



Co-funded by  
the European Union



MATH 3D GEO VR



# VR aplikácia

„Matematické modely vo vyučovaní geometrie v trojrozmernom priestore s využitím virtuálnej reality”

“Mathematical models for teaching three - dimensional geometry using virtual reality”



SLOVENSKÁ VERZIA



Lodz University  
of Technology



universidade de aveiro  
theoria poiesis praxis



UNIVERSITY  
OF ŽILINA



UNIVERSITY OF SILESIA  
IN KATOWICE

## VR aplikácia „ Matematické modely vo vyučovaní geometrie v trojrozmernom priestore s využitím virtuálnej reality “

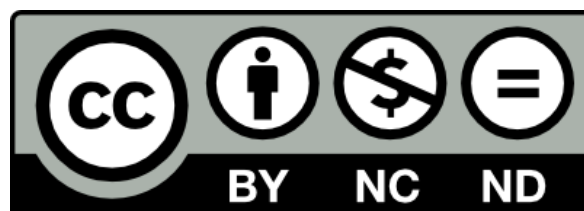
(“Mathematical models for teaching three-dimensional geometry using virtual reality”)

Vytvorilo konzorcium Math3DgeoVR.



Co-funded by  
the European Union

Spolufinancované Európskou úniou (Math3DgeoVR, projekt č. 2021-1-PL01-KA220-HED-000030365). Názory a stanoviská vyjadrené v texte sú však výlučne názory autora(ov) a nemusia nevyhnutne odrážať názory Európskej únie alebo Fundácie Rozvoju Systemu Edukacji. Ani Európska únia, ani grantová autorita nemôžu byť za tieto názory zodpovedné.



### Licencia CC

Táto licencia umožňuje opätovné použitie materiálu, jeho kopírovanie a distribúciu v akomkoľvek médiu alebo formáte iba v nezmenenej podobe, výlučne na nekomerčné účely, a to len za predpokladu, že bude uvedený autor.

## VR aplikácia – obsah

- Module 1: Trajectory /  
Modul 1: Trajektórie
- Module 2: Angles in a prism /  
Modul 2: Uhly v hranoloch
- Module 3: Angles in a pyramid /  
Modul 3: Uhly v ihlanoch
- Module 4: Non-Euclidean geometry /  
Modul 4: Neeuklidovská geometria
- Module 5: Maxima and minima of functions /  
Modul 5: Maximá a minimá funkcií
- Module 6: Systems of linear equations /  
Modul 6: Systémy lineárnych rovníc
- Module 7: Prisms /  
Modul 7: Hranoly
- Module 8: Pyramids /  
Modul 8: Ihlany
- Module 9: Planetary system /  
Modul 9: Planetárny systém
- Module 10: Exploring the Solar System /  
Modul 10: Skúmanie Slnecnej sústavy
- Module 11: Geometrical interpretation of the partial derivatives /  
Modul 11: Geometrická interpretácia parciálnych derivácií
- Module 12: Spherical coordinates /  
Modul 12: Sféricke súradnice
- Module 13: Vectors, operations on vectors /  
Modul 13: Vektory, operácie s vektormi

# Modul 1: Trajektórie

## Popis témy

V tomto module študenti preskúmajú vzťah medzi matematickými funkciami a ich grafickými reprezentáciami so zameraním na priestorové krivky. Cieľom je pochopiť, ako môže funkcia jednej premennej popisovať trojrozmernú krivku, ako je trajektória pohybujúceho sa objektu, ako je dron. Študenti navrhnu dráhu letu dronu pomocou dvoch funkcií – jedna predstavuje horizontálny pohyb a druhá predstavuje vertikálny pohyb. Výzvou je prechádzať cez konkrétne body a zároveň sa vyhýbať prekážkam. Manipuláciou s funkciami si študenti môžu vizualizovať dráhu dronu v 3D priestore aj jeho projekciu na rovinu  $XY$ .

## Dôležitosť témy

Pochopenie priestorových kriviek popísaných funkciami je základom v mnohých oblastiach matematiky, fyziky a inžinierstva. Tieto znalosti umožňujú študentom prepojiť abstraktné matematické pojmy s aplikáciami v reálnom svete, ako je plánovanie trajektórie, optimalizácia pohybu a riadiace systémy. Rozpoznanie toho, ako zmeny funkcie ovplyvňujú krivku v priestore, rozvíja priestorové uvažovanie a zručnosti pri riešení problémov, ktoré sú nevyhnutné v oblastiach ako robotika, počítačom podporovaný dizajn (CAD) a aerodynamika. Okrem toho, učenie sa manipulovať s funkciami na dosiahnutie požadovaných výsledkov vytvára základ pre pochopenie pokročilej matematickej analýzy a analytickej geometrie.

## Aplikácie vo vede

Pojmy zahrnuté v tomto module majú široké uplatnenie v rôznych vedeckých oblastiach. V robotike je schopnosť opísať a optimalizovať priestorové cesty rozhodujúca pre programovanie autonómnych systémov, ako sú drony, robotické ramená alebo vozidlá. Vo fyzike pochopenie pohybu pozdĺž priestorovej krivky pomáha pri modelovaní trajektórií projektilov, planét alebo častíc. Navyše v počítačovej grafike si navrhovanie 3D modelov alebo animácií často vyžaduje presnú kontrolu nad tým, ako sa objekty pohybujú a interagujú v priestore. Napokon, v aerodynamike a mechanike letu je schopnosť vypočítať a upraviť trajektórie kľúčom k navrhnutiu efektívnych a bezpečných dráh letu.

## Praktické využitie

V praxi sú tieto znalosti nevyhnutné pre profesionálov, ktorí potrebujú navrhovať a riadiť systémy zahŕňajúce pohyb v troch rozmeroch. Napríklad pri navigácii pomocou dronov musia inžinieri vypočítať dráhy letu, ktoré zohľadňujú prekážky a podmienky prostredia, a zároveň optimalizovať účinnosť a bezpečnosť. Pri vývoji hier animátori používajú tieto princípy na vytvorenie realistického pohybu postavy alebo objektu. Podobne v architektúre či urbanizme sa priestorové krivky využívajú na plánovanie ciest, mostov, či

dokonca umiestňovanie stavieb vo vzťahu ku krajine. Celkovo tento modul poskytuje základné zručnosti, ktoré sú použiteľné v mnohých high-tech odvetviach.

