



Co-funded by  
the European Union



MATH 3D GEO VR



# Töötöa materjalid

## õpetajatele ja õpilastele

„Matemaatilised mudelid kolmemõõtmelise geomeetria õpetamiseks kasutades virtuaalset reaalsust”

„Mathematical models for teaching three - dimensional geometry using virtual reality“



EESTIKEELNE VERSIOON



Lodz University  
of Technology



universidade de aveiro  
theoria poiesis praxis



UNIVERSITY  
OF ŽILINA



UNIVERSITY OF SILESIA  
IN KATOWICE

## Töötoa materjalid õpetajatele ja õpilastele "Matemaatilised mudelid kolmemõõtmelise geomeetria õpetamiseks kasutades virtuaalset reaalsust"

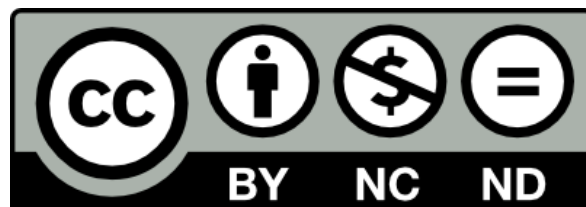
("Mathematical models for teaching three-dimensional geometry using virtual reality")

Loodud Math3DgeoVR konsortsiumi poolt.



Co-funded by  
the European Union

Euroopa Liidu kaasrahastus (Math3DgeoVR, project no. 2021-1-PL01-KA220-HED-000030365). Väljendatud seisukohad ja arvamused on siiski ainult autori(te) omad ega pruugi kajastada Euroopa Liidu või Fundacja Rozwoju Systemu Edukacji seisukohti ja arvamusi. Euroopa Liit ega abi andev asutus ei saa nende eest vastutada.



### CC litsents

CC litsents võimaldab taaskasutajatel kopeerida ja levitada materjali mis tahes kandjal või formaadis ainult kohandamata kujul, ainult mittekaubanduslikel eesmärkidel ja ainult tingimusel, et autor on korralikult viidatud.

Oculus Quest 2	1
Tutorial: Moodulites navigeerimine	7
VR rakenduse moodulid	10
Moodul 1: Trajektoor	23
Moodul 2: Nurgad kuubis	30
Moodul 3: Püramiidi nurgad	39
Moodul 4: Mitte-eukleidiline geomeetria	46
Moodul 5: Funktsioonide maksimumid ja miinimumid	50
Moodul 6: Lineaarsete võrrandite süsteemid	56
Moodul 7: Prismad - prismade lõiked, prismadega võrgud	62
Moodul 8: Püramiidid - püramiidide lõiked, püramiididega võrgud	68
Moodul 9: Planeedisüsteem	75
Moodul 10: Päikesesüsteemi uurimine	80
Moodul 11: Osaliste tuletiste geomeetriline tõlgendamine	82
Moodul 12: Sfäärilised koordinaadid	87
Moodul 13: Vektorid, operatsioonid vektoritega, skalaarid	93



# Oculus Quest 2

## Oculus Quest 2 tutvustus

**Oculus Quest 2**, mida nüüd tuntakse **Meta Quest 2** nime all, on iseseisev virtuaalreaalsuse prill, mis pakub mitmeid täiustatud funktsioone. Siin on nende funktsioonide üksikasjalik kirjeldus ja juhised nende kasutamiseks.

Oculus Quest 2 koosneb kahest peamisest esemest:

