometria je založená na piatich základných postulátoch, ktoré tvoria jej základ. Všetky vety v tomto systéme sú odvodené logickým uvažovaním z týchto postulátov. Tieto postuláty predstavujú základ, na ktorom je postavená celá štruktúra euklidovskej geometrie.

Päť euklidovských postulátov

1. **Postulát o priamkach:** Je možné viesť priamku cez ľubovoľné dva body.
2. **Postulát o predĺžení priamky:** Akýkoľvek úsek priamky je možné predĺžiť neobmedzene v oboch smeroch.



3. **Postulát o kruhoch:** Je možné opísať kruh s ľubovoľným stredom a polomerom.
4. **Postulát o pravých uhloch:** Všetky pravé uhly sú navzájom rovnaké.
5. **V Postulat:** Ak priamka pretína dve iné priamky tak, že vnútorné uhly na jednej strane sú menšie ako dva pravé uhly, tieto dve priamky, ak sa predĺžia, sa stretnú na tej strane, kde sú uhly menšie ako dva pravé uhly.

Pri skúmaní týchto piatich postulátov si všimneme, že piaty postulát sa svojou povahou líši od ostatných. Je zložitejší a nemá rovnakú intuitívnu úroveň ako zvyšné štyri. Tento postulát je možné preformulovať do ekvivalentného tvrdenia, a preto sa piaty postulát často označuje ako postulát o rovnobežkách, ktorý uvádzame nižšie. Z tohto dôvodu sa termíny “Euklidov piaty postulát” a “Postulát o rovnobežkách” často používajú zameniteľne.

5. **Postulát o rovnobežkách:** Ak je daná priamka a bod neležiaci na nej, existuje práve jedna priamka rovnobežná s danou priamkou, ktorá prechádza týmto bodom.

Matematici sa po celé stáročia pokúšali odvodiť piaty Euklidov postulát z prvých štyroch, často pridaním “zjavného” predpokladu, ktorý sa neskôr ukázal byť ekvivalentný piatemu postulátu. Medzi významné pokusy patrili Proklov predpoklad o vzdialenosti, Wallisova teória podobných trojuholníkov, Saccheriho skúmanie štvoruholníkov a analýzy ne-Euklidovských možností od Lamberta a Klügela.

V 19. storočí však nastal prelom: namiesto snahy o vyvrátenie piateho postulátu matematici prijali alternatívu, v ktorej môžu cez daný bod prechádzať **viac ako jedna priamka** rovnobežná s danou priamkou. Tento posun v myslení viedol k rozvoju hyperbolickej geometrie, ktorá priniesla nové, prekvapivé vlastnosti, ako napríklad zakrivené priamky, ktoré zostávajú rovnobežné, a trojuholníky so súčtom vnútorných uhlov menším ako 180 stupňov. Hyperbolická geometria sa ukázala byť koherentnou alternatívou k euklidovskej geometrii.

Gauss, Lobachevskij a Bolyai nezávisle položili axiomatické základy tejto novej geometrie. Gauss však svoje výsledky nezverejnil, pretože očakával výraznú kontroverziu v akademickej obci. Povzbudený svojím otcom, János Bolyai publikoval svoju prácu o hyperbolickej geometrii v roku 1832, krátko po Lobachevského skoršej publikácii v roku 1829. Aj keď títo priekopníci nepreukázali matematickú konzistenciu svojho systému, verili v jeho logickú koherenciu a spoľahlivosť.

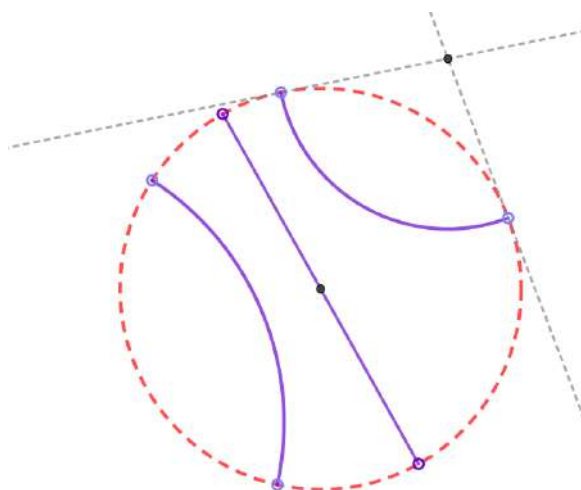
Modely hyperbolickej roviny

Modely hyperbolickej roviny Nasleduje analýza najčastejšie používaných modelov hyperbolickej roviny, pričom zdôrazníme základné hyperbolicke pojmy a ich interpretáciu v kontexte euklidovskej geometrie.

- **Poincarého model**

Tabuľka 1 predstavuje Poincarého model, pričom zdôrazňuje základné hyperbolicke pojmy a ich zodpovedajúcu interpretáciu.

Hyperbolický pojem	Interpretácia
Bod	Bod vo vnútri danej euklidovskej kružnice \mathcal{C}
Priamka	Priemer kružnice \mathcal{C} alebo časť kružnice \mathcal{C}
rovina	vnútro kružnice \mathcal{C}



Tabuľka 1: Poincarého model.

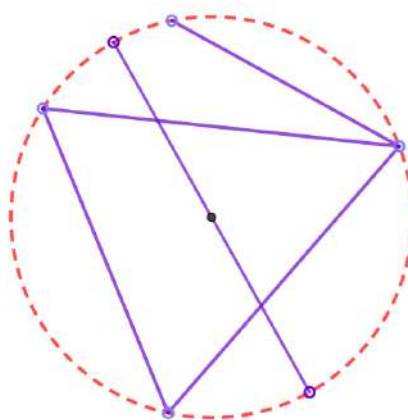
Model Poincarého disku má historický význam, pretože bol rozhodujúci pri ukazovaní relatívnej konzistencie hyperbolickej geometrie v porovnaní s euklidovskou geometriou.

V tomto modeli miera uhla, určená v euklidovských podmienkach, priamo korešponduje s mierou hyperbolickeho uhla. Vzťah medzi hyperbolickými a euklidovskými vzdialenosťami je však oveľa zložitejší. V podstate v hyperbolickeho prípade nie sú mierky vzdialenosti rovnomerné a zdajú sa byť väčšie, keď sa približujú k hranici \mathcal{C} , čo odráža povahu hyperbolickeho priestoru.

- **Kleinov model**

Kleinov model je veľmi podobný Poincarého modelu, pozri tabuľku 2, s použitím ľahšie vizualizovateľnej interpretácie primitívnej termickej čiary, avšak v Kleinovom modeli sa ani uhlové merania nezhodujú so zodpovedajúcimi euklidovskými meraniami.

Hyperbolický pojem	Interpretácia
Bod	Bod vo vnútri danej euklidovskej kružnice \mathcal{C}
Priamka	Otvorená tetiva kružnice \mathcal{C}
Rovina	Vnútro kružnice \mathcal{C}

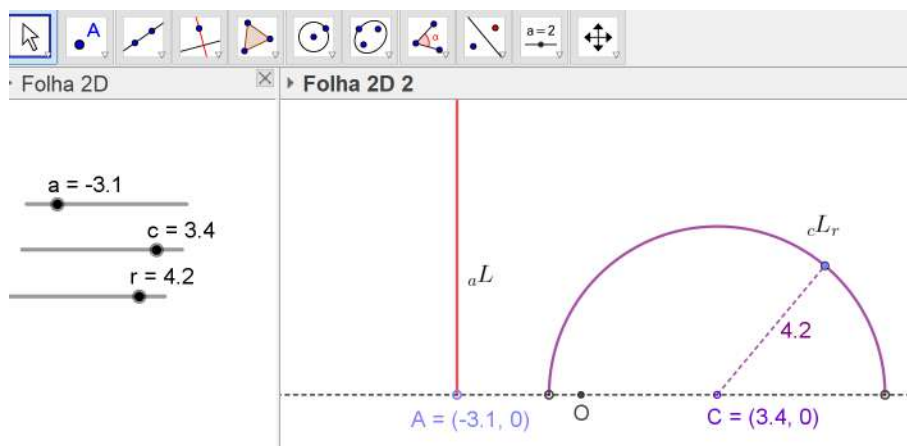


Tauľka 2: Kleinov model

- **Model polroviny**

Model polroviny, podobne ako Poincarého model, má veľký historický význam vo vývoji hyperbolickej geometrie, premostňuje rôzne odvetvia matematiky a stanovuje legitimitu neeuklidovských geometrií. V tomto modeli sú body reprezentované bodmi umiestnenými v hornej polovici karteziánskej roviny a čiary sú reprezentované ako vertikálne líčce a polkruhy kolmé na hraničnú čiaru (pozri tabuľku 3).

Hyperbolický pojem	Interpretácia
Bod	Bod v $\mathbb{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$.
Priamka	Podmnožina \mathbb{H} z ${}_aL$ alebo ${}_cL_r$, kde ${}_aL = \{(x, y) \in \mathbb{H} : x = a\}$, $a \in \mathbb{R}$ a ${}_cL_r = \{(x, y) \in \mathbb{H} : (x - C)^2 + y^2 = r^2\}$, $c \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^+$
Rovina	\mathbb{H}



Tabuľka 3: Model polroviny

V tomto modeli sú uhly merané pomocou euklidovských konceptov zachované ako hyperbolické uhly. Korešpondencia medzi euklidovskými a hyperbolickými vzdialenosťami je však tiež netriviálna. Vzdialenosti v hornej polrovine vykazujú efekt škálovania a zdá sa, že sa nekonečne naťahujú, keď sa blížia k horizontálnemu limitu, ktorý slúži ako “čiara v nekonečne”. Toto zachytáva nerovnomernú povahu vzdialenosti v hyperbolickom priestore, ako v iných modeloch, o ktorých sme diskutovali vyššie.

Je dôležité si uvedomiť, že napriek rozdielom sú všetky modely hyperbolickej geometrie izomorfné.

Veta 9.1 *Všetky modely hyperbolickej geometrie sú izomorfné.*

Odtiaľ budeme pracovať v rámci polorovinového modelu Poincaré.