## Modul 1: Trajektórie – krátke video



## Modul 2: Uhly v hranoloch

### Popis témy

Téma "Uhly v hranoloch" zahŕňa analýzu uhlov tvorených uhlopriečkami a hranami hranola. Hranol, ktorý je trojrozmerným geometrickým útvarom, je jedným zo základných objektov študovaných v priestorovej geometrii. Pochopenie uhlov, ktoré sa tvoria medzi rôznymi prvkami hranola, je kľúčové pre hlbšie pochopenie geometrie telies a jej aplikácií na problémy reálneho sveta.

V tomto module sa môžete zoznámiť s telesami a uhlami prepínaním medzi ich typmi pomocou šípok na paneli. V stĺpe naľavo sa objaví teleso s príkladom daného uhla, môžete ho vybrať a pozrieť si ho zblízka.

V tomto module nájdete rôzne hranoly na dvoch stolíkoch. V strede modulu sú zobrazené hranoly a uhly v nich. Na tablete si môžeme zvoliť režim: učenie - kde si môžeme zvoliť teleso a uhol, ktorý sa má zobrazíť. V kategórii: test - môžeme vyriešiť 10 úloh pomocou telies položených na stoloch. V kategórii: príklady - s vybraným objektom vyberieme konkrétny uhol a špecifikujeme typ telesa.

### Dôležitosť témy

Pochopenie uhlov v hranoloch je dôležité, pretože pomáha rozvíjať zručnosti pri analýze a riešení problémov súvisiacich s trojrozmernými objektmi. Znalosť tejto témy je základom pre ďalšie štúdium v priestorovej geometrii, ako aj v odboroch ako inžinierstvo, architektúra, fyzika a počítačová grafika. Schopnosť vypočítať a pochopiť tieto uhly je nevyhnutná pri navrhovaní trojrozmerných štruktúr a optimalizácii priestorového usporiadania.

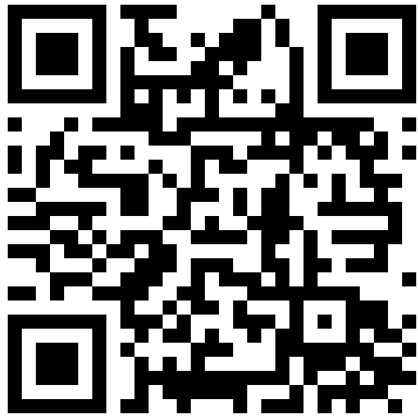
### Aplikácie vo vede

Uhly v hranole sú široko používané v rôznych oblastiach matematiky, ako je analytická geometria, lineárna algebra a priestorová analýza. Okrem toho sú tieto koncepty použiteľné vo fyzike, najmä v mechanike tuhých telies, kde je analýza uhlov medzi konštrukčnými prvkami kľúčová pre pochopenie ich stability a pevnosti.

### Praktické využitie

Pochopenie uhlov v hranoloch je mimoriadne užitočné v praxi, najmä v strojárstve a architektúre. Napríklad pri navrhovaní budov, strojov alebo iných trojrozmerných štruktúr musia inžinieri presne pochopiť uhlové vzťahy medzi rôznymi prvkami, aby sa zabezpečila stabilita a funkčnosť konštrukcie. Podobne v počítačovej grafike je znalosť týchto uhlov kľúčom k vytváraniu realistických trojrozmerných modelov a animácií.

## Modul 2: Uhly v hranoloch – krátke video





## Modul 3: Uhly v ihlanoch

### Popis témy

V tomto module sa študenti naučia identifikovať, vypočítať a pochopiť uhly v ihlanoch pomocou geometrických princípov. Nastavenie je podobné ako v predchádzajúcom module o uhloch v hranoloch, ale teraz sa pozornosť presúva na analýzu a manipuláciu s ihlanovými tvarmi. Študenti budú pracovať s rôznymi ihlanmi, skúmať rôzne úlohy pomocou interaktívnych funkcií, ako je režim učenia, režim testovania a režim príkladov. Prostredníctvom tohto modulu si študenti prehĺbia svoje chápanie priestorovej geometrie a rozvinú schopnosť vypočítať uhly medzi plochami, hranami a vrcholmi ihlanových telies.

### Dôležitosť témy

Uhly v ihlanoch sú kľúčovým konceptom v geometrii, ktorý pomáha študentom pochopiť zložitosť trojrozmerných tvarov. Tieto znalosti sú základom v architektúre, inžinierstve a dizajne, kde je pochopenie vzťahu medzi uhlami a štruktúrami nevyhnutné na vytváranie stabilných a esteticky príjemných foriem. Výpočet uhlov v 3D objektoch navyše vytvára priestorové povedomie a logické uvažovanie, čo sú zručnosti, ktoré sú životne dôležité v pokročilej matematike a aplikáciách v reálnom svete. Táto téma slúži aj ako odrazový mostík ku komplexnejším geometrickým štúdiám, ako sú mnohosteny a trigonometria v 3D priestore.

### Aplikácie vo vede

Štúdium uhlov v ihlanoch má široké uplatnenie v rôznych vedeckých oblastiach. V architektúre sú ihlanové štruktúry bežné kvôli ich stabilite a estetickým vlastnostiam. Pochopenie uhlov v rámci týchto štruktúr je rozhodujúce pre zabezpečenie ich pevnosti a funkčnosti. V kryštalografii má veľa minerálov ihlanové štruktúry a výpočet uhlov medzi kryštálovými plochami je nevyhnutný na pochopenie ich vlastností. Vo fyzike, najmä v optike, sú uhly v ihlanoch dôležité pri štúdiu odrazu a lomu svetla v hranoloch. Okrem toho v stavebníctve návrh zložitých štruktúr, ako sú strechy, veže alebo trámy, často zahŕňa výpočet uhlov podobných tým, ktoré sa nachádzajú v ihlanoch.