1. Peaga kinnitatav ekraan (HMD, joonis 1)

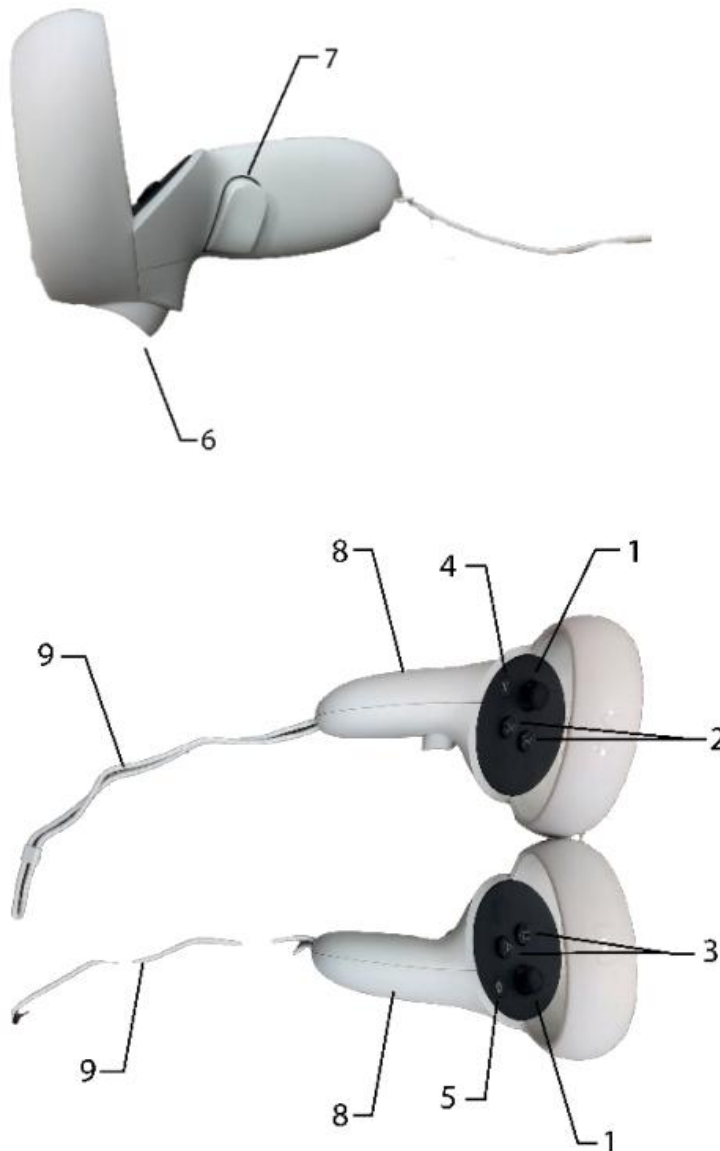


1. Laadimisport
2. Toitenupp
3. Helitugevuse reguleerimine
4. Heliport
5. Objektiivi reguleerimine
6. Reguleerimisrihmad
7. Reguleerimisrihmad
8. Silmaklaaside hoidja (valikuline)

Joonis 1. Peale paigaldatav ekraan

(foto on võetud Meta Quest 2 New User Guide'ist, Lõuna-Carolina Ülikool. (n.d.). [Meta Quest 2 peakomplekti kujutav pilt]. In *Meta Quest 2 New User Guide*. Välja otsitud aadressilt [https://sc.edu/about/offices\\_and\\_divisions/cte/teaching\\_resources/docs/quest2\\_user\\_guide.pdf](https://sc.edu/about/offices_and_divisions/cte/teaching_resources/docs/quest2_user_guide.pdf)).

## 2. Puutejuhtimisseadmed (joonis 2)



1. Joystickid
2. X/Y nupud (vasakpoolne kontroll)
3. A/B nupud (parem kontroll)
4. Menüü nupp (vasakpoolne kontroll)
5. Oculuse nupp (parem kontroll)
6. Käivitusnupud
7. Grip nupud
8. Akukambrid
9. Rannarihmad

Joonis 2. Kontrollid

(foto pärineb Meta Quest 2 New User Guide, University of South Carolina. (n.d.). [Meta Quest 2 peakomplekti kujutav pilt]. In Meta Quest 2 New User Guide. Välja otsitud aadressilt [https://sc.edu/about/offices\\_and\\_divisions/cte/teaching\\_resources/docs/quest2\\_user\\_guide.pdf](https://sc.edu/about/offices_and_divisions/cte/teaching_resources/docs/quest2_user_guide.pdf)).

## Põhijooned

**Näitab:** Prillid on varustatud kahe ekraaniga, mille eraldusvõime on 2064 x 2208 pikslit iga silma kohta, mis tagab selge ja üksikasjaliku pildi.

**Protsessor:** Quest 2 töötab Qualcomm Snapdragon XR2 protsessoriga, mis võimaldab VR-mängude ja -rakenduste sujuvat toimimist.

**Liikumise jälgimine:** Prillid pakuvad liikumisjälgimist 3D-ruumis tänu neljale välitingimustes paigutatud kaamerale, mis võimaldab teil ümbritsevaga suhelda.

**Kontrollerid:** Virtuaalses maailmas täpse juhtimise jaoks on lisatud puutejuhtimispuldid.

**Ühenduse funktsioonid:** Kasutajad saavad osaleda mitmikmängudes ja live-üritustel, et rikastada VR-kogemust.

**PC ühilduvus:** Prillid saab ühendada arvutiga, mis võimaldab kasutajatel kasutada nõudlikumaid VR-rakendusi...

## Kuidas alustada Oculus Quest 2-ga

### Kuidas lülitada kaitseprillid sisse

Oculus Quest 2 sisselülitamiseks peate:

1. Vajutage prillide peal olevat toitenuppu.
2. Oodake, kuni süsteem käivitub ja kuvab Oculuse logo.

### Konto registreerimine

Oculus Quest 2 kasutamiseks on vaja Meta (endine Facebook) kontot. Registreerimisprotsess hõlmab järgmist:

1. Oculuse rakenduse allalaadimine: Saate rakenduse alla laadida App Store'ist või Google Play poest.
2. Sisselogimine: Kasutaja peab sisse logima oma Meta-kontole.
3. Profiili konfigureerimine: Kasutaja määrab eelistused, lisab makseteabe ja loob PIN-koodi Oculuse poe jaoks.

### Prillide lähtestamine

Kui prillide toimimisega on probleeme, saate neid lähtestada.

1. Tehase seadete lähtestamine:
  - Lülitage kaitseprillid välja.
  - Vajutage ja hoidke toitenuppu ja helitugevusnuppu samaaegselt umbes 10 sekundit all.

- Kui ilmub Oculuse logo, vabastage nupud.
  - Kasutage navigeerimiseks helitugevusnuppe ja valige "Factory Reset".
2. Rakenduse lähtestamine: See võib aidata lahendada ühendusprobleeme.

Oculus Quest 2 on täiustatud seade, mis pakub hulgaliselt virtuaalreaalsuse võimalusi nii mängijatele kui ka kogemuste otsijatele.