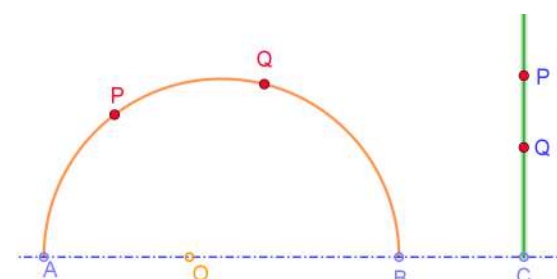
Definícia 9.1 Asymptotické paralelné priamky (alebo limitné paralelné priamky) sú priamky, ktoré sa

nekonečne približujú, ale nikdy sa nepretínajú, stretávajú sa v okrajovom bode v nekonečne, teda v nevlastnom bode. **Ultraparalelné priamky** sú dve priamky, ktoré sa nepretínajú a nie sú asymptoticky paralelné.

V euklidovskej geometrii sme zvyknutí na pojem vzdialenosti medzi dvoma bodmi, ktorý je definovaný ako dĺžka priamky, ktorá ich spája. Avšak, keď vstúpime do oblasti hyperbolickej geometrie, tento kľúčový pojem prechádza výraznými zmenami. V tomto prípade sa vzdialenosti počítajú v rámci, ktorý rešpektuje vlastnosti hyperbolického priestoru a zároveň výzvou pre našu intuície. Hyperbolická rovina ponúka bohatú štruktúru, v ktorej musí vzdialenosť zodpovedať jej

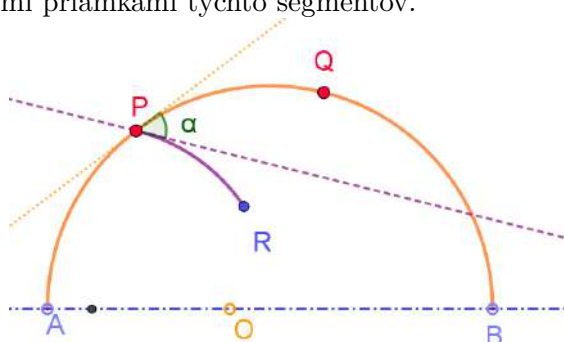
postulátom. V tomto nastavení, ako sme už spomenuli, pozri Tabuľku 3, “priamka” nemusí vždy vyzeráť priamo, a “tradičné vzorce merania” neberú do úvahy vnútornú krivosť hyperbolického priestoru. Zavedenie hyperbolickej vzdialenosti nám umožňuje pozeráť sa na nové geometrické vzťahy a skúmať zaujímavé výsledky, ktoré sa líšia od tých, ktoré poznáme v euklidovskej geometrii.

Definícia 9.2 Hyperbolická vzdialenosť, d_H , medzi hyperbolickými bodmi P a Q je daná nasledovne,

$$d_H(P, Q) = \begin{cases} \left| \ln \frac{\overline{PA} \overline{PB}}{\overline{QA} \overline{QB}} \right| & \text{if } P, Q \in_r L_c \\ \left| \ln \frac{\overline{PC}}{\overline{QC}} \right| & \text{if } P, Q \in_a L \end{cases}$$


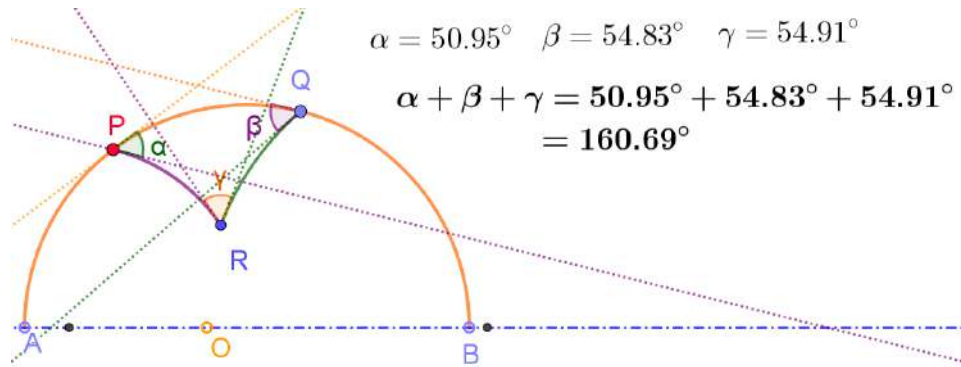
kde \overline{PA} sznamená euklidovskú vzdialenosť medzi bodmi P a A , a \ln označuje prirodzený logaritmus.

The **hyperbolický uhol** ktorý vzniká hyperbolickými segmentmi spájajúcimi body P s Q a P s R , je uhol tvorený dotykovými priamkami týchto segmentov.



Ako už bolo spomenuté, veľkou výhodou modelu hornej polovice roviny je jeho konformita. Miera hyperbolického uhla je presne rovnaká ako euklidovská miera uhla vytvoreného dvoma krivkami. V euklidovskej geometrii súčet vnútorných uhlov trojuholníka je vždy 180° (v π radiánoch), takže defekt je vždy nula, ale v hyperbolickej geometrii to nie je pravda.

Veta 9.2 V hyperbolickej geometrii je súčet vnútorných uhlov akéhokoľvek trojuholníka vždy menší ako π radiánov (180°).



Definícia 9.3 V hyperbolickej geometrii je trojuholník s jedným alebo viacerými vrcholmi na okraji v nekonečne známy ako **asymptotický trojuholník**. Ak má trojuholník jeden, dva alebo tri vrcholy v nekonečne, označuje sa ako **jednoasymptotický**, **dvojasymptotický** alebo **trojasymptotický** trojuholník.

Veta 9.3 Nech $[ABC]$ je trojuholník v \mathbb{H} s uhlami α , β a γ . Potom plocha $[ABC]$ je ; $|[ABC]| = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$.

Definícia 9.4 Defekt trojuholníka je definovaný ako rozdiel medzi 180° a súčtom vnútorných uhlov trojuholníka.

Saccheriho štvoruholník je špeciálny typ štvoruholníka, ktorý sa používa na skúmanie vlastností euklidovskej a ne-euklidovskej geometrie. Je pomenovaný po Giovanni Girolamo Saccherim, talianskom matematikovi, ktorý tieto útvary študoval v snahe dokázať Euklidov postulát o paralelnosti.

Definícia 9.5 Saccheriho štvoruholník je štvorkombinovaný útvar (štvoruholník), v ktorom sú dve opačné strany (nazývané *nohy*) rovnaké dĺžky a kolmé na tretiu stranu (nazývanú *základňa*). Štvrtá strana je nazývaná *vrchol* a zvyčajne nie je rovnaká v dĺžke ako základňa.

Veta 9.4 Porovnaním správania sa medzi euklidovskou a hyperbolickou geometriou môžeme dospieť k záveru, že:



	<i>Euklidovská</i>	<i>Hyperbolická</i>
<i>Dve rôzne priamky sa pretínajú</i>	<i>najviac v jednom bode</i>	<i>najviac v jednom bode</i>
<i>Daná priamka m a bod P existuje</i>	<i>presne jedna</i>	<i>aspoň</i>
<i>Nepretínajúce sa priamky</i>	<i>sú rovnako vzdialené</i>	<i>sú nikdy rovnako vzdialené</i>
<i>Uhlové vrcholy v Saccheriho štvoruholníku sú</i>	<i>pravé</i>	<i>ostré</i>
<i>Dve rôzne priamky kolmé na rovnakú priamku sú</i>	<i>paralelné</i>	<i>ultraparelélne</i>
<i>Súčet uhlov trojuholníka je</i>	<i>rovný 180°</i>	<i>menší ako 180°</i>
<i>Plocha trojuholníka je</i>	<i>nezávislá od súčtu uhlov</i>	<i>úmerná defektu</i>
<i>Dva trojuholníky s kongruentnými zodpovedajúcimi uhlami sú</i>	<i>podobné</i>	<i>kongruentné</i>

Tabuľka 4: Porovnávacie výsledky - prispôbené z Tabuľky 2.1 [J. C] str. 71

V nasledujúcej tabuľke uvádzame porovnanie medzi euklidovskou geometriou a hyperbolickou geometriou, upravené podľa tabuľky uvedenej v [Judith Cedberg].

5. Aplikácie v každodennom živote

Hyperbolická geometria má prekvapivo veľké množstvo aplikácií v každodennom živote, najmä v oblastiach, ktoré si vyžadujú modelovanie zložitých alebo zakrivených priestorov.

Internet a iné siete (ako sociálne siete) môžu byť modelované pomocou hyperbolickej geometrie, kde vzdialenosti pomáhajú pochopiť konektivitu a efektívnosť prenosu dát, viď [Boguná et al.]. Systémy, ktoré zohľadňujú zakrivenie Zeme, ako napríklad GPS, využívajú princípy hyperbolickej geometrie na zlepšenie presnosti, najmä pri navigácii na veľké vzdialenosti v rozľahlých oblastiach [Jekeli]. Pri projektoch zahŕňajúcich mobilné siete ponúka hyperbolická geometria silný rámec na interpretáciu a optimalizáciu vlastností sietí, od odolnosti po navigovateľnosť, pričom poskytuje teoretickú aj praktickú hodnotu pri porozumení a správe zložitých systémov [Faqeeh et al.].

Hyperbolická geometria sa objavuje aj v dizajne určitých architektonických štruktúr a umelckých diel. Ako uvádza [Gawell]: “Využitie hyperbolickej geometrie v architektúre možno vysledovať v práci významných inžinierov, dizajnérov a architektov dvadsiateho storočia, vrátane P.L. Nerviho, M. Nowického, E. Saarinen, O. Niemeyera, F. Candelu, E. Torroju. Práca

inžinierov je obzvlášť zaujímavá, pretože ukazuje ich hľadanie optimálnych štruktúrnych foriem pomocou hyperbolickej geometrie.”

Projekt Hyperbolická výšivka (Loom Hyperbolic, 2012), ktorý sa uskutočnil v Marrákeši, bol inšpirovaný marockým tradičným remeselným umením, najmä technikou tkania bavlny na stabilnom drevenom ráme [Dumitrascu].