### Praktické využitie

V praxi je zvládnutie výpočtu uhlov v ihlanoch veľmi užitočné v oblastiach, ako je stavebníctvo, stavebné inžinierstvo a mestské plánovanie, kde sa ihlanové formy často používajú pri navrhovaní budov, mostov a monumentov. Architekti a inžinieri používajú tieto koncepty na zabezpečenie stability striech, kupol a iných konštrukčných prvkov. Okrem toho v počítačom podporovanom dizajne (CAD) profesionáli často potrebujú modelovať a manipulovať s ihlanovými tvarmi a vypočítať uhly medzi povrchmi na rôzne účely vrátane dizajnu produktov a virtuálnych simulácií. Pochopenie týchto geometrických vzťahov je dôležité aj v 3D tlači a robotike, kde presnosť pri vytváraní 3D modelov priamo ovplyvňuje funkčnosť a estetiku fyzických objektov.



## Modul 3: Uhly v ihlanoch – krátke video



## Modul 4: Neeuklidovská geometria

### Popis témy

V tomto module študenti preskúmajú eliptickú geometriu, vetvu neeuklidovskej geometrie, ktorá odmieta Euklidov piaty postulát – postulát rovnobežnosti. V eliptickej geometrii sa akékoľvek dve čiary pretínajú v určitom bode, čo znamená, že koncept rovnobežných čiar neexistuje. To má hlboké dôsledky pre pochopenie tvarov a vzdialeností v zakrivených priestoroch, ako je povrch Zeme. Modul založený na VR umožňuje študentom zažiť eliptickú geometriu v praxi navigáciou cez budovu, kde cesty pripomínajú elipsy. Tento praktický prístup pomáha študentom vizualizovať a pochopiť vlastnosti a princípy neeuklidovskej geometrie v pohlcujúcom prostredí.

### Dôležitosť témy

Pochopenie eliptickej geometrie je pre študentov kľúčové, pretože rozširuje ich pohľad na geometriu nad rámec euklidovského rámca. Hrá zásadnú úlohu v mnohých oblastiach, najmä v tých, ktoré sa zaoberajú zakrivenými priestormi, ako je geografia, astronómia a všeobecná relativita. V eliptickej geometrii sa koncept priamych línií mení, čo je životne dôležité pre pochopenie toho, ako veľké štruktúry, ako sú planetárne dráhy alebo globálne polohovacie systémy (GPS), fungujú v zakrivenom priestore. Modul zdôrazňuje odklon od klasickej geometrie a ponúka hlboké pochopenie toho, ako sa môžu matematické modely meniť v závislosti od charakteru študovaného priestoru.

### Aplikácie vo vede

Eliptická geometria má dôležité aplikácie v rôznych vedeckých oblastiach:

- Geografia a geodézia: Používa sa na výpočet presných vzdialeností medzi bodmi na Zemi, čo je nevyhnutné pre navigáciu a tvorbu máp.
- Astronómia a kozmológia: Eliptická geometria hrá kľúčovú úlohu pri pochopení tvaru vesmíru, nebeských telies a obežných dráh.
- Všeobecná relativita: Einsteinova teória všeobecnej relativity sa pri opise zakrivenia časopriestoru spôsobeného gravitáciou spolieha na neeuklidovskú geometriu.
- Technológia GPS: Algoritmy, ktoré vypočítavajú presné polohy na Zemi, sa spoliehajú na eliptickú geometriu, ktorá zodpovedá za zakrivenie planéty.

Skúmaním týchto aplikácií študenti vidia, ako zdanlivo abstraktná matematická teória priamo ovplyvňuje technológie a vedecké objavy.

### Praktické využitie

Praktická užitočnosť eliptickej geometrie je rozsiahla, najmä v navigácii a globálnom určovaní polohy. Napríklad:



- Piloti a námorníci používajú veľké kruhy (geodesics) na určenie najefektívnejších trás medzi dvoma miestami na zemeguli.
- V mestskom plánovaní a architektúre môže pochopenie neeuklidovskej geometrie pomôcť pri navrhovaní štruktúr na zakrivených povrchoch alebo kupolách.
- Geodézia, veda o meraní tvaru Zeme a jej gravitačného poľa, sa spolieha na eliptickú geometriu na presné mapovanie planéty a predpovedanie zmien v priebehu času.

Tento modul ponúka študentom praktické zručnosti, ktoré sú nielen akademicky obohacujúce, ale aj použiteľné v rôznych odvetviach a technológiách.

#### Modul 4: Neeuklidovská geometria – krátke video



## Modul 5: Maximá a minimá funkcií

### Popis témy

V tomto module sa študenti naučia nájsť globálne extrémny (maximálne aj minimálne hodnoty) funkcií dvoch alebo troch premenných. Úloha je prezentovaná interaktívnym spôsobom, kde je na centrálnej obrazovke zobrazený systém troch rovníc pre roviny  $x$ ,  $y$  a  $z$ . Študenti musia identifikovať globálne extrémny umiestnením značiek (reprezentovaných ako gule) na 3D vizualizáciu povrchu vytvorenú rovnicami. Modul pomáha študentom pochopiť, ako interpretovať geometriu funkcií a identifikovať kritické body, kde funkcia dosahuje najvyššie alebo najnižšie hodnoty globálne, nielen lokálne.

### Dôležitosť témy

Pochopenie globálnych extrémov je základom v mnohých oblastiach matematiky a aplikovaných vied. Nájdenie týchto extrémov umožňuje študentom riešiť optimalizačné problémy, ktoré sú kritické v oblastiach ako inžinierstvo, ekonomika a dátová analýza. Globálne extrémny sa používajú na určovanie najlepšieho možného výsledku pri rôznych scenároch, ako je minimalizácia nákladov, maximalizácia efektívnosti alebo predpovedanie maximálnych a minimálnych hodnôt v prírodných javoch. Táto téma poskytuje základ pre ďalšie štúdium v rámci analýzy funkcie viac premenných, teórie optimalizácie a matematickom modelovaní, z ktorých všetky majú priame aplikácie pri riešení problémov v reálnom svete.