## Oculus Quest 2 tehnilised nõuded

Oculus Quest 2 täielikuks kasutamiseks peab teie arvuti vastama teatavatele tehnilistele nõuetele. Siin on neist kõige olulisemad:

- Protsessor: Intel Core i5-4590 või AMD Ryzen 5 1500X või paremad.
- RAM: Vähemalt 8 GB
- Operatsioonisüsteem: Windows 10
- Graafikakaart: NVIDIA GeForce GTX 1060 või parem NVIDIA GeForce GTX 1060 või parem, AMD Radeon RX 480 või parem
- Sadamad, USB-port on saadaval

Pange tähele, et need nõuded kehtivad Oculus Linki kasutamisel, mis võimaldab teil ühendada prillid arvutiga ja mängida VR-mänge Riftist või Steami raamatukogust. Kui soovite Quest 2 kasutada iseseisva seadmena, ilma seda arvutiga ühendamata, on nõuded veidi väiksemad. Samuti tasub tähele panna Oculus Linki kaabli pikkust. Soovitatav on kasutada originaalkaablit või head asenduskaablit, et tagada optimaalne pikkus ja liikumisvabadus mängimise ajal.

## Probleemid seadistamisel

Oculus Quest 2 võib vaatamata oma täiustatud funktsioonidele esineda kasutamise ajal mitmesuguseid probleeme. Siin on toodud kõige levinumad ja nende lahendamine.

Esialgse seadistamise ajal võivad kasutajad kokku puutuda mitmete raskustega.

## Uuenduste peatamine

Prillid ei pruugi uuendamisprotsessi läbida. Kui see juhtub, proovige seadme taaskäivitamist või lähtestamist tehaseseadetele, kui probleem püsib [1].

## Paaristamise kood

Teil võidakse paluda sisestada sidumiskood. Avage oma mobiilseadmes Oculuse rakendus ja järgige juhiseid seadistamise jätkamiseks [1].

## Tarkvara probleemid

Kasutajatel võivad tekkida sellised tarkvaraprobleemid nagu:

### Rakenduse kokkupõrked

Rakendused võivad mõnikord takerduda või muutuda reageerimatuks. Kui see juhtub, võib aidata prillide taaskäivitamine või tarkvara uuendamise sundimine seadetes [1,4].

### Must ekraan

Kasutajad võivad pärast prillide eemaldamist näha musta ekraani. Sellisel juhul tuleb seadet lihtsalt uuesti käivitada, et taastada normaalne vaade [4].

## Tulemuslikkuse probleemid

Tugeva kasutuse korral võivad tekkida jõudlusprobleemid.

### Ülekuumenemine

Prillid võivad muutuda kuumaks, eriti kui mängid pikalt. Kui see juhtub, on hea mõte teha paus, et seade saaks jahtuda [2].

### Probleemid pildikvaliteediga

Kasutajad võivad märgata, et pildikvaliteet ei ole rahuldav. Selle põhjuseks võivad olla ebapiisavad seaded või vajadus tarkvara ajakohastada [2].

## Terviseprobleemid

VR-prillide kasutamine võib põhjustada mõningaid terviseprobleeme.

### VR haigus

Mõnedel kasutajatel võivad tekkida reisikahjustusega sarnased sümptomid, nagu pearinglus või iiveldus. Nende sümptomite minimeerimiseks on soovitatav teha pausid ja vältida pikaajalist kasutamist [6].

## Kontoprobleemid

Probleemide korral teie Meta (Facebook) kontoga:

### Sisselogimise probleemid

Kasutajatel võib olla raskusi oma kontole sisselogimisega. Tasub kontrollida, et sisselogimisandmed oleksid õiged ja et Oculuse rakendus oleks uuendatud [1].

Kokkuvõtteks võib öelda, et Oculus Quest 2 on arenenud seade, mille kasutamisel võivad tekkida mitmesugused probleemid. Paljusid neist saab lahendada tarkvara uuendamise,



seadme taaskäivitamise või tehaseseadete lähtestamise abil. Terviseprobleemide korral on soovitatav teha kasutamisest pausid.

## Viited

- [1] <https://vrpolska.eu/poradnik-nowego-posiadacza-questa/>
- [2] <https://mobiletrends.pl/sprawdzamy-google-oculus-quest-2-od-facebook-a-czy-wprowadza-wirtualna-rzeczywistosc-pod-strzechy/>
- [3] <https://www.youtube.com/watch?v=1uSoGOqmVbE>
- [4] [https://business.oculus.com/support/444171669614375/?locale=pl\\_PL](https://business.oculus.com/support/444171669614375/?locale=pl_PL)
- [5] <https://securecdn.oculus.com/sr/oculusquest-warning-polish>
- [6] <https://motionsystems.pl/vr-sickness/>
- [7] <https://www.meta.com/pl-pl/help/quest/articles/getting-started/getting-started-with-quest-2/what-is-meta-quest-2/>
- [8] <https://www.meta.com/pl-pl/help/quest/articles/headsets-and-accessories/using-your-headset/>.



# Tutorial: Moodulites navigeerimine

## Juhtseadmed ja käed

Enamiku interaktsioonide tegemiseks selles rakenduses saate kasutada nii kontrollereid kui ka oma käsi (kui VR-prillide seadetes on käte jälgimine lubatud), käte jälgimise aktiveerimiseks pange kontrolleriid maha, nii et need ei liigu, ja seejärel asetage oma käed VR-prillide vaatevälja, kontrolleri jälgimise aktiveerimiseks võtke lihtsalt kontrolleriid kätte.