Vo virtuálnej realite (VR) a hrách otvára hyperbolická geometria nové kreatívne možnosti tým, že vývojárom umožňuje navrhovať pohlcujúce, neeuklidovské priestory, ktoré porušujú tradičné pravidlá, čím zvyšujú zapojenie a prieskum. V medicíne hyperbolická geometria významne pomáha pri interpretácii zložitých obrazových údajov, ako sú MRI a CT snímky. Mapovaním štruktúr, ako je zložitý povrch mozgu, pomocou hyperbolickej geometrie získavajú odborníci presnejšie pochopenie detailných anatomických vlastností, čo zlepšuje diagnostiku a analýzu ochorení ovplyvňujúcich tieto oblasti. Hyperbolické modely pomáhajú optimalizovať tok dopravy a mestské plánovanie presným simulovaním a analýzou pohybových vzorcov vo veľkých a husto obývaných oblastiach. To pomáha mestským plánovačom robiť informované rozhodnutia na zvýšenie efektívnosti cestných sietí a peších systémov vo veľkých mestských aglomeráciách.

V oblasti počítačového videnia zlepšuje hyperbolická geometria rozpoznávanie obrazov tým, že umožňuje algoritmom interpretovať a analyzovať zakrivené tvary a neeuklidovské priestorové vzťahy, čo je kľúčové pre aplikácie v autonómnych systémoch a detekcii objektov.

6. Literatúra

1. Bonola, R. (1955). *Non-Euclidean geometry: A critical and historical study of its development*. Courier Corporation.



2. Boguná, M., Papadopoulos, F. and Krioukov, D. Sustaining the Internet with hyperbolic mapping . *Nat Commun* 1, 62 (2010). <https://doi.org/10.1038/ncomms1063>
3. Buda, John (2017). *Integrating Non-Euclidean Geometry into High School*. [Honors Thesis. 173. Loyola Marymount University].
<https://digitalcommons.lmu.edu/honors-thesis/173>
4. Coxeter, H. S. M. (1965). Non-Euclidean geometry. In *University of Toronto Press eBooks*.
<https://doi.org/10.3138/9781442653207>
5. Coxeter, H. S. M. (1977). Gauss as a geometer. *Historia Mathematica*, 4(4), 379-396.
6. Dumitrascu, A., Razvan, N., and Corduban, C. (2012). Ecological structures with hyperbolic geometries in public spaces. *Bulletin of University of Agricultural Sciences and Veterinary Medicine Cluj-Napoca. Agriculture*, 69(2).
7. Faqeeh, A., Osat, S. and Radicchi, F. (2018). Characterizing the Analogy Between Hyperbolic Embedding and Community Structure of Complex Networks, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 21(6), American Physical Society. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.121.098301>
8. Gawell, E. (2013). Non-euclidean geometry in the modeling of contemporary architectural forms. *Journal Biuletyn of Polish Society for Geometry and Engineering Graphics*, 24, 35-43.
9. Gray, J. J. (2004). Euclidean and non-Euclidean geometry. *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences: Volume Two*, 877.
10. Jekeli, C. (2023). Inertial navigation systems with geodetic applications. Walter de Gruyter GmbH and Co KG.
11. Krantz, S.G., Parks, H.R. (2014). Euclidean and Non-Euclidean Geometries. In: *A Mathematical Odyssey*. Springer, Boston, MA.
https://doi.org/10.1007/978-1-4614-8939-9_6
12. Sukestiyarno, Y. L., Nugroho, K. U. Z., Sugiman, S., and Waluya, B. (2023). Learning trajectory of non-Euclidean geometry through ethnomathematics learning approaches to improve spatial ability. *Eurasia Journal of Mathematics Science and Technology Education*, 19(6). <https://doi.org/10.29333/ejmste/13269>

10 TĚMA: Merania a jednotky v astronómii

1. Zdôvodnenie výberu témy

Nasledujúce aspekty robia z témy hodnotný a príťažlivý doplnok k bakalárskemu vzdelávaniu, vybavujú študentov praktickými vedomosťami, interdisciplinárnymi zručnosťami a hlbším pochopením historických aj moderných vedeckých metód.

1. Interdisciplinárne vzdelávanie

Táto téma integruje geometriu, astronómiu a technológiu a ponúka študentom praktické pochopenie toho, ako sa matematické pojmy aplikujú na javy v reálnom svete. Premosťuje priepasť medzi teoretickou matematikou a praktickými aplikáciami v astronómii, čo je cenné pre študentov, ktorí sa venujú kariére v odboroch STEM.

2. Relevantnosť pre moderné technológie

S pokrokom v technológii, najmä vo virtuálnej realite (VR), študenti získavajú prístup k najmodernejším nástrojom. Používanie okuliarov VR poskytuje pohlcujúci zážitok z učenia, ktorý pomáha študentom vizualizovať a interagovať s astronomickými javmi, ktoré sú inak abstraktné alebo je ťažké ich priamo pozorovať. To pripravuje študentov na modernú vizualizáciu dát a technologické nástroje široko používané vo vedeckom výskume a priemysle.

3. Historický a praktický význam

Pochopenie historickej úlohy geometrie v astronómii pomáha študentom oceniť vývoj vedeckého myslenia a metód. Poskytuje tiež pevný základ pre moderné astronomické merania, ako je výpočet vzdialeností medzi nebeskými telesami a pochopenie pohybu planét, ktoré sú založené na geometrických princípoch.

4. Rozvoj zručností

Kurz pomáha študentom rozvíjať schopnosť riešiť problémy a analytické zručnosti aplikáciou geometrických metód na astronomické problémy. Tieto zručnosti sú prenosné do rôznych oblastí, ako je fyzika, inžinierstvo a dátová veda. Používanie nástrojov VR navyše zvyšuje digitálnu gramotnosť a priestorové uvažovanie, čo sú dôležité kompetencie na dnešnom trhu práce.



5. Apel na zvedavosť a prieskum

Astronómia prirodzene podnecuje zvedavosť, vďaka čomu je predmet pre študentov pútavý. Jeho kombináciou s geometriou a VR môžu študenti hmatateľným a interaktívnym spôsobom skúmať rozsiahle koncepty, ako je veľkosť vesmíru, pohyb planét a nebeské udalosti. To zvyšuje angažovanosť a motiváciu a podporuje hlbší záujem o matematiku a vedu.

2. Historické pozadie

Staroveké civilizácie a raná geometria v astronómii. Babylončania a Egypťania: Rané civilizácie ako Babylončania a Egypťania zásadne prispeli k astronómii. Používali jednoduché geometrické metódy na sledovanie nebeských objektov, pomáhali im predpovedať zatmenia, slnovraty a rovníkosti, ktoré sú nevyhnutné pre poľnohospodárstvo a náboženské rituály.

Grécka astronómia. Gréci prispeli k pokroku vo využívaní geometrie na astronomické účely. Táles z Milétu a Pytagoras položili základy a Hipparchos aplikoval geometrické princípy na vytvorenie prvých modelov nebeských pohybov.

Ptolemaiov Almagest. V 2. storočí nášho letopočtu vyvinul Ptolemaios sofistikovaný geocentrický model vesmíru využívajúci zložité geometrické konštrukcie, vrátane kružníc a epicyklov, na vysvetlenie pohybu planét.

Zlatý islamský vek. Islamskí astronómovia: Počas zlatého islamského veku vedci ako Al-Battani a Ibn al-Haytham zdokonalili používanie geometrie na zlepšenie astronomických výpočtov. Zachovali grécke diela, zlepšili pozorovacie techniky a použili geometrické modely na predpovedanie nebeských udalostí s väčšou presnosťou.

Renesancia a Kopernikova revolúcia: Mikuláš Kopernik V 16. storočí svojou heliocentrickou teóriou spochybnil geocentrický model, pričom geometriu použil na opis obežných dráh planét okolo Slnka.

Johannes Kepler. Keplerove zákony pohybu planét odvodené pomocou geometrického uvažovania spôsobili revolúciu v našom chápaní obežných dráh planét a nahradili kruhové dráhy elipsami.

Galileo Galilei. Galileovo použitie ďalekohľadu na astronomické pozorovania ešte viac upevnilo úlohu geometrie pri interpretácii nebeských javov.

Moderný vývoj. Isaac Newton: Newtonove zákony pohybu a univerzálnej gravitácie v spojení s jeho využitím geometrie a kalkulu poskytli komplexný matematický rámec na pochopenie nebeskej mechaniky.

20. storočie a všeobecná relativita. Einsteinova teória všeobecnej relativity použila



pokročilú geometriu (neeuclidovskú) na opis zakrivenia časopriestoru okolo masívnych objektov, čím zásadne zmenila naše chápanie gravitácie a astronomických javov.

Tento historický vývoj poukazuje na to, ako bola geometria dôležitým nástrojom vo vývoji astronomických meracích techník, čím sa vytvorila pôda pre moderné aplikácie, ako sú simulácie založené na virtuálnej realite.

3. Výsledky vzdelávania

Tento modul sa nezameriava len na zlepšenie vedomostí študentov o geometrii a astronómii, ale zameriava sa aj na rozvoj rôznych zručností – technických, analytických a interdisciplinárnych – ktoré im budú prínosom v ich akademickej a profesionálnej kariére.

1. Pochopenie geometrických princípov v astronómii: Študenti budú schopní pochopiť a aplikovať základné geometrické pojmy používané v astronomických meraniach, ako je uhlová vzdialenosť, paralaxa, triangulácia a sférická geometria. Tieto princípy sú základom merania vzdialeností, uhlov a polôh nebeských telies, kritických pre historickú aj modernú astronómiu.
2. Aplikácia geometrie na problémy skutočného sveta: Študenti budú motivovaní používať geometriu na riešenie praktických problémov v astronómii, ako je výpočet vzdialeností medzi nebeskými telesami, určovanie veľkosti planét a predpovedanie pohybu planét. Tento výsledok zaisťuje, že študenti môžu prevziať teoretické geometrické princípy a aplikovať ich v konkrétnych astronomických kontextoch, čím sa rozvíjajú zručnosti pri riešení problémov.
3. Oboznámenie sa s historickými a modernými technikami: Študenti získajú poznatky o historických metódach (napr. Eratosthenovo meranie Zeme) a moderných technológiách (napr. meranie paralaxy pomocou satelitov) pri astronomických meraniach. Pochopenie vývoja meracích techník ukazuje študentom pokrok vo vedeckom myslení a zlepšuje ich pochopenie súčasného stavu v tejto oblasti.
4. Využitie technologických nástrojov na vizualizáciu: Študenti budú schopní efektívne využívať technológiu virtuálnej reality (VR) a ďalšie digitálne nástroje na vizualizáciu a interakciu s geometrickými reprezentáciami astronomických meraní. Študenti tak získavajú cenné technické zručnosti pri práci s vyspelými technológiami, ktoré sú čoraz dôležitejšie vo vedeckom výskume a vzdelávaní.