### Aplikácie vo vede

Globálne extrémny zohrávajú kľúčovú úlohu v rôznych vedeckých oblastiach:

- Inžinierstvo: Optimalizácia zdrojov, štruktúr a systémov si často vyžaduje hľadanie globálnych extrémov, ako je minimalizácia spotreby materiálu pri maximalizácii pevnosti.
- Ekonomika: Globálne extrémny pomáhajú pri určovaní optimálnych bodov pre maximalizáciu zisku a minimalizáciu nákladov vo výrobných procesoch.
- Fyzika: V mechanike a termodynamike sa globálne extrémny používajú na identifikáciu stabilných rovnovážnych bodov alebo na predpovedanie maximálnych a minimálnych energetických stavov.
- Environmentálna veda: Modely prírodných systémov, ako je predpovedanie maximálnych zrážok alebo teplotných extrémov, sa spoliehajú na identifikáciu globálnych extrémov, aby pochopili najkritickejšie výsledky.

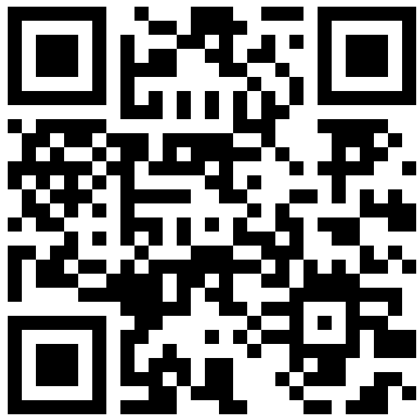
Pochopenie toho, ako nájsť globálne extrémny, je základným nástrojom pri vytváraní predpovedí, riešení zložitých systémov a optimalizácii výsledkov v širokej škále disciplín.

## Praktické využitie

V praxi je schopnosť nájsť globálne extrémny vysoko cenná v mnohých odvetviach. Napríklad:

- Vo výrobe potrebujú spoločnosti optimalizovať výrobné procesy minimalizáciou nákladov a maximalizáciou výstupu, čo si vyžaduje identifikáciu globálnych extrémov nákladových a výrobných funkcií.
- Dátoví vedci a štatistickí často používajú optimalizačné techniky na nájdenie globálnych extrémov v modeloch, ktoré predpovedajú trendy alebo výsledky, ako napríklad v algoritmoch strojového učenia, kde globálne extrémny pomáhajú doladovať modely.
- Mestskí plánovači môžu potrebovať optimalizovať využitie pôdy alebo minimalizovať dopravné zápchy, čo sú problémy, ktoré často zahŕňajú hľadanie globálnych extrémov v geografických alebo priestorových údajoch.

## Modul 5: Maximá a minimá funkcií – krátke video



## Modul 6: Sústavy lineárnych rovníc

### Popis témy

V tomto module študenti preskúmajú systémy lineárnych rovníc prostredníctvom interaktívnych vizualizácií. Na hlavnej obrazovke sa zobrazujú rovnice, ktoré študenti zadávajú pomocou rozhrania tabletu. Z tohto tabletu si študenti môžu vybrať z viac ako 60 vopred pripravených príkladov alebo upraviť parametre, ako sú premenné, rovnice a koeficienty. Okrem toho majú možnosť zadať náhodný systém alebo špecifické parametre, ako sú hodnoty  $x$ ,  $y$  a  $z$ . Študenti môžu tiež upravovať počet neznámych alebo rovníc, čím poskytujú flexibilné prostredie pre začiatočníkov aj pokročilých pri riešení problémov. Sekundárny tablet zobrazuje matice, determinanty a riešenia týchto systémov a ponúka študentom príležitosť preskúmať, ako sa koncepty lineárnej algebry uplatňujú pri riešení systémov rovníc.

### Dôležitosť témy

Systémy lineárnych rovníc sú základom matematiky a poskytujú základ pre veľkú časť algebry a vyššej matematiky. Pochopenie spôsobu riešenia týchto systémov je pre študentov nevyhnutné, pretože rozvíja ich logické myslenie a schopnosti riešiť problémy. V mnohých problémoch reálneho sveta možno vzťahy medzi veličinami vyjadriť ako sústavy rovníc, vďaka čomu je táto téma široko použiteľná. Naučiť sa manipulovať a riešiť tieto systémy je kľúčové nielen pre čistú matematiku, ale aj pre oblasti ako ekonómia, inžinierstvo, informatika a fyzika. Okrem toho sú systémy rovníc kľúčom k pochopeniu pokročilejších tém, ako sú vektorové priestory, lineárne transformácie a teória matíc.

### Aplikácie vo vede

Systémy lineárnych rovníc sa široko používajú v mnohých vedeckých oblastiach:

- Fyzika: V klasickej mechanike sa systémy rovníc používajú na riešenie neznámych síl alebo rýchlostí v problémoch zahŕňajúcich viaceré objekty a interakcie.
- Ekonomika: Lineárne rovnice sa používajú na modelovanie vzťahov medzi ponukou a dopytom, optimalizáciu výroby a analýzu trhovej rovnováhy.
- Inžinierstvo: Elektrické obvody, štruktúrna analýza a riadiace systémy sa pri modelovaní a riešení zložitých systémov často spoliehajú na systémy rovníc.
- Informatika: Algoritmy na riešenie systémov rovníc sú nevyhnutné pri strojovom učení, vykresľovaní grafiky a riešení diferenciálnych rovníc v numerických simuláciách.

Tento modul vyzdvihuje silu lineárnych systémov pri modelovaní a riešení skutočných vedeckých problémov, pričom študentom poskytuje praktické pochopenie toho, ako sa matematika uplatňuje v rôznych kontextoch.