Käte jälgimine - käte jälgimise kasutamiseks tuleb see esmalt lubada süsteemi tasandil süsteemimenüüs -> kiirseaded -> seaded -> seade -> käed ja kontrolleriid -> käte jälgimine.

## Jalutuskäik

Kasutades vasaku kontrolleri joysticki saate liikuda ettepoole tahapoole ja küljelt ettepoole on alati selles suunas, kuhu te vaatate, kiigates parema kontrolleri joysticki vasakule või paremale saate pöörata 45-kraadiste sammudega.

## Teleport

Kallutades parema kontrolleri joysticki ettepoole, aktiveerite telepordi indikaatori, mille osutate kuhugi ja seejärel võtate sõrme joystickilt ära, siis liigute näidatud kohta. Nooled osuti otsas näitavad sinu vaatesuunda pärast teleportimist saad seda reguleerida joysticki nupu küljele kallutamiseega.

Te võite kutsuda telepordi indikaatorit parema käega, peopesad paralleelselt maapinnaga sirge nimetissõrme suunaga ettepoole sirge pöidla suunaga vasakule poole telepordi heakskiitmine toimub siis, kui te suunate sirge pöidla ettepoole.

## Objektide haaramine

Kasta kontrolleri otsa haaratavasse esemesse ja kasuta selle objekti haaramiseks kontrolleri käepidemel olevat haaramisnuppu, mida hoiad kinni, kuni lased nupust lahti, sa võid sellist objekti ka käega haarata ja kõik sõrmed sellele pingutada või haarata seda ainult nimetissõrme ja pöidlaga seda tegevust saab katsetada, haarates nüüd ukse vasakul poolel hõljuvat tahvelarvutit.

## Kasutajaliidese juhtimisseadmed

Nagu te ilmselt juba teate, saate liideselemendiga suhelda, kastes sõrmega või kontrolleri otsaga pisikese valge palli, see kehtib ka mitmesuguste liugurite nuppude kohta.

## Pop-up menüü

Pikamenüü esilekutsumiseks vajutage vasaku kontrolleri lamedat nuppu või tehke näpuga žest (vasaku käe nimetissõrme ja pöidlaga), hoides samal ajal kätt tõstetud ja VR-prillidele suunatud. Samamoodi saate selle menüü sulgeda. Pikamenüü võimaldab teil igal ajal moodulist väljuda peamenüüsse, st praegusesse ruumi, või väljuda rakendusest võimaldab teil ka muuta keele helitugevust lülitada istumis- ja seismisrežiimi vahel ning kuvada ja peita ekraani ekraanipromptis.

## Töötamine Math3DgeoVR moodulitega

Rakenduses on saadaval moodulid, mis vastavad erinevatele matemaatilistele probleemidele, iga mooduli jaoks on olemas sissejuhatav osa, testiosa ja ka näiteid praktilisest rakendusest. Peamine navigatsioonipaneel on esitatud joonisel 3.

Käivitage moodul pärast õpetuse läbimist selle ekraani menüüst Valige moodulid (joonis 4) ja vajutage seejärel moodulile vastavat nuppu.



Joonis 3. Math3DgeoVR rakenduse peamine navigatsioonipaneel.



Joonis 4. VR-moodulite valik Math3DgeoVR rakenduses.

### Moodulitest väljumine

Enamikul juhtudel saate moodulist igal ajal väljuda peamenüüsse, vajutades väljumisüksel olevat nuppu. Samuti saate moodulist väljuda, kui vajutate hüpikmenüü alumise nupu peale.

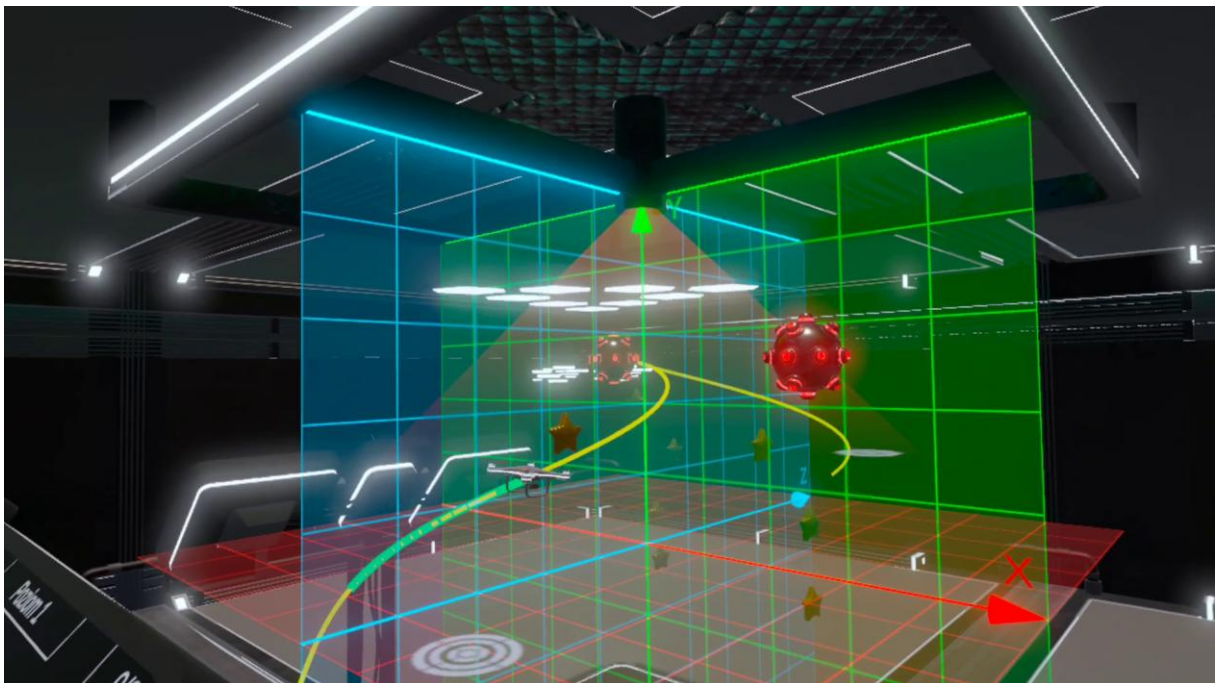
Näpunäited-moodulid võivad sisaldada täiendavaid ekraane, millel on muu hulgas näpunäiteid nende spetsiifiliste juhtimisseadiste kohta, et neid ekraane kuvada või peita, vajutage paremal kontrollril olevat nuppu B. Nende nähtavust saate muuta ka hüpikmenüüs oleva nupu abil.