5. Zlepšenie priestorového a analytického myslenia: Študenti si rozšíria priestorové uvažovanie a analytické myslenie prácou s trojrozmernými modelmi vesmíru a riešením geometrických problémov v astronómii. Schopnosť myslieť priestorovo a analyticky je kľúčová v mnohých disciplínach STEM a tieto zručnosti sa zdokonaľujú pomocou astronomických meraní založených na geometrii.
6. Rozvoj interdisciplinárnych vedomostí: Študenti pochopia, ako je geometria prepojená s inými oblasťami, ako je fyzika, astronómia a inžinierstvo, a budú schopní integrovať poznatky z viacerých disciplín pri riešení zložitých problémov. To podporuje interdisciplinárny prístup k učeniu a ukazuje študentom, ako možno matematické koncepty aplikovať v rôznych vedeckých oblastiach.
7. Kritické myslenie a vedecké bádanie: Študenti si rozvinú schopnosti kritického myslenia analyzovaním údajov z astronomických meraní a spochybňovaním predpokladov a obmedzení rôznych geometrických modelov používaných v astronómii. Povzbudzovanie študentov, aby kriticky premýšľali o metódach, ktoré používajú, podporuje hlbšie vedecké bádanie a pomáha im pristupovať k problémom z prísnejšej perspektívy.
8. Historické ocenenie vedeckého rozvoja: Študenti získajú ocenenie za historický prínos matematikov a astronómov do oblasti geometrie a jej úlohu pri rozširovaní nášho chápania vesmíru.

Odôvodnenie: Podporuje sa tým širšie uznanie historického kontextu, v ktorom sa rozvíjajú vedecké poznatky, pričom sa zdôrazňuje nepretržitý charakter objavovania.
9. Vylepšená interakcia s abstraktnými konceptmi: Pomocou technológie VR a geometrických nástrojov budú študenti schopní hlbšie sa zapájať do abstraktných astronomických konceptov a zlepšiť svoju schopnosť vizualizovať zložité systémy. Interaktívne nástroje robia abstraktné pojmy prístupnejšími a pútavejšími, čím zlepšujú schopnosť študentov udržať si a porozumieť zložitému materiálu.

4. Teoretické základy

Euklidovská geometria: Základné pojmy.

Euklidovská geometria je založená na postulátoch gréckeho matematika Euklida, ako je načrtnuté v jeho diele *Základy*. Študuje vlastnosti a vzťahy bodov, priamok, uhlov, plôch a telies v dvojrozmernom alebo trojrozmernom priestore.



Medzi základné pojmy euklidovskej geometrie patria:

1. Body a čiary: V klasickej euklidovskej geometrii je bod primitívny pojem, definovaný ako “to, čo nemá žiadnu časť”. Bod nemá rozmery, iba polohu. Čiara: Euklides definoval čiaru ako interval medzi dvoma bodmi a tvrdil, že môže byť predĺžená do nekonečna v oboch smeroch.
2. Vzďialenosť medzi dvoma bodmi: Vzďialenosť medzi dvoma bodmi $A(x_A, y_A)$ a $B(x_B, y_B)$ v rovine možno vypočítať pomocou vzorca:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}.$$

V trojrozmernom priestore sa vzďialenosť medzi $A(x_A, y_A, z_A)$ a $B(x_B, y_B, z_B)$ vypočíta ako

$$d(A, B) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}.$$

3. Uhly:

Uhol tvoria dva lúče so spoločným koncovým bodom. Súčet uhlov v trojuholníku je vždy $^\circ 180$.

Najbežnejšími typmi uhlov sú pravé uhly (90 stupňov), ostré uhly (menej ako 90 stupňov) a tupé uhly (väčšie ako 90 stupňov).

4. Trojuholníky a Pytagorova veta: Pre pravouhlý trojuholník s odvesnami a a b a preponou c Pytagorova veta tvrdí: $a^2 + b^2 = c^2$.

Tento vzťah je zásadný pri výpočte vzďialeností a práci s pravouhlými trojuholníkmi.

5. Obvod a plocha:

Obvod P mnohoúhelníka je súčtom dĺžok jeho strán. Pre obdĺžnik s dĺžkou l a šírkou w :

$$P = 2l + 2w.$$

Plocha mnohoúhelníka je mierou priestoru, ktorý obklopuje. Pre obdĺžnik:

$$A = l \times w.$$

Pre trojuholník so základňou b a výškou h :

$$A = \frac{1}{2}b \times h.$$



6. Kruh a kružnica: Kružnica je množina všetkých bodov v rovine, ktoré sú rovnako vzdialené od daného bodu (stredy).

Obvod C kruhu s polomerom r je:

$$C = 2\pi r.$$

Obsah kruhu je:

$$A = \pi r^2$$

Kľúčové princípy euklidovskej geometrie

Medzi kľúčové princípy euklidovskej geometrie patria nasledujúce postuláty:

Prvý postulát: Dva body možno vždy spojiť jedinou priamkou.

Druhý postulát: Priamu ohraničenú čiaru možno vždy predĺžiť.

Tretí postulát: Z ľubovoľného stredy a polomeru možno vždy zostrojiť kružnicu.

Štvrtý postulát: Všetky pravé uhly sú zhodné.

Postulát o rovnobežnosti: Daným bodom prechádza vždy práve jedna priamka rovnobežná s inou danou priamkou.

Euklidovská geometria bola historicky významná v oblasti astronómie, najmä pre vykonávanie jednoduchých astronomických meraní. Dve základné aplikácie zahŕňajú výpočet vzdialeností pomocou paralaxy a určenie výšky nebeských objektov nad horizontom.

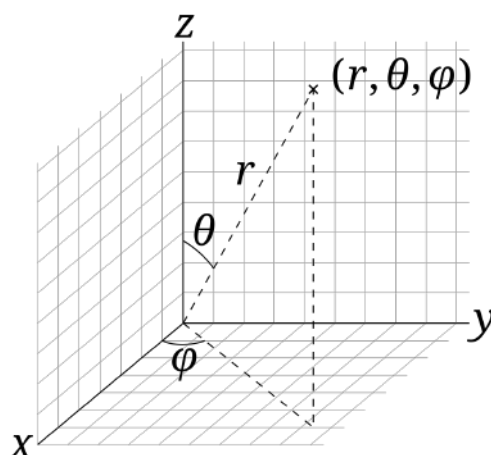
Sférická geometria

Popis: Sférická geometria sa zaoberá vlastnosťami a vzťahmi bodov, čiar a uhlov na povrchu gule, čo je kľúčové pre modelovanie nebeskej sféry a zakrivenia Zeme. Na rozdiel od euklidovskej geometrie je najkratšou cestou medzi dvoma bodmi na gule oblúk veľkého kruhu, nie priamka.

V matematike je sférický súradnicový systém súradnicový systém pre trojrozmerný priestor, kde je poloha daného bodu v priestore určená tromi reálnymi číslami: radiálna vzdialenosť r pozdĺž radiálnej čiary spájajúcej bod s počiatkom; polárny uhol θ medzi radiálnou čiarou a danou polárnou osou; a azimutálny uhol φ ako uhol rotácie radiálnej čiary okolo polárnej osi. Akonáhle je polomer pevný, tri súradnice (r, θ, φ) , známe ako trojica, poskytujú súradnicový systém na guli, ktorý sa zvyčajne nazýva sférický súradnicový systém. Rovina prechádzajúca



počiatkom a kolmá na polárnu os (kde polárny uhol je pravý uhol) sa nazýva referenčná rovina (niekedy základná rovina).



Na definovanie sférického súradnicového systému je potrebné určiť počiatkový bod v priestore, O , a dva ortogonálne smery: zenitový referenčný smer a referenčný smer azimutu. Tieto voľby určujú referenčnú rovinu, ktorá je zvyčajne definovaná tak, že obsahuje počiatkový bod a osi x a y , pričom obe môžu byť označené ako referenčný smer azimutu. Referenčná rovina je kolmá (ortogonálna) na zenitový smer a zvyčajne je určená *horizontálne* k *vertikálnemu* zenitového smeru. Sféricke súradnice bodu P sú potom definované takto:

- Polomer alebo radiálna vzdialenosť je euklidovská vzdialenosť od začiatku O po P .
- Sklon (alebo polárny uhol) je uhol so znamienkom od referenčného zenitového smeru k úsečke $[OP]$. (Namiesto sklonu možno ako polárny uhol použiť nadmorskú výšku.)
- Azimut (alebo azimutálny uhol) je uhol so znamienkom meraný od referenčného smeru azimutu k ortogonálnej projekcii segmentu radiálnej priamky $[OP]$ na referenčnú rovinu.

Znamienko azimutu je určené označením rotácie, ktorá je kladným smerom otáčania okolo zenitu. Táto voľba je ľubovoľná a je súčasťou definície súradnicového systému. (Ak je sklon nula alebo $^{\circ}180$ stupňov ($= \pi$ radiánov), azimut je ľubovoľný. Ak je polomer nula, azimut aj sklon sú ľubovoľné.)

Elevácia je znamienkový uhol od referenčnej roviny xOy k radiálnej úsečke $[OP]$, kde kladné uhly sú označené ako nahor, smerom k zenitovej referencii. Nadmorská výška je $^{\circ}90 = \frac{\pi}{2}$ radiány) mínus sklon. Ak je teda sklon $^{\circ}60 (= \frac{\pi}{3}$ radiánov), potom je prevýšenie $^{\circ}30 (= \frac{\pi}{6}$ radiánov).

V lineárnej algebre sa vektor od začiatku O po bod P často nazýva polohový vektor P .