## Praktické využitie

Ovládanie systémov lineárnych rovníc je neoceniteľné pre každého, kto sa venuje kariére v oblasti vedy, techniky, inžinierstva alebo matematiky. Inžinieri napríklad často potrebujú riešiť zložité systémy rovníc, aby navrhli štruktúry, obvody alebo procesy. Ekonomovia používajú lineárne systémy na optimalizáciu výroby alebo výpočet ekonomických výstupov. Vo dátovej analýze a strojovom učení sa systémy lineárnych rovníc používajú na riešenie regresných problémov a optimalizáciu algoritmov. Architekti a urbanisti tiež používajú lineárne systémy na modelovanie štrukturálnych zaťažení alebo distribúcie zdrojov. Schopnosť porozumieť a vyriešiť tieto systémy je kritickou zručnosťou, ktorá umožňuje študentom riešiť širokú škálu analytických výziev v akademickej i priemyselnej sfére.

## Modul 6: Sústavy lineárnych rovníc – krátke video





## Modul 7: Hranoly

### Popis témy

Tento modul sa zameriava na geometriu hranolov s osobitným dôrazom na pochopenie ich priestorového usporiadania v rámci znázornenia plášťa. Študenti budú sa tiež zaoberať úlohami zahŕňajúcimi plášte hranolov, pričom si budú vizualizovať, ako tieto telesá interagujú v štruktúrovanom usporiadaní.

### Dôležitosť témy

Pochopenie hranolov a ich rezov je základom geometrie, pretože tieto útvary sa často vyskytujú v prírodných štruktúrach aj v dizajnoch vytvorených človekom. Rezy odhaľujú vnútornú štruktúru týchto telies, čo pomáha pri ich analýze a aplikácii. Tieto znalosti sú veľmi dôležité v oblastiach ako architektúra, inžinierstvo a materiálová veda, kde sú rozhodujúce presné výpočty zahŕňajúce objem, povrch a štrukturálnu integritu. Štúdiom plášťov týchto útvarov študenti získajú prehľad o štruktúre, čo sú zručnosti dôležité pre pokročilé priestorové uvažovanie a dizajn.

### Aplikácie vo vede

Hranoly spolu s ich rezmi majú množstvo vedeckých a praktických aplikácií:

- **Architektúra:** Architekti používajú rezy hranolov na analýzu konštrukčných prvkov v budovách a mostoch, ako sú trámy alebo priehradové nosníky.
- **Technika:** Inžinieri študujú, ako rezy telies odhaľujú rozloženie napätia alebo vlastnosti materiálu v komponentoch.
- **Geológia:** Geológovia analyzujú rezy geologických útvarov, z ktorých mnohé pripomínajú hranoly, aby študovali vrstvy hornín alebo minerálnych ložísk.
- **Počítačová grafika:** Údaje o rezoch sa používajú pri 3D modelovaní a vykresľovaní, najmä na kúskovanie objektov alebo vytváranie pohľadov do vnútra.
- **Matematika:** Pochopenie rezov pomáha pri výpočte objemov, povrchových plôch a polôh ťažísk, ktoré sú základom geometrie a výpočtov.

### Praktické využitie

Poznatky získané z tohto modulu majú priame uplatnenie v niekoľkých oblastiach:

- **Konštrukcia:** Staviteľia a inžinieri používajú rezy hranolov na výpočet požadovaných materiálov a pochopenie konštrukčnej integrity komponentov, ako sú nosníky, stĺpy alebo strechy.
- **Výroba:** Vo výrobe sú rezy telies rozhodujúce pre presné rezanie materiálov a zabezpečenie, aby sa následne zmestili do väčších celkov.

- Urbanistické plánovanie: Siete telies hranolov a ihlanov pomáhajú pri plánovaní pôdorysu budov, obkladových plôch alebo pri efektívnej organizácii obytných budov.
- Vzdelávanie a vizualizácia: Pochopenie geometrie hranolov a ich rezov je veľmi dôležité pre vytváranie vzdelávacích modelov alebo simulácií.

Tento modul poskytuje študentom praktické poznatky o geometrii, ktoré sú použiteľné pre výzvy v reálnom svete, pričom podporuje kreativitu aj analytické schopnosti. Prostredníctvom interaktívnych vizualizácií a úloh na riešenie problémov študenti hlbšie pochopia geometrické princípy, ktoré sú základom mnohých aspektov moderného dizajnu a technológie.

### Modul 7: Hranoly – krátke video



## Modul 8: Ihlany

### Popis témy

Tento modul sa zameriava na geometriu ihlanov s osobitným dôrazom na pochopenie ich priestorového usporiadania v rámci znázornenia pláštá. Študenti budú sa tiež zaoberať úlohami zahŕňajúcimi plášte ihlanov, pričom si budú vizualizovať, ako tieto telesá interagujú v štruktúrovanom usporiadaní.

### Dôležitosť témy

Pochopenie ihlanov a ich rezov je základom geometrie, pretože tieto útvary sa často vyskytujú v prírodných štruktúrach aj v dizajnoch vytvorených človekom. Rezy odhaľujú vnútornú štruktúru týchto telies, čo pomáha pri ich analýze a aplikácii. Tieto znalosti sú veľmi dôležité v oblastiach ako architektúra, inžinierstvo a materiálová veda, kde sú rozhodujúce presné výpočty zahŕňajúce objem, povrch a štrukturálnu integritu. Štúdiom plášťov týchto útvarov študenti získajú prehľad o štruktúre, čo sú zručnosti dôležité pre pokročilé priestorové uvažovanie a dizajn.

### Aplikácie vo vede

Ihlany spolu s ich rezmi majú množstvo vedeckých a praktických aplikácií:

- **Architektúra:** Architekti používajú rezy hranolov a ihlanov na analýzu konštrukčných prvkov v budovách a mostoch, ako sú trámy alebo priehradové nosníky.
- **Technika:** Inžinieri študujú, ako rezy telies odhaľujú rozloženie napätia alebo vlastnosti materiálu v komponentoch.
- **Geológia:** Geológovia analyzujú rezy geologických útvarov, z ktorých mnohé pripomínajú hranoly, aby študovali vrstvy hornín alebo minerálnych ložísk.
- **Počítačová grafika:** Údaje o rezoch sa používajú pri 3D modelovaní a vykresľovaní, najmä na kúskovanie objektov alebo vytváranie pohľadov do vnútra.
- **Matematika:** Pochopenie rezov pomáha pri výpočte objemov, povrchových plôch a polôh ťažísk, ktoré sú základom geometrie a výpočtov.