## VR rakenduse moodulid

### Moodul 1: Trajektoor

Selles moodulis uurivad õpilased matemaatiliste funktsioonide ja nende graafiliste kujutiste vahelisi seoseid, keskendudes ruumilistele kõveratele. Eesmärk on mõista, kuidas ühe muutuja funktsioon võib kirjeldada kolmemõõtmelist kõverat, näiteks liikuva objekti, näiteks drooni, trajektoori. Õpilased kavandavad drooni lennurada, kasutades kahte funktsiooni - üks kujutab horisontaalset ja teine vertikaalset liikumist. Ülesanne on liikuda läbi konkreetsete punktide, vältides samal ajal takistusi. Funktsioone manipuleerides saavad õpilased visualiseerida drooni teekonda nii 3D-ruumis kui ka selle projektsioonis  $XY$ -tasapinnal.

Joonisel on kujutatud hologramm drooni lennutrajektooriga.

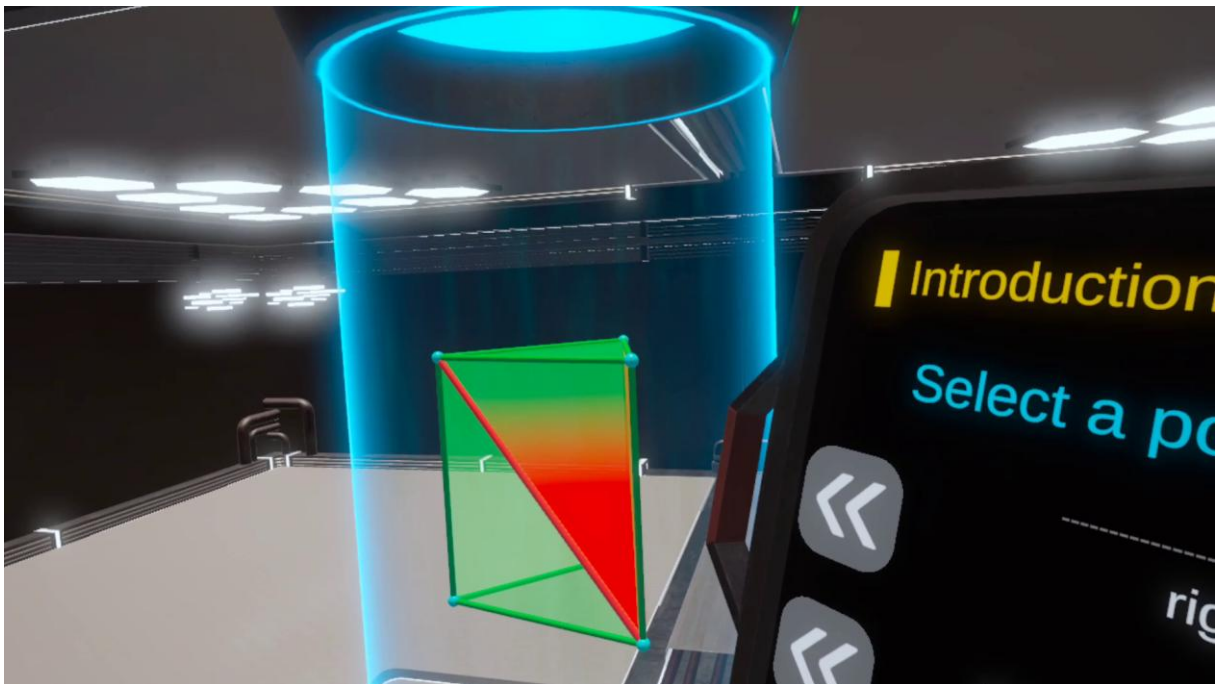


- **Õppestsenaarium 1:** Ühe muutuja trigonomeetriliste funktsioonide graafikud
- **Õppestsenaarium 2:** Vektorväärtusega funktsioon

## Moodul 2: Kuubi nurgad

Teema " Kuubi nurgad" hõlmab prisma diagonaalide ja servade poolt moodustatud nurkade analüüsi. Prisma, mis on ristkülikukujuline kolmemõõtmeline geomeetiline kuju, on üks ruumilise geomeetria põhiobjektidest, mida uuritakse. Prisma erinevate elementide vahel tekkivate nurkade mõistmine on ülioluline ruumilise geomeetria sügavama mõistmise ja selle rakenduste jaoks tegelikes probleemides. Selles moodulis saate tutvuda tahkete kehade ja nurkadega, vahetades nende tüüpide vahel, kasutades paneelil olevaid nooli. Antud nurga näidisega tahkis ilmub vasakul asuvasse sambasse, mille saate välja võtta ja seda lähemalt vaadata.