Akýkoľvek sférický súradnicový triplet (alebo n-tica) (r, θ, φ) špecifikuje jeden bod trojrozmerného priestoru. Na opačnej strane má každý jeden bod nekonečne veľa ekvivalentných sférických súradníc. To znamená, že užívateľ môže pridať alebo odčítať ľubovoľný počet celých otáčok k uhlovým mieram bez zmeny samotných uhlov, a teda bez zmeny bodu. V mnohých kontextoch je vhodné použiť záporné radiálne vzdialenosti, pričom konvencia je $(-r, \theta, \varphi)$, čo je ekvivalent $(r, \theta + ^\circ 180, \varphi)$ alebo $(r, ^\circ 90 - \theta, \varphi + ^\circ 180)$ pre ľubovoľné r, θ , a φ . Navyše, $(r, -\theta, \varphi)$ je ekvivalentom $(r, \theta, \varphi + ^\circ 180)$.

Ak je potrebné definovať jedinečnú množinu sférických súradníc pre každý bod, používateľ musí obmedziť rozsah, známy ako interval, každej súradnice. Bežnou voľbou je: radiálna vzdialenosť: $r \geq 0$; polárny uhol: $^\circ 0 \leq \theta \leq ^\circ 180$, alebo $0 \text{ rad} \leq \theta \leq \pi \text{ rad}$ a azimut: $^\circ 0 \leq \varphi < ^\circ 360$ alebo $0 \text{ rad} \leq \varphi < 2\pi \text{ rad}$.

Ale namiesto intervalu $[^\circ 0, ^\circ 360)$ je azimut φ zvyčajne obmedzený na polootvorený interval $(-^\circ 180, +^\circ 180]$, alebo $(-\pi, +\pi]$ radiánov, čo je štandardná konvencia pre zemepisnú dĺžku.

Pre polárny uhol θ je rozsah (interval) sklonu $[^\circ 0, ^\circ 180]$, čo je ekvivalent výškového rozsahu (intervalu) $[-^\circ 90, +^\circ 90]$. V geografii je zemepisná šírka nadmorská výška.

Aj s týmito obmedzeniami, ak je polárny uhol (sklon) $^\circ 0$ alebo $^\circ 180$, elevácia je $-^\circ 90$ alebo $+^\circ 90$, potom je uhol azimutu ľubovoľný; a ak $r = 0$, azimut aj polárny uhol sú ľubovoľné. Na definovanie súradníc ako jedinečných môže užívateľ uplatniť konvenciu, že (v týchto prípadoch) sú ľubovoľné súradnice nastavené na nulu.

Rovnako ako je dvojrozmerný kartézsky súradnicový systém užitočný – má širokú škálu aplikácií – na rovinnom povrchu, je dvojrozmerný sférický súradnicový systém užitočný na povrchu gule. Napríklad jedna guľa, ktorá je opísaná v karteziánskych súradniciach rovnicou $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$, s nejakými $c > 0$, môže byť opísaná v sférických súradniciach jednoduchou rovnicou $r = c$. (V tomto systéme je guľa prispôbená ako jednotková guľa, kde je polomer nastavený na jednotku a potom sa môže vo všeobecnosti zanedbať.)

Toto (jednotková sféra) zjednodušenie je tiež užitočné pri práci s objektmi, ako sú *rotačné matice*. Sférické súradnice sú tiež užitočné pri analýze systémov, ktoré majú určitý stupeň symetrie okolo bodu, vrátane: objemových integrálov vo vnútri gule; potenciálne energetické pole obklopujúce koncentrovanú hmotu alebo náboj; alebo simulácia globálneho počasia v atmosfére planéty.

Sférické súradnice bodu podľa ISO konvencie (t.j. pre fyziku: polomer r , sklon θ , azimut φ) možno získať z jeho karteziánskych súradníc (x, y, z) pomocou vzorcov:



$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\theta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \arccos \frac{z}{r} =$$

$$\begin{cases} \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} & \text{if } z > 0 \\ \pi + \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} & \text{if } z < 0 \\ +\frac{\pi}{2} & \text{if } z = 0 \text{ and } \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0 \\ \text{undefined} & \text{if } x = y = z = 0 \end{cases}$$

$$\varphi = \operatorname{sgn}(y) \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{if } x > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & \text{if } x < 0 \text{ and } y \geq 0 \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi & \text{if } x < 0 \text{ and } y < 0 \\ +\frac{\pi}{2} & \text{if } x < 0 \text{ and } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{if } x = 0 \text{ and } y < 0 \\ \text{undefined} & \text{if } x = 0 \text{ and } y = 0 \end{cases}$$

Naopak, karteziánske súradnice možno získať zo sférických súradníc (polomer r , sklon θ , azimut φ), kde $r > 0$, $\theta \in [0, \pi]$, a $\varphi \in [0, 2\pi]$ ako

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= r \cos \theta. \end{aligned}$$

Počítanie vzdialenosti

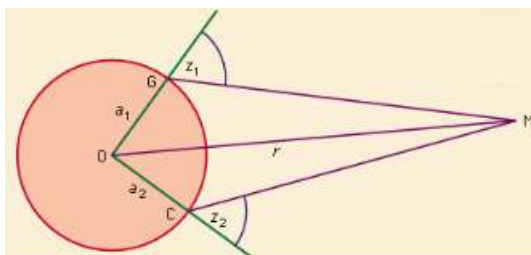
Ak sú v sférických súradniciach dané dva body (r, θ, φ) and (r', θ', φ') , vzdialenosť medzi nimi je:

$$D = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'(\sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi') + \cos \theta \cos \theta')}.$$

Použitie: Používa sa pri určovaní uhlových vzdialeností medzi hviezdami, modelovaní pohybu planét a chápaní pojmov ako deklinácia a rektascenzia, ktoré sú nevyhnutné pre navigáciu na zemskej sfére a na určovanie polohy.

Parallax

Paralaxa je zjavný posun v polohe objektu pri pohľade z dvoch rôznych uhlov pohľadu. V astronómii sa používa na meranie vzdialenosti k blízkym nebeským objektom, ako sú hviezdy, ich pozorovaním z dvoch miest na Zemi alebo z rôznych časov na obežnej dráhe Zeme. Paralaxa je základom pri meraní vzdialeností k blízkym hviezdám a planétam pomocou jednoduchých



Obr. 10.1: Meranie paralaxy pozorovaním z bodov G a C

geometrických vzťahov medzi pohybom Zeme a zjavným posunom nebeských objektov.

Povedzme, že pozorujeme hviezdu z dvoch rôznych pozícií na obežnej dráhe Zeme (s odstupom šiestich mesiacov) a meriame uhol θ , čo je uhol paralaxy. Pomocou základných princípov euklidovskej geometrie môžeme vytvoriť pravouhlý trojuholník, kde:

- D je vzdialenosť od Zeme k hviezde,
- d je základná čiara (vzdialenosť medzi dvoma pozorovacími bodmi, zvyčajne priemer obežnej dráhy Zeme okolo Slnka) a
- θ je uhol paralaxy.

Pre malé uhly je vzorec vzdialenosti paralaxy daný:

$$D \approx \frac{d}{2 \tan(\theta)}$$

• Lunárna paralaxa

Prvé určenie paralaxy bolo pre Mesiac, najbližšie nebeské teleso. *Hipparchos*, grécky astronóm (150 pred Kristom), určil paralaxu Mesiaca na $58'$ na vzdialenosť približne 59-násobku rovníkového polomeru Zeme v porovnaní s modernou hodnotou $57'02,6''$, teda stredná hodnota 60,2-násobku. Lunárna paralaxa je priamo určená z pozorovaní vykonaných na dvoch miestach, ako je G, Greenwich, Anglicko, a C, Mys dobrej nádeje, Južná Afrika, ktoré sú takmer na rovnakom poludníku. Pozorujú sa dva uhly z_1 a z_2 a ďalšie údaje sa získavajú zo zemepisných širok observatórií a známej veľkosti a tvaru Zeme. V praxi sa hviezdy v blízkosti Mesiaca pozorujú aj kvôli eliminácii chýb lomu a prístrojov.

Radarové a laserové merania vzdialenosti od Zeme k Mesiacu poskytli nedávnu hodnotu lunárnej paralaxy. Dosahy radarov a laserov majú tú výhodu, že ide o priame meranie



vzdialenosti, hoci rozsahy sú ovplyvnené zmenami v topografii povrchu Mesiaca a vyžadujú si predpoklady o mesačnom polomere a ťažisku. Medzinárodná astronomická únia v roku 1964 prijala hodnotu $57'02,608''$ pre mesačnú paralaxu, čo zodpovedá strednej vzdialenosti 384 400 km (238 900 míľ).

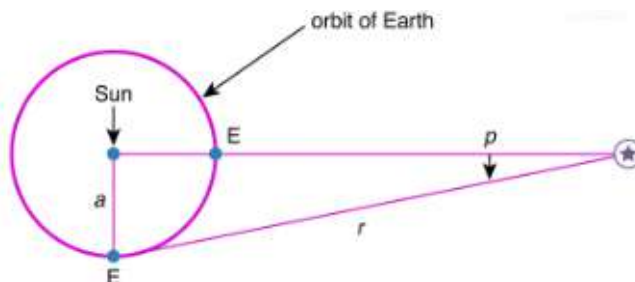
- **Slnčná paralaxa**

Základnou metódou používanou na určenie slnečnej paralaxy je určenie *trigonometrickej paralaxy*. V súlade s gravitačným zákonom sú známe relatívne vzdialenosti planét od Slnka a vzdialenosť Slnka od Zeme možno považovať za jednotku dĺžky. Meranie vzdialenosti alebo paralaxy ktorejkoľvek planéty určí hodnotu tejto jednotky. Čím menšia je vzdialenosť planéty od Zeme, tým väčšie budú merané paralaktické posuny so zodpovedajúcim zvýšením presnosti určenej paralaxy. Najpriaznivejšie podmienky preto poskytuje pozorovanie planét približujúcich sa blízko k Zemi v čase opozície. Určenie môže byť založené buď na simultánných alebo takmer súčasných pozorovaniach z dvoch rôznych miest na zemskom povrchu, alebo na pozorovaniach uskutočnených po západe a pred východom Slnka na tom istom mieste, keď posunutie miesta pozorovania spôsobené rotáciou Zeme poskytuje základná čiara pre merania.

Prvé primerane presné určenie paralaxy Slnka sa uskutočnilo v roku 1672 z pozorovaní Marsu na Cayenne, Francúzskej Guyane a Paríži, z ktorých sa získala hodnota $9,5''$.