### Praktické využitie

Poznatky získané z tohto modulu majú priame uplatnenie v niekoľkých oblastiach:

- **Konštrukcia:** Staviteľia a inžinieri používajú rezy ihlanov na výpočet požadovaných materiálov a pochopenie konštrukčnej integrity komponentov, ako sú nosníky, stĺpy alebo strechy.
- **Výroba:** Vo výrobe sú rezy telies rozhodujúce pre presné rezanie materiálov a zabezpečenie, aby sa následne zmestili do väčších celkov.

- Urbanistické plánovanie: Siete telies ihlanov pomáhajú pri plánovaní pôdorysu budov, obkladových plôch alebo pri efektívnej organizácii obytných budov.
- Vzdelávanie a vizualizácia: Pochopenie geometrie hranolov a ihlanov a ich rezov je veľmi dôležité pre vytváranie vzdelávacích modelov alebo simulácií.

Tento modul poskytuje študentom praktické poznatky o geometrii, ktoré sú použiteľné pre výzvy v reálnom svete, pričom podporuje kreativitu aj analytické schopnosti. Prostredníctvom interaktívnych vizualizácií a úloh na riešenie problémov študenti hlbšie pochopia geometrické princípy, ktoré sú základom mnohých aspektov moderného dizajnu a technológie.

## Modul 8: Ihlany – krátke video



## Modul 9: Planetárny systém

### Popis témy

Tento modul zoznamuje študentov s mechanikou a geometriou planetárnych systémov. Študenti budú skúmať, ako planéty obieľajú okolo centrálnej hviezdy, pričom sa zamerajú na súhrn síl, trajektórií a tvarov obežných dráh. Pomocou interaktívnych nástrojov budú vizualizovať obežné dráhy planét v 3D priestore a upravovať parametre, ako sú polomer obežnej dráhy, excentricita a rýchlosť. Modul kladie dôraz na pochopenie základných zákonov pohybu planét, ako sú tie, ktoré opísal Kepler, bez toho, aby sa ponoril do príliš zložitej matematiky. Študenti uvidia, ako môžu byť obežné dráhy eliptické alebo kruhové a ako gravitácia riadi tieto pohyby.

### Dôležitosť témy

Pochopenie planetárnych systémov je základom astronómie a vesmírnej vedy. Pomáha študentom pochopiť, ako nebeské objekty interagujú a pohybujú sa vo vesmíre, čím poskytuje pohľad na štruktúru slnečnej sústavy a mimo nej. Tieto znalosti sú tiež nevyhnutné pre pochopenie miesta Zeme vo vesmíre a toho, ako sa vyskytujú prírodné javy, ako sú ročné obdobia, príliv a odliv a zatmenie. Štúdium planetárnych systémov navyše spája fyziku, matematiku a geometriu, čo z neho robí multidisciplinárnu tému, ktorá podporuje hlbšie pochopenie vesmíru.

### Aplikácie vo vede

Štúdium planetárnych systémov má množstvo aplikácií vo vede, čo z neho robí základnú oblasť vedomostí:

- Astronómia: Pochopenie pohybu planét je základom pre štúdium slnečnej sústavy, objavovanie exoplanét a pochopenie dynamiky galaxií.
- Veda o klíme: Geometria obežnej dráhy Zeme okolo Slnka pomáha vysvetliť javy, ako sú ročné obdobia, variácie slnečnej energie a dlhodobé klimatické zmeny.
- Satelitná technológia: Moderné komunikačné a GPS systémy sa pri umiestňovaní a udržiavaní satelitov na obežnej dráhe spoliehajú na princípy pohybu planét.

Táto téma spája teoretické poznatky s reálnymi technológiami a vedeckým úsilím.

### Praktické využitie

Princípy planetárnych systémov majú praktické dôsledky, ktoré ovplyvňujú náš každodenný život:

- Environmentálna veda: Pochopenie obežnej dráhy Zeme pomáha predpovedať klimatické vzorce, prílivové zmeny a zatmenia Slnka, ktoré sú životne dôležité pre plánovanie životného prostredia a katastrof.

- Technológia a komunikácia: Satelity obiehajúce okolo Zeme závisia od rovnakých princípov, ktoré riadia pohyb planét, čím sa zabezpečuje globálna konektivita a presná navigácia.
- Vzdelávanie a informovanosť: Učenie sa o planetárnych systémoch podporuje zvedavosť ohľadom vesmíru a inšpiruje budúcich vedcov a inžinierov k objavovaniu vesmíru.

## Modul 9: Planetárny systém – krátke video



## Modul 10: Skúmanie Slnčnej sústavy

### Popis témy

Tento modul zoznamuje študentov so vzdialenosťami pri cestovaní vesmírom. Študenti budú skúmať slnečnú sústavu pohybom medzi planétami pomocou známych rýchlostí:

- 2. kozmická rýchlosť
- najvyššia rýchlosť počas misie Apollo 11
- rýchlosť slnečnej sondy Parker Solar Probe
- 1/100 rýchlosti svetla
- rýchlosť svetla

Študenti sa dozvedia, ako dlho trvá cesta medzi planétami a ako na ne vplyva gravitácia. Cesta zo Slnka na Zem rýchlosťou svetla trvá vyše 8 minút a keď konečne uvidíme našu planétu, o chvíľu zmizne. To ukazuje, aká malá je Zem v porovnaní so vzdialenosťou medzi ňou a Slnkom.

### Dôležitosť témy

Pochopenie planetárnych systémov je základom astronómie a vesmírnej vedy. Pomáha študentom pochopiť, ako nebeské objekty interagujú a pohybujú sa vo vesmíre, čím poskytuje pohľad na štruktúru slnečnej sústavy a mimo nej. Tieto znalosti sú tiež nevyhnutné pre pochopenie miesta Zeme vo vesmíre.