Joonisel on kujutatud kolmnurkse prisma hologramm.

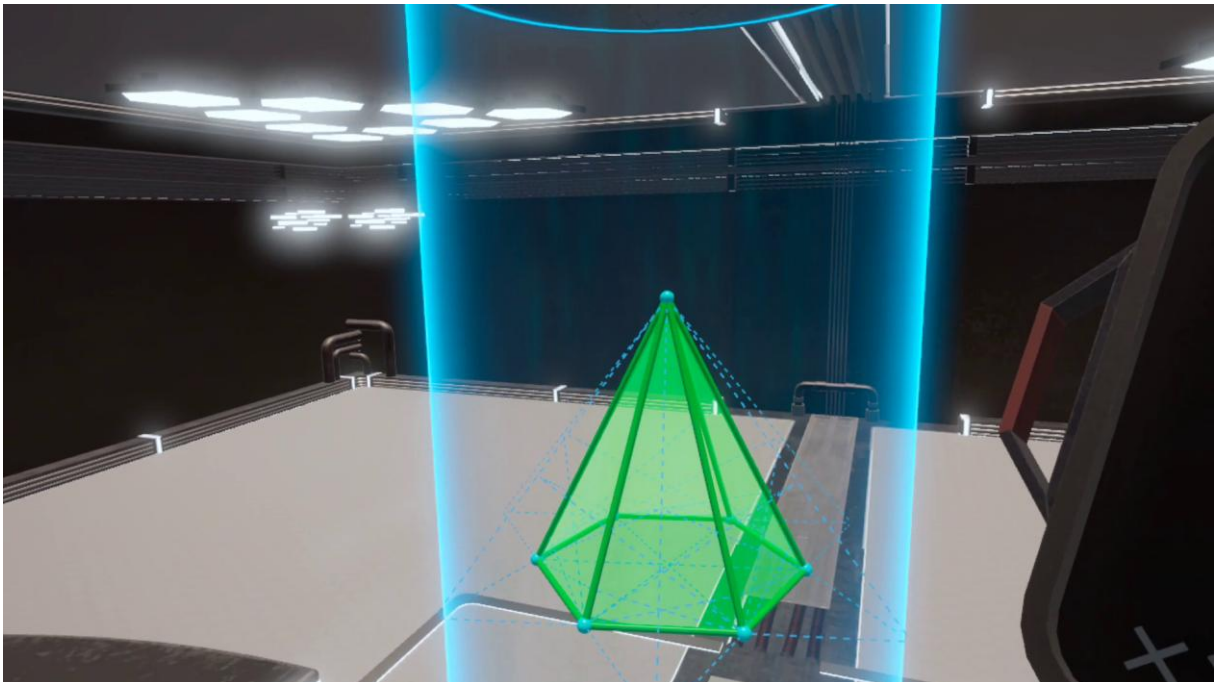


- Õpestsenaarium 1: Kuubi nurgad
- **Õpestsenaarium 2:** Kuubi serva pikkuse, pindala ja ruumala arvutamine

## Moodul 3: Püramiidi nurgad

Selles moodulis õpivad õpilased geomeetrilisi põhimõtteid rakendades püramiidide nurkasid tuvastama, arvutama ja mõistma. Seadistus on sarnane eelmisele ruumiliste kõverate moodulile, kuid nüüd keskendutakse püramiidikujude analüüsile ja manipuleerimisele. Õpilased töötavad erinevate püramiididega, uurides erinevaid ülesandeid, kasutades interaktiivseid funktsioone, nagu õpperežiim, harjutamisrežiim ja näidete režiim. Selle mooduli abil süvendavad õpilased oma arusaamist ruumilisest geomeetriast ja arendavad oskust arvutada püramiidikujuliste kehade, servade ja tippude vahelisi nurki.

Joonisel on kujutatud kuusnurkse püramiidiga hologramm.