Na zistenie slnečnej paralaxy sa používajú aj metódy závislé od rýchlosti svetla. Hodnota rýchlosti svetla bola určená s veľmi vysokou presnosťou a možno ju využiť niekoľkými rôznymi spôsobmi. Priama metóda je obrátením postupu dánskeho astronóma Oleho Römera pri objavovaní rýchlosti svetla; t.j. použiť svetelnú rovnicu alebo čas, ktorý svetlo potrebuje na to, aby sa k nám dostalo v rôznych vzdialenostiach od Jupitera, ale týmto spôsobom je ťažko dosiahnuteľná veľká presnosť. Druhá metóda je pomocou konštanty aberácie, ktorá udáva pomer rýchlosti Zeme na jej obežnej dráhe k rýchlosti svetla. Keďže aberácia vytvára ročnú dobu amplitúdy $20,496''$ v pozíciách všetkých hviezd, jej množstvo bolo určené mnohými spôsobmi. Pozorovania uskutočnené v Greenwichi v rokoch 1911 až 1936 poskytli hodnotu $20,489'' \pm 0,003''$, čo viedlo k hodnote $8,797'' \pm 0,013''$ pre slnečnú paralaxu. Táto metóda nie je zbavená podozrenia na systematickú chybu.

Rýchlosti hviezd smerom k Zemi alebo od nej sa určujú zo spektroskopických pozorovaní. Výberom časov, kedy ju orbitálny pohyb Zeme unáša smerom k hviezde alebo od nej, sú astronómovia schopní matematicky určiť rýchlosť Zeme na jej obežnej dráhe. Týmto



Obr. 10.2: Hviezdna paralaxa

spôsobom sa zistilo, že slnečná paralaxa z pozorovaní na Myse Dobrej nádeje je $8,802'' \pm 0,004''$.

Radarové merania vzdialenosti od Zeme k Venuši poskytli najlepšie určenie slnečnej paralaxy. Meraním doby letu radarového impulzu k Venuši možno získať vzdialenosť medzi dvoma planétami, čo umožňuje určiť jednotkovú vzdialenosť medzi Zemou a Slnkom.

Súčasná hodnota pre astronomickú jednotku je 149 597 871 km (92 955 807 míľ). Hlavnými obmedzeniami použitia radaru na meranie astronomickej jednotky sú závislosť na znalostiach o dráhach planét, neistota v hodnote rýchlosti svetla a možnosť elektromagnetických efektov v plazme Zem-Venuša oneskorujúcich radarový impulz.

- **Hviezdna paralaxa**

Hviezdy sú príliš vzdialené na to, aby bolo možné rozoznať akýkoľvek rozdiel v polohe z dvoch miest na zemskom povrchu, ale keďže sa Zem otáča vo vzdialenosti 149 600 000 km od Slnka, hviezdy sú počas roka videné z veľmi odlišných uhlov pohľadu. Vplyv na ich polohy sa nazýva ročná paralaxa, definovaná ako rozdiel v polohe hviezdy pri pohľade zo Zeme a zo Slnka. Jeho množstvo a smer sa menia v závislosti od ročného obdobia a jeho maximum je $\frac{a}{r}$, kde a je polomer obežnej dráhy Zeme a r vzdialenosť hviezdy. Množstvo je veľmi malé a nikdy nedosiahne $1/206\,265$ v radiánoch alebo $1''$ v šesťdesiatkovej miere.

Nemecký astronóm Friedrich Wilhelm Bessel pomocou heliometra navrhnutého nemeckým fyzikom Josephom von Fraunhoferom ako prvý zmeral v roku 1838 hviezdnu paralaxu. Vybral si 61 Cygni, hviezdu sotva viditeľnú voľným okom, o ktorej je známe, že má relatívne vysokú rýchlosť v rovine na oblohe, Bessel v roku 1838 ukázal, že po korekcii rýchlosti sa



hviezda očividne každý rok pohybovala po elipse. Tento pohyb tam a späť bol každoročnou paralaxou. Astronómovia po stáročia vedeli, že k takémuto efektu musí dôjsť, ale Bessel bol prvý, kto to presne dokázal. Besselova paralaxa približne jedna tretina oblúkovej sekundy zodpovedá vzdialenosti približne 10,3 svetelných rokov od Zeme k 61 Cygni, hoci Bessel to takto nevyjadril. (Najbližšia známa hviezda je Alfa Centauri, vzdialená 4,3 svetelných rokov, s paralaxou asi $0,75''$.)

Keplerove zákony planetárneho pohybu

V astronómii Keplerove zákony pohybu planét, publikované Johannesom Keplerom bez tretieho zákona v roku 1609 a úplne v roku 1619, opisujú obežné dráhy planét okolo Slnka. Tieto zákony nahradili kruhové dráhy a epicykly v heliocentrickej teórii Mikuláša Koperníka eliptickými dráhami a vysvetlili, ako sa menia rýchlosti planét. Keplerove tri zákony opisujú pohyb planét okolo Slnka pomocou geometrických princípov.

Zákony vysvetľujú, ako planéty sledujú eliptické dráhy, ako zametajú rovnaké oblasti v rovnakých časoch a vzťah medzi obežnou dobou planéty a jej vzdialenosťou od Slnka. Tri zákony uvádzajú, že:

Prvý Keplerov zákon: Zákon elipsy. Obežná dráha každej planéty okolo Slnka je elipsa. Stred Slnka sa vždy nachádza v jednom ohnisku orbitálnej elipsy. Slnko je v jednom ohnisku. Planéta na svojej obežnej dráhe sleduje elipsu, čo znamená, že vzdialenosť planéty od Slnka sa neustále mení, keď planéta obieha svoju dráhu.] Prvý Keplerov zákon: obežná dráha každej planéty okolo Slnka je elipsa. Stred Slnka sa vždy nachádza v jednom ohnisku orbitálnej elipsy. Slnko je v jednom ohnisku. Planéta na svojej obežnej dráhe sleduje elipsu, čo znamená, že vzdialenosť planéty od Slnka sa neustále mení, keď planéta obieha svoju obežnú dráhu.

Druhý Keplerov zákon: Zákon o rovnakých plochách. Pomyselná čiara spájajúca planétu a Slnko pretína rovnaké oblasti priestoru počas rovnakých časových intervalov, ako planéta obieha. V podstate ide o to, že planéty sa po svojich dráhach nepohybujú konštantnou rýchlosťou. Ich rýchlosť sa mení skôr tak, že čiara spájajúca stredy Slnka a planéty zametá rovnaké časti plochy za rovnaký čas. Bod najbližšieho priblíženia planéty k Slnku sa nazýva perihélium. Bodom najväčšieho oddelenia je afélium, teda podľa druhého Keplerovho zákona sa planéta pohybuje najrýchlejšie, keď je v perihéliu a najpomalšie v aféliu.



Tretí Keplerov zákon: Harmonický zákon. Druhé mocniny obežných dôb planét sú priamo úmerné tretím mocničkám hlavných polosí ich obežných dráh. Tretí Keplerov zákon naznačuje, že doba, počas ktorej planéta obehne Slnko, sa rýchlo zvyšuje s polomerom jej obežnej dráhy. Tak zistíme, že Merkúru, najvnútornejšej planéte, trvá obeh okolo Slnka len 88 dní. Zemi to trvá 365 dní, zatiaľ čo Saturn potrebuje 10 759 dní, aby urobil to isté. Aj keď Kepler nevedel o gravitácii, keď prišiel so svojimi tromi zákonmi, pomohli Isaacovi Newtonovi odvodiť jeho teóriu univerzálnej gravitácie, ktorá vysvetľuje neznámu silu, ktorá stojí za Keplerovým tretím zákonom. Kepler a jeho teórie boli rozhodujúce pre lepšie pochopenie dynamiky našej slnečnej sústavy a ako odrazový mostík k novším teóriám, ktoré presnejšie približujú naše planetárne dráhy.

Eliptické dráhy planét boli naznačené výpočtami dráhy Marsu. Z toho Kepler usúdil, že aj iné telesá v Slnečnej sústave, vrátane tých vzdialenejších od Slnka, majú tiež eliptické dráhy. Druhý zákon stanovuje, že keď je planéta bližšie k Slnku, pohybuje sa rýchlejšie. Tretí zákon vyjadruje, že čím ďalej je planéta od Slnka, tým dlhšia je jej obežná doba.

Isaac Newton v roku 1687 ukázal, že vzťahy ako Keplerov budú platiť v Slnečnej sústave ako dôsledok jeho vlastných zákonov pohybu a zákona univerzálnej gravitácie.

Užitočnosť Keplerových zákonov sa rozširuje na pohyby prirodzených a umelých satelitov, ako aj na hviezdne systémy a extrasolárne planéty. Ako formuloval Kepler, zákony, samozrejme, neberú do úvahy gravitačné interakcie (ako rušivé účinky) rôznych planét na seba. Všeobecný problém presnej predpovede pohybov viac ako dvoch telies pri ich vzájomných príťažlivostiach je dosť komplikovaný; analytické riešenia problému troch telies nie je možné získať okrem niektorých špeciálnych prípadov. Možno poznamenať, že Keplerove zákony sa nevzťahujú len na gravitáciu, ale aj na všetky ostatné sily podľa inverzného štvorcového zákona a, ak sa náležite zohľadnia relativistické a kvantové efekty, aj na elektromagnetické sily v atóme.

Aplikácia: Tieto zákony pomáhajú študentom pochopiť, ako sa geometria používa na predpovedanie obežných dráh planét, výpočet ich polohy kedykoľvek a pochopenie geometrickej povahy usporiadania slnečnej sústavy.

Model nebeskej sféry

Keď sa pozriete na oblohu a pozorujete, ako Slnko, Mesiak a hviezdy idú okolo, je ľahké si myslieť, že sme v strede vesmíru, že všetko sa točí okolo nášho malého sveta. Skutočne, takto si väčšina ľudí v histórii ľudstva myslela, že sa veci majú. Zem vnímali ako centrum všetkých vecí. Tým, že je Zem centrom všetkého stvorenia, bolo to zvláštne miesto. Slnko, Mesiak a



päť známych planét sa točí okolo sveta. Niekde za Saturnom bola Obloha alebo Vault alebo Nebo, kde sídlili hviezdy. Niektorí ľudia videli Oblozenie ako doslovnú kupolu alebo guľu, kde viseli hviezdy. Túto nebeskú sféru považovali za skutočnú, fyzikálnu stavbu a všetky hviezdy boli viac-menej rovnako vzdialené od Zeme.