### Aplikácie vo vede

Štúdium planetárnych systémov má množstvo aplikácií vo vede, čo z neho robí základnú oblasť vedomostí:

- Prieskum vesmíru: Orbitálna mechanika sa používa na navrhovanie trajektórií kozmických lodí pre misie na Mesiac, Mars a ďalej.
- Satelitná technológia: Moderné komunikačné a GPS systémy sa pri umiestňovaní a udržiavaní satelitov na obežnej dráhe spoliehajú na princípy pohybu planét.

Táto téma spája teoretické poznatky s reálnymi technológiami a vedeckým úsilím.

### Praktické využitie

Princípy planetárnych systémov majú praktické dôsledky, ktoré ovplyvňujú náš každodenný život:

- Vesmírne cestovanie: Inžinieri používajú koncepty obežných dráh na výpočet efektívnych trajektórií pre rakety, satelity a medziplanetárne sondy.



- Technológia a komunikácia: Satelity obiehajúce okolo Zeme závisia od rovnakých princípov, ktoré riadia pohyb planét, čím sa zabezpečuje globálna konektivita a presná navigácia.
- Vzdelávanie a informovanosť: Učenie sa o planetárnych systémoch podporuje zvedavosť ohľadom vesmíru a inšpiruje budúcich vedcov a inžinierov k objavovaniu vesmíru.

## Modul 10: Skúmanie Slnecnej sústavy – krátke video



## Modul 11: Geometrická interpretácia parciálnych derivácií

### Popis témy

V tomto module študenti skúmajú geometrický význam parciálnych derivácií v matematickej analýze funkcií viacerých premenných. Derivácie v smere predstavujú rýchlosť zmeny funkcie v určitom smere, zatiaľ čo parciálne derivácie merajú zmeny pozdĺž jednej osi. Prostredníctvom interaktívnych 3D vizualizácií budú študenti pozorovať, ako sa mení sklon funkcie v závislosti od smeru a polohy. Modul umožňuje študentom manipulovať s povrchmi a vektormi, aby pochopili, ako sa tieto derivácie počítajú a aplikujú. Tento praktický prístup premostuje priepasť medzi abstraktnými matematickými vzorcami a ich interpretáciami v reálnom svete.

### Dôležitosť témy

Pochopenie parciálnych derivácií je nevyhnutné pre analýzu a riešenie problémov v matematickej analýze funkcií viacerých premenných. Tieto koncepty sú základom pre oblasti ako fyzika, ekonómia a inžinierstvo, kde funkcie často závisia od viacerých premenných. Parciálne derivácie sú rozhodujúce pre optimalizáciu, modelovanie a interpretáciu javov v reálnom svete, od dynamiky tekutín až po strojové učenie. Tento modul poskytuje študentom vizuálne a intuitívne porozumenie týchto derivácií.

### Aplikácie vo vede

Parciálne derivácie majú širokú škálu aplikácií vo vede a technike:

- Fyzika: Popisujú, ako sa fyzikálne veličiny, ako je teplota alebo tlak, menia v určitom smere v rámci poľa.
- Ekonomika: V optimalizačných problémoch parciálne derivácie identifikujú ako malá zmena v jednej premennej (napr. práca alebo kapitál) ovplyvňuje výstup.
- Inžinierstvo: Používajú sa v technikách optimalizácie založených na gradiente na navrhovanie efektívnych systémov alebo štruktúr, ako je minimalizácia nákladov na materiál alebo maximalizácia pevnosti.
- Dátová veda: V strojovom učení sú parciálne derivácie kľúčové pre algoritmy, ako je zostup gradientu, ktorý optimalizuje parametre modelu iteratívnym znižovaním chýb.
- Environmentálne vedy: Pomáhajú modelovať zmeny v počasí alebo rozptyl znečisťujúcich látok v geografických oblastiach.

Vizualizáciou týchto derivácií môžu študenti lepšie oceniť ich silu pri opise a predpovedaní zmien v zložitých systémoch.

## Praktické využitie

Schopnosť interpretovať a vypočítať parciálne derivácie má priamu praktickú hodnotu:

- Dizajn a výroba: Inžinieri používajú tieto derivácie na optimalizáciu návrhov, ako je nájdenie najlepšieho sklonu potrubia alebo minimalizácia napätia v materiáli.
- Navigácia a robotika: Roboty používajú derivácie v smere na výpočet optimálnych ciest a vyhýbanie sa prekážkam, najmä v prostrediach, kde sa terén alebo podmienky líšia.
- Lekárske zobrazovanie: Parciálne derivácie pomáhajú pri rekonštrukcii obrazov v technikách, ako sú CT skeny alebo optimalizácia dávok žiarenia pri liečbe rakoviny.
- Ekonomika a podnikanie: Analytici používajú parciálne derivácie na určenie toho, ako zmeny vo výrobných vstupoch ovplyvňujú funkcie zisku alebo nákladov.
- Umelá inteligencia: Pri trénovaní modelov AI vedú derivácie proces učenia a zlepšujú predpovede a rozhodovanie v priebehu času.

## Modul 11: Geometrická interpretácia parciálnych derivácií – krátke video



## Modul 12: Sféricke súradnice

### Popis témy

V tomto module študenti preskúmajú koncept sférických súradníc, systém používaný na opis bodov v trojrozmernom priestore. Na rozdiel od karteziánskych súradníc určujú sféricke súradnice polohu bodu pomocou troch hodnôt: radiálna vzdialenosť ( $r$ ), polárny uhol ( $\theta$ ) a azimutálny uhol ( $\phi$ ). Tento súradnicový systém je obzvlášť užitočný pri úlohách so symetriou okolo centrálného bodu, napríklad vo fyzike alebo inžinierstve. Modul obsahuje interaktívne vizualizácie, kde môžu študenti manipulovať s týmito parametrami, aby videli, ako sa mení poloha bodu v 3D priestore. Okrem toho si precvičia prevod medzi karteziánskymi a sférickými súradnicami a riešenie problémov, ktoré zahŕňajú integráciu funkcií cez sféricke oblasti.