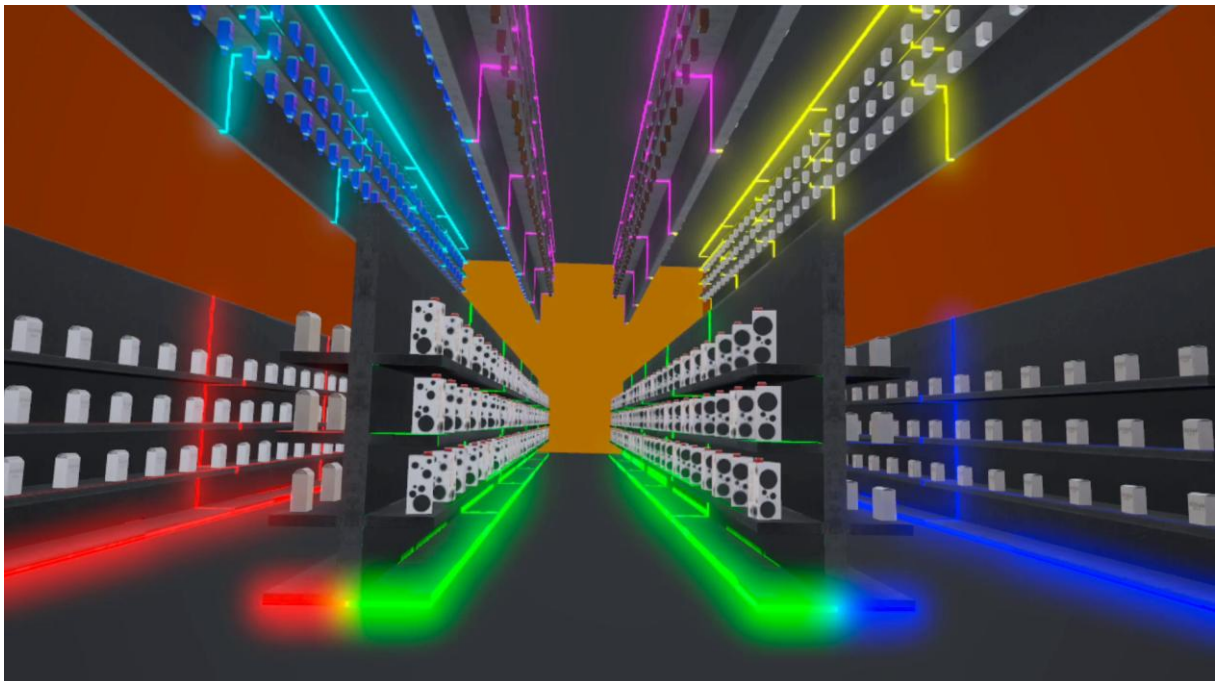


- **Õpestsenaarium 1:** Püramiidid ja kogupindala
- **Õpestsenaarium 2:** Püramiidi nurgad

## Moodul 4: Mitte-eukleidiline geomeetria

Selles moodulis uurivad õpilased elliptilist geomeetriat, mitte-eukleidilise geomeetria haru, mis lükkab tagasi Eukleidese viienda postulaadi, paralleelipostulaadi. Elliptilises geomeetrias lõikuvad mis tahes kaks sirget mõnes punktis, mis tähendab, et paralleelsete sirgete mõistet ei ole olemas. See mõjutab oluliselt kujude ja vahemaade mõistmist kumerates ruumides, näiteks Maa pinnal. VR-põhine moodul võimaldab õpilastel praktikas kogeda elliptilist geomeetriat, navigeerides läbi hoone, kus teed sarnanevad ellipsitelega. See praktiline lähenemisviis aitab õpilastel visualiseerida ja mõista mitte-eukleidilise geomeetria omadusi ja põhimõtteid kaasahaaravas keskkonnas.

Joonisel on kujutatud modelleeritud mitte-eukleidiline ruum - mitte-eukleidiline toidupood.



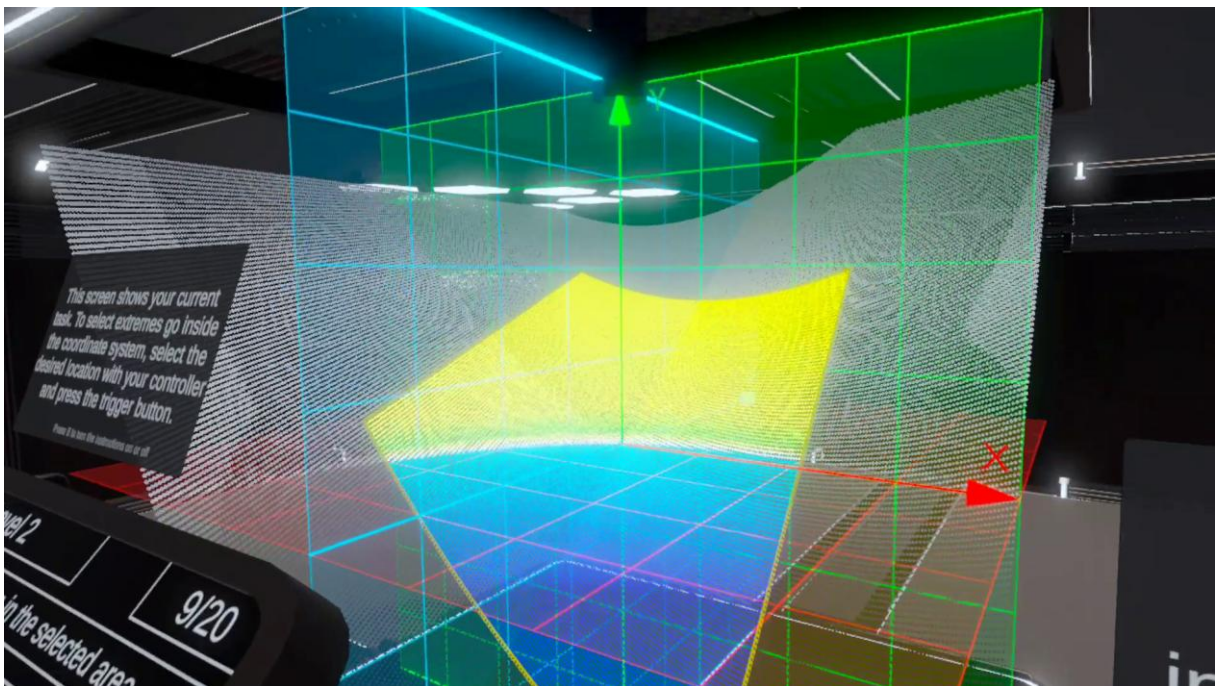
- **Õpeetsenaarium 1:** Eukleidiline geomeetria
- **Õpeetsenaarium 2:** Mitte-eukleidilise geomeetria alused