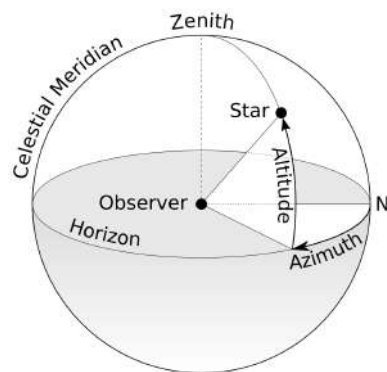
Samozrejme, dnes vieme, že neexistuje žiadna fyzická nebeská sféra a že hviezdy sú od nás oveľa ďalej, než sa predpokladalo v staroveku. V skutočnosti nie sú od nás všetci rovnako vzdialení. Hviezdy, ktoré sa na oblohe zdajú byť blízko seba, môžu byť v skutočnosti vzdialené stovky alebo tisíce svetelných rokov, keď ich uvažujeme v troch rozmeroch. Zdá sa, že sú blízko seba len preto, že sú z nášho pohľadu približne v rovnakej línii pohľadu. Predstavte si optickú ilúziu, vďaka ktorej dva objekty vyzerajú blízko seba, aj keď sú v skutočnosti ďaleko od seba.

Nebeská sféra je imaginárna sféra so stredom na Zemi, na ktorú sa premietajú všetky nebeské objekty. Pochopenie geometrie nebeskej sféry je základom pre lokalizáciu hviezd a planét pomocou súradníc, ako je deklinácia a rektascenzia.

Horizontálny súradnicový systém je nebeský súradnicový systém, ktorý využíva miestny horizont pozorovateľa ako základnú rovinu na definovanie dvoch uhlov sférického súradnicového systému: nadmorskej výšky a azimutu. Preto sa horizontálny súradnicový systém niekedy okrem iného nazýva systém az/el, systém alt/az alebo systém alt-azimut. V altazimutovej montáži ďalekohľadu sledujú dve osi prístroja výšku a azimut.

Nebeský súradnicový systém rozdeľuje oblohu na dve pologule: hornú, kde sú objekty nad horizontom a sú viditeľné, a dolnú pologuľu, kde sú objekty pod horizontom a nie je možné ich vidieť, pretože Zem na ne bráni vo výhľade.[a] Veľký kruh oddeľujúci hemisféry sa nazýva nebeský horizont, ktorý je definovaný ako veľký kruh na nebeskej sfére, ktorej rovina je kolmá na lokálny vektor gravitácie. V praxi možno horizont definovať ako rovinu dotyčnicu k pokojnému, tekutému povrchu, ako je napríklad ortuťový bazén. Pól hornej pologule sa nazýva zenit. Pól dolnej pologule sa nazýva nadir.

Keď sa pozriete na oblohu a pozorujete, ako Slnko, Mesiak a hviezdy idú okolo, je ľahké si myslieť, že sme v strede vesmíru, že všetko sa točí okolo nášho malého sveta. Skutočne, takto si väčšina ľudí v histórii ľudstva myslela, že sa veci majú. Zem vnímali ako centrum všetkých vecí. Tým, že je Zem centrom všetkého stvorenia, bolo to zvláštne miesto. Slnko, Mesiak a päť známych planét sa točí okolo sveta. Niekde za Saturnom bola Obloha alebo Vault alebo Nebo, kde sídlili hviezdy. Niektorí ľudia videli Oblozenie ako doslovnú kupolu alebo guľu, kde



Obr. 10.3: Nebeská sféra

viseli hviezdy. Túto nebeskú sféru považovali za skutočnú, fyzikálnu stavbu a všetky hviezdy boli viac-menej rovnako vzdialené od Zeme.

Samozrejme, dnes vieme, že neexistuje žiadna fyzická nebeská sféra a že hviezdy sú od nás oveľa ďalej, než sa predpokladalo v staroveku. V skutočnosti nie sú od nás všetci rovnako vzdialení. Hviezdy, ktoré sa na oblohe zdajú byť blízko seba, môžu byť v skutočnosti vzdialené stovky alebo tisíce svetelných rokov, keď ich uvažujeme v troch rozmeroch. Zdá sa, že sú blízko seba len preto, že sú z nášho pohľadu približne v rovnakej línii pohľadu. Predstavte si optickú ilúziu, vďaka ktorej dva objekty vyzerajú blízko seba, aj keď sú v skutočnosti ďaleko od seba.

Nebeská sféra je imaginárna sféra so stredom na Zemi, na ktorú sa premietajú všetky nebeské objekty. Pochopenie geometrie nebeskej sféry je základom pre lokalizáciu hviezd a planét pomocou súradníc, ako je deklinácia a rektascenzia.

Horizontálny súradnicový systém je nebeský súradnicový systém, ktorý využíva miestny horizont pozorovateľa ako základnú rovinu na definovanie dvoch uhlov sférického súradnicového systému: nadmorskej výšky a azimutu. Preto sa horizontálny súradnicový systém niekedy okrem iného nazýva systém az/el, systém alt/az alebo systém alt-azimut. V altazimutovej montáži ďalekohľadu sledujú dve osi prístroja výšku a azimut.

Nasledujú dve nezávislé horizontálne uhlové súradnice:

Nadmorská výška (alt.), niekedy označovaná ako nadmorská výška (el.) alebo zdanlivá výška, je uhol medzi objektom a miestnym horizontom pozorovateľa. Pre viditeľné objekty je to uhol medzi 0° a 90° Azimut (az.) je uhol objektu okolo horizontu, zvyčajne meraný od skutočného severu a rastúci smerom na východ.

Horizontálny súradnicový systém by sa nemal zamieňať s topocentrickým súradnicovým systémom. Horizontálne súradnice definujú orientáciu pozorovateľa, ale nie polohu pôvodu, zatiaľ čo topocentrické súradnice definujú miesto pôvodu na povrchu Zeme, na rozdiel od geo-



centrického nebeského systému.

Aplikácia: Model pomáha opísať, ako sa mení poloha hviezd počas noci a roka, a je nevyhnutný na pochopenie geometrických princípov, na ktorých sú založené hviezdne mapy, navigácia a astronomické pozorovania.

Tieto ďalšie základy dopĺňajú túto tému zavedením systémov na určovanie polohy a lokalizácie nebeských objektov, ako aj kľúčových geometrických zákonov, ktoré sú zásadné pre pochopenie správania svetla a dráh na sférických povrchoch, ktoré sú pri astronomických meraniach rozhodujúce. Tieto teoretické základy poskytujú matematické a geometrické rámce potrebné na pochopenie a vykonávanie astronomických meraní, od klasických metód vyvinutých Grékmi až po moderné relativistické korekcie v nebeskej mechanike.

10.1 Metodika výučby astronómie s VR

Štúdium euklidovskej geometrie s okuliarmi VR môže poskytnúť transformačný, pohlcujúci vzdelávací zážitok, ktorý umožňuje študentom interagovať s geometrickými tvarmi a konceptmi spôsobmi, ktoré presahujú tradičné 2D diagramy a znázornenia na tabuli. Tu je návod, ako možno pomocou VR preskúmať a vylepšiť rôzne aspekty euklidovskej geometrie:

1. Vizualizácia a interakcia s 3D tvarmi Skúmanie geometrických telies:

Vo VR môžu študenti manipulovať a skúmať 3D verzie geometrických telies, ako sú kocky, gule, pyramídy a hranoly. Môžu si ich prezeráť z rôznych uhlov, otáčať ich a dokonca sa po tvaroch “prechádzať”, aby hlbšie pochopili ich vlastnosti. VR umožňuje študentom pitvať telesá, odhaľovať prierezy, aby lepšie porozumeli vzťahom medzi 2D tvarmi a 3D objektmi, napríklad ako môže krájanie kužeľa vytvárať kruhy, elipsy alebo paraboly. Interaktívne dôkazy:

Namiesto kreslenia dôkazov na papier môžu študenti použiť VR na interaktívne vytváranie dôkazov. Napríklad dokázanie Pytagorovej vety sa dá urobiť manipuláciou so štvorcami na stranách pravouhlého trojuholníka a ich fyzickým “preusporiadaním” spôsobom, ktorý demonštruje vzťah medzi oblasťami. Pomocou interaktívnych transformácií, ako sú rotácie, preklady a odrazy, môžu študenti priamo manipulovať s postavami, aby pochopili zhodu, podobnosť a symetriu.

2. Skúmanie Euklidových postulátov v 3D:

Vo VR môžu študenti priamo nakresliť priamku medzi ľubovoľnými dvoma bodmi v 3D



priestore a preskúmať tak koncept priamych čiar nielen v rovine, ale aj vo väčšom 3D prostredí.

Interakciou s čiarami môžu študenti vidieť rozšírenia čiar v reálnom čase, pochopiť, ako sa čiary správajú v euklidovskom priestore a ako tento postulát funguje v 2D aj 3D nastaveniach.

Študenti môžu jednoducho kresliť kruhy výberom akéhokoľvek stredu a polomeru, potom si ich prezeráť z rôznych uhlov a dokonca ich pozorovať ako prierezy guľôčok alebo iných telies, čím si upevnia svoje chápanie kruhovej symetrie. Paralelný postulát (Za predpokladu, že priamka a bod nie sú na priamke, môže byť bodom nakreslená iba jedna priamka rovnobežná s danou priamkou):

VR dokáže vizuálne demonštrovať paralelné čiary v dvojrozmerných rovinách aj trojrozmernom priestore, čo ukazuje, že rovnobežné čiary sa nestretávajú bez ohľadu na to, ako ďaleko sú predĺžené, a študenti môžu tento koncept skúmať samotným kreslením čiar.