### Dôležitosť témy

Pochopenie sférických súradníc je rozhodujúce v oblastiach, kde zohrávajú ústrednú úlohu trojrozmerné priestorové vzťahy. Tento systém sa používa vo fyzike na analýzu elektrických a gravitačných polí, v inžinierstve na navrhovanie guľových štruktúr alebo systémov a v matematike na riešenie zložitých integrálov v 3D. Sféricke súradnice zjednodušujú výpočty v úlohách s radiálnou symetriou, vďaka čomu sú nevyhnutné pre pokročilé štúdium matematickej analýzy, diferenciálnych rovníc a vektorovej analýzy. Zvládnutie tejto témy umožňuje študentom pristupovať k problémom reálneho sveta, ktoré si vyžadujú priestorové uvažovanie a presnosť.

### Aplikácie vo vede

Sféricke súradnice majú širokú škálu aplikácií v rôznych vedných disciplínach:

- Fyzika: Sú nevyhnutné na analýzu problémov týkajúcich sa sfér alebo radiálnej symetrie, ako je výpočet gravitačných alebo elektrických polí okolo bodového zdroja alebo štúdium nebeskej mechaniky.
- Astronómia: Sféricke súradnice sa používajú na mapovanie hviezd, planét a iných nebeských objektov v 3D priestore.
- Inžinierstvo: Hrajú úlohu pri navrhovaní guľových nádrží, kupol alebo akejkoľvek konštrukcie s radiálnou symetriou.
- Matematika: V analýze funkcií viac premenných a vektorovej analýze sféricke súradnice zjednodušujú riešenie integrálov cez sféricke oblasti.
- Geografia: Zemepisná šírka, dĺžka a nadmorská výška sú sféricke súradnice používané na lokalizáciu polôh na Zemi.

Tento modul pomáha študentom vidieť širokú použiteľnosť sférických súradníc a ich hodnotu pri riešení problémov v reálnom svete.

## Praktické využitie

V praxi sú sférické súradnice životne dôležité pre oblasti, ako je robotika, kde je umiestnenie objektov v 3D priestore rozhodujúce pre navigáciu a manipuláciu. Používajú sa v lekárskom zobrazovaní, ako sú CT skeny a MRI, na modelovanie a analýzu štruktúr ľudského tela. V počítačovej grafike pomáhajú sférické súradnice vykresľovať sférické objekty a simulovať svetelné efekty. Geofyzici ich používajú na modelovanie seizmických vln alebo na štúdium gravitačného poľa Zeme. Osvojením si sférických súradníc študenti získajú základné nástroje na riešenie priestorových problémov vo vede, technike a priemysle.

## Modul 12: Sférické súradnice – krátke video



## Modul 13: Vektory, operácie s vektormi

### Popis témy

Tento modul zoznamuje študentov s vektormi a základnými operáciami, ktoré sa s nimi vykonávajú. Vektory sú matematické objekty s veľkosťou aj smerom, čo z nich robí základné nástroje na popis fyzikálnych veličín a priestorových vzťahov. Študenti preskúmajú základné vektorové operácie, ako je sčítanie, odčítanie, skalárne násobenie a normalizácia a naučia sa, ako vypočítať veľkosť vektora. Modul poskytuje interaktívne vizualizácie, kde môžu študenti manipulovať s vektormi v 2D a 3D priestoroch, pozorovať efekty operácií a porozumieť ich geometrickým interpretáciám.

### Dôležitosť témy

Vektory sú základným kameňom matematiky, fyziky, inžinierstva a informatiky. Poskytujú rámec na popis pohybu, síl a pozícií vo viacrozmerých priestoroch. Ovládanie vektorových operácií je nevyhnutné na pochopenie zložitejších tém, ako je vektorový počet, lineárna algebra a mechanika. Naučením sa, ako fungujú vektory, študenti získajú zručnosti použiteľné pri riešení problémov v teoretickom aj praktickom kontexte, od navigácie až po vykresľovanie grafiky a strojové učenie.

### Aplikácie vo vede

Vektory a ich operácie majú široké uplatnenie v rôznych vedeckých oblastiach:

- Fyzika: Vektory popisujú veličiny ako posunutie, rýchlosť, zrýchlenie a sila. Napríklad rozloženie síl na komponenty vyžaduje sčítanie vektorov a skalárne násobenie.
- Technika: Inžinieri používajú vektory na modelovanie a analýzu napätí, prúdov a pohybu v systémoch, ako sú mosty, elektrické obvody alebo vozidlá.
- Robotika: Vektory sú rozhodujúce pre výpočet pohybu robotických ramien a navigáciu autonómnych robotov.
- Počítačová grafika: Vektory sú základom pre vykresľovanie 3D objektov, výpočet osvetlenia a simuláciu fyzických interakcií vo videohrách a simuláciách.
- Geografia: vektory modelujú smer a rýchlosť vetra, vodné prúdy a iné geopriestorové javy.

Tieto aplikácie ukazujú, ako vektory tvoria matematický jazyk na pochopenie a popis fyzického sveta.

### Praktické využitie

Vektorové operácie majú priame aplikácie v každodenných technológiách a oblastiach:



- Navigácia a GPS: Vektory sa používajú na výpočet smerov, vzdialeností a optimálnych trás pre vozidlá a lode.
- Mechanický dizajn: Pri výrobe vektory pomáhajú navrhovať nástroje a stroje, ktoré pracujú s určitou presnosťou.
- Dynamika letu: Piloti používajú vektory na výpočet vetra a vypočítavajú korekcie kurzu, aby zostali na trati.
- Športová analýza: V športoch, ako je futbal alebo basketbal, vektory modelujú pohyby hráčov a trajektórie lopty na analýzu stratégií.
- Dátová veda a strojové učenie: Vektory predstavujú dátové body a vzťahy vo viacrozmerných priestoroch, ktoré tvoria základ mnohých algoritmov.

### Modul 13: Vektory, operácie s vektormi – krátke video