3. Pochopenie vzťahov uhlov a vzdialeností Meranie uhlov:

Študenti môžu použiť virtuálne nástroje na meranie uhlov medzi pretínajúcimi sa čiarami, polygónmi alebo pevnými objektmi, čím získajú jasnú predstavu o tom, ako uhly fungujú v 3D priestore. Môžu interagovať s dynamickou manipuláciou uhlov, čo im umožňuje upravovať uhly a okamžite pozorovať, ako sa v dôsledku toho menia ďalšie geometrické vlastnosti (napríklad vidieť, ako sa súčet vnútorných uhlov v trojuholníku vždy rovná 180 stupňom, aj keď sa mení tvar trojuholníka). Výpočty vzdialenosti a plochy: Prostredia VR môžu poskytovať interaktívne nástroje na meranie vzdialeností medzi bodmi alebo pozdĺž kriviek, čím sa posilňuje koncept úsečiek a vzdialeností. Študenti môžu tiež vypočítať plochy a objemy výberom plôch polygónov a mnohostenov, čo poskytuje praktický spôsob internalizácie vzorcov pre plochu a objem.

4. Transformácie a symetria Preklady, rotácie a odrazy:

VR uľahčuje prekladanie, otáčanie a odrážanie objektov v priestore. Študenti môžu napríklad pohybovať trojuholníkom po rovine alebo otáčať kockou v priestore, aby preskúmali účinky týchto transformácií na rôzne geometrické vlastnosti (ako je kongruencia alebo symetria). Môžu tiež študovať symetriu pozorovaním odrazov v rôznych rovinách a pochopiť, ako fungujú skupiny symetrie interakciou s objektmi, ako sú pravidelné mnohosteny (napr. platónske telesá). Teselácie a obklady:



Študenti môžu vytvárať mozaiky opakovaním mnohouholníkov v priestore, čo im pomáha porozumieť periodickým vzorom a tomu, ako môžu pravidelné mnohouholníky usporiadať rovinu. Môžu sa na ne pozeráť z rôznych perspektív, čím posilňujú priestorovú vizualizáciu.

5. Dynamická konštrukcia a experimentovanie Konštrukcia geometrických útvarov:

Pomocou nástrojov VR môžu študenti vytvárať základné geometrické tvary, ako sú trojuholníky, štvoruholníky, kruhy a mnohouholníky v 2D aj 3D priestore. Môžu manipulovať s týmito konštrukciami, meniť dĺžky strán, uhly a orientácie a zároveň pozorovať, ako sa zachovávajú vlastnosti ako rovnobežnosť alebo zhoda. Problémy s interaktívnou geometriou: VR ponúka platformu na dynamické riešenie geometrických problémov. Napríklad zostrojenie rovnostranného trojuholníka alebo rozpolenie uhla sa môže stať interaktívnou výzvou, kde študenti manipulujú s virtuálnymi kompasmi a pravítkami, ako by to robili pri tradičných konštrukciách kompasu a pravítka, ale s ďalšou výhodou pohlcujúcej vizualizácie.

Použitie: Tento rámec podporuje najjednoduchšie astronomické merania, ako je výpočet vzdialeností pomocou paralaxy alebo určenie výšky nebeských objektov nad horizontom.

5. Aplikácie v každodennom živote

Prieskum vesmíru a satelitná navigácia.

Aplikácia: Geometria hrá rozhodujúcu úlohu pri výpočte trajektórií vesmírnych misií, či už ide o vypúšťanie satelitov, posielanie roverov na Mars alebo skúmanie vzdialených planét. Napríklad obežné dráhy satelitov sa určujú pomocou geometrických princípov kužeľosečiek (elipsy, paraboly) a presné merania zaisťujú správne umiestnenie kozmickej lode.

Relevantnosť: Pochopenie týchto geometrických základov umožňuje inžinierom predpovedať a riadiť trajektórie kozmických lodí, zabezpečiť satelitné pokrytie systémov GPS a vyhnúť sa kolíziám s vesmírnym odpadom.

Globálne systémy určovania polohy (GPS).

Aplikácia: Technológia GPS sa pri výpočte presných polôh na Zemi vo veľkej miere spolieha na geometrickú trianguláciu. Použitím signálov z viacerých satelitov, ktoré sú umiestnené podľa geometrických princípov, dokáže systém presne určiť polohu objektu s vysokou presnosťou.

Relevantnosť: Aplikácia geometrie v GPS je rozhodujúca pre navigáciu v každodennom živote, od smartfónov po dopravné systémy, a pre pokročilejšie použitia, ako sú autonómne vozidlá, mapovanie a geopriestorová analýza.



Astronomické pozorovania a výskum.

Aplikácia: Moderné astronomické observatóriá a vesmírne teleskopy, ako je Hubbleov vesmírny teleskop alebo pripravovaný vesmírny teleskop Jamesa Webba, využívajú geometriu na výpočet vzdialeností medzi nebeskými objektmi, meranie pozícií hviezd a pochopenie galaktických štruktúr. Techniky ako astrometria (presné meranie pozícií hviezd) a paralaxa sa spoliehajú na geometrické princípy.

Relevantnosť: Tieto merania sú nevyhnutné pre vedecké objavy, ako je identifikácia exoplanét, štúdium temnej hmoty a mapovanie štruktúry vesmíru.

Hviezdna paralaxa a meranie vzdialenosti.

Aplikácia: Hviezdna paralaxa, zjavný posun polohy blízkej hviezdy na pozadí vzdialených hviezd, keď Zem obieha okolo Slnka, sa používa na meranie vzdialeností hviezd v našej galaxii. Táto technika využíva jednoduché geometrické princípy trojuholníkov a uhlov.

Relevantnosť: Paralaxa zostáva základným nástrojom na určovanie vzdialeností hviezd, čo je rozhodujúce pre pochopenie rozsahu vesmíru, tvorby hviezd a štruktúry galaxií.

Astronomické zobrazovanie a 3D vizualizácia.

Aplikácia: Moderné technológie vrátane VR (virtuálnej reality) a 3D modelovania využívajú geometriu na vytváranie pohlcujúcich simulácií nebeských javov. Okuliare VR umožňujú používateľom skúmať geometrické modely planetárnych systémov, obežných dráh a hviezdnych útvarov, čím poskytujú hlbšie pochopenie priestorových vzťahov vo vesmíre.

Relevantnosť: Je to dôležité pre vzdelávanie, vedecký dosah a výskum, pretože ponúka intuitívnejšie pochopenie zložitých astronomických systémov a umožňuje interaktívne skúmanie vesmíru.

Planetárny pohyb a orbitálna mechanika.

Aplikácia: Geometria je základom pri výpočte a predpovedaní obežných dráh planét na základe Keplerových zákonov pohybu planét a newtonovskej mechaniky. Tieto výpočty sa používajú na vypustenie satelitov, plánovanie medziplanetárnych misií a predpovedanie nebeských udalostí, ako sú zatmenia a prechody.

Relevantnosť: Presné predpovede orbitálnych dráh sú rozhodujúce pre všetko od každodenných operácií vesmírnych agentúr, ako je NASA, až po komerčné satelitné služby.

Kozmológia a tvar vesmíru.

Aplikácia: V kozmológii sa geometria používa na štúdium tvaru a štruktúry vesmíru. Teórie



ako všeobecná relativita, ktoré opisujú zakrivenie časopriestoru v dôsledku gravitácie, používajú neeuklidovskú geometriu na vysvetlenie rozsiahlych štruktúr, ako sú čierne diery, gravitačné šošovky a expanzia vesmíru.

Relevantnosť: Pochopenie geometrie časopriestoru pomáha vedcom vyvíjať modely javov, ako je Veľký tresk, temná energia a konečný osud vesmíru, čo poskytuje základ pre modernú teoretickú fyziku.

Astrofotografia a časozberné pozorovanie.

Aplikácia: Geometrické algoritmy sa používajú v astrofotografii na zachytenie a spracovanie snímok nebeských telies v priebehu času. Najmä časozberné pozorovanie si vyžaduje presné geometrické výpočty na sledovanie zdanlivého pohybu hviezd a planét po oblohe.

Relevantnosť: Tieto techniky sú životne dôležité pre amatérskych aj profesionálnych astronómov, ktorí dokumentujú nebeské udalosti, ako sú meteorické roje, konjunkcie planét a stopy hviezd.

Tieto aplikácie demonštrujú, že geometria je naďalej dôležitým nástrojom v teoretických aj praktických aspektoch modernej astronómie, od každodenných technológií, ako je GPS, až po pokročilé vedecké snahy, ako je prieskum vesmíru a kozmológia.

[https://math.libretexts.org/Bookshelves/Geometry/Modern_Geometry_\(Bishop\)/03%3A_Introduction_to_Hyperbolic_Geometry/3.01%3A_Hyperbolic_Geometry](https://math.libretexts.org/Bookshelves/Geometry/Modern_Geometry_(Bishop)/03%3A_Introduction_to_Hyperbolic_Geometry/3.01%3A_Hyperbolic_Geometry)

6. Literatúra

[1] Otto Neugebauer (1975). A history of ancient mathematical astronomy. Springer-Verlag. p. 744. ISBN 978-3-540-06995-9.

[2] Hartshorne, Robin (2000). Geometry: Euclid and Beyond (2nd ed.). New York, NY: Springer. ISBN 9780387986500.

[3] Artmann, Benno: Euclid – The Creation of Mathematics. New York, Berlin, Heidelberg: Springer 1999, ISBN 0-387-98423-2

[4] Popowski, P.; Gould, A. (1998). "Mathematics of Statistical Parallax and the Local Distance Scale". arXiv:astro-ph/9703140

[5] Hirshfeld, Alan w. (2001). Parallax: The Race to Measure the Cosmos. New York: W.H. Freeman. ISBN 978-0-7167-3711-7.

[6] External link: Parallax on an educational website, including a quick estimate of distance based on parallax using eyes and a thumb only, <http://www.phy6.org/stargaze/Sparalax.htm>



Co-funded by
the European Union



[7] External link: MEASURING THE SKY, A Quick Guide to the Celestial Sphere – Jim Kaler, University of Illinois, <http://stars.astro.illinois.edu/celsph.html>

[8] External link: General Astronomy/The Celestial Sphere – Wikibooks, <https://en.wikibooks.org/wiki/GeneralAstronomy/TheCelestialSphere>

[9] External link: Rotating Sky Explorer – University of Nebraska-Lincoln, <https://astro.unl.edu/naap/motion2/animations/cehc.html>

[10] Kersting, M., Bondell, J., Steier, R., & Myers, M. (2023). Virtual reality in astronomy education: reflecting on design principles through a dialogue between researchers and practitioners. *International Journal of Science Education, Part B*, 14(2), 157–176. <https://doi.org/10.1080/21548455.2023.2238871>