## Moodul 5: Funktsioonide maksimumid ja miinimumid

Selles moodulis õpivad õpilased leidma kahe või kolme muutuja funktsioonide globaalseid ekstreemumeid (nii maksimum- kui ka miinimumväärtusi). Ülesanne esitatakse interaktiivsel viisil, kus keskmisel ekraanil kuvatakse kolme võrrandi süsteem  $x$ -,  $y$ - ja  $z$ -tasandite jaoks. Õpilased peavad tuvastama globaalsed ekstreemid, paigutades markerid (kujutatud keradena) võrrandite poolt genereeritud pinna 3D-visualiseerimisele. Moodul aitab õpilastel mõista, kuidas tõlgendada funktsioonide geometriat ja tuvastada kriitilisi punkte, kus funktsioon saavutab oma kõrgeima või madalaima väärtuse globaalselt, mitte ainult lokaalselt.

Joonisel on kujutatud hologramm koos funktsiooni graafikaga.

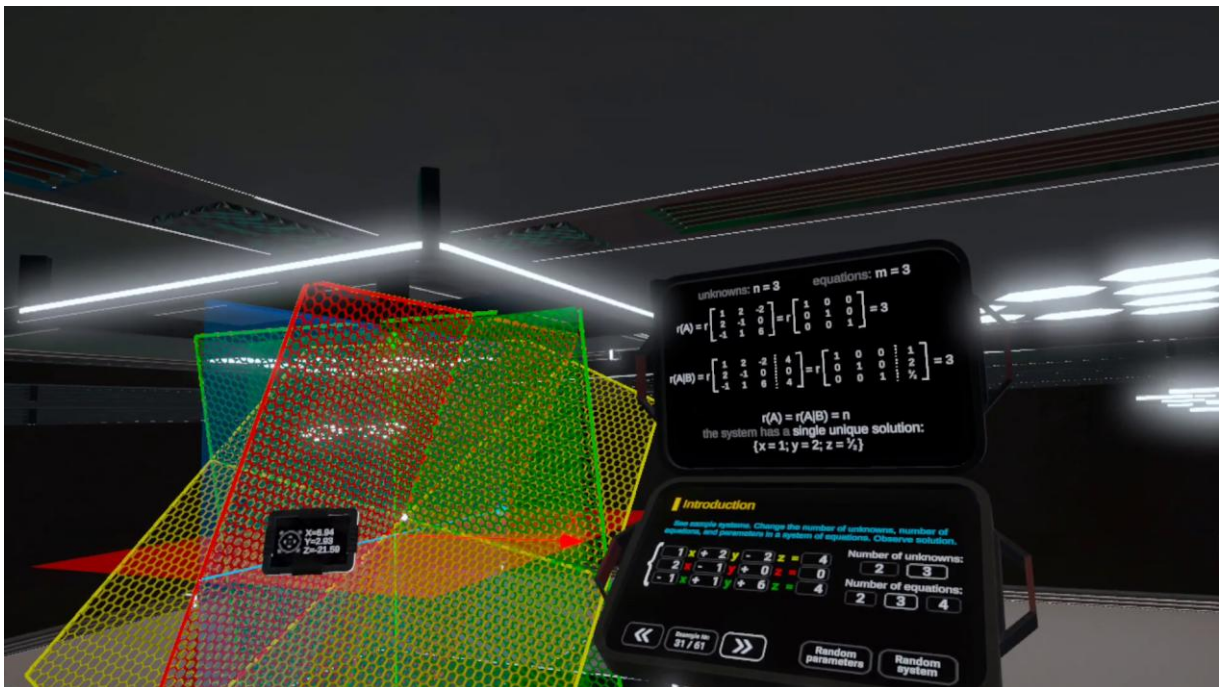


- **Õppestsenaarium 1:** Miinimum ja maksimum: määratlus, geomeetriline tõlgendamine
- **Õppestsenaarium 2:** Kahe muutuja funktsiooni ekstreemumi vajalikud ja piisavad tingimused

## Moodul 6: Lineaarsete võrrandite süsteemid

Selles moodulis uurivad õpilased lineaarsete võrrandite süsteeme interaktiivsete visualiseerimiste abil. Põhiekraanil kuvatakse võrrandeid, mida õpilased sisestavad tahvelarvuti kasutajaliidese abil. Sellel tahvelarvutil saavad õpilased valida enam kui 60 eeltäidetud näite hulgast või muuta parameetreid, näiteks muutujaid, võrrandeid ja koefitsiente. Lisaks on neil võimalus juhuslikult muuta kogu süsteemi või konkreetseid parameetreid, näiteks  $x$ ,  $y$  ja  $z$  väärtusi. Õpilased saavad kohandada ka tundmatute või võrrandite arvu, pakkudes paindlikku keskkonda nii algajatele kui ka edasijõudnutele probleemide lahendamiseks. Teisene tahvel näitab maatriksid, determinandid ja nende süsteemide lahendused, pakkudes õpilastele võimalust uurida, kuidas lineaaralgebra mõisteid võrrandisüsteemide lahendamisel rakendada.

Joonisel on kujutatud hologramm koos võrrandisüsteemiga.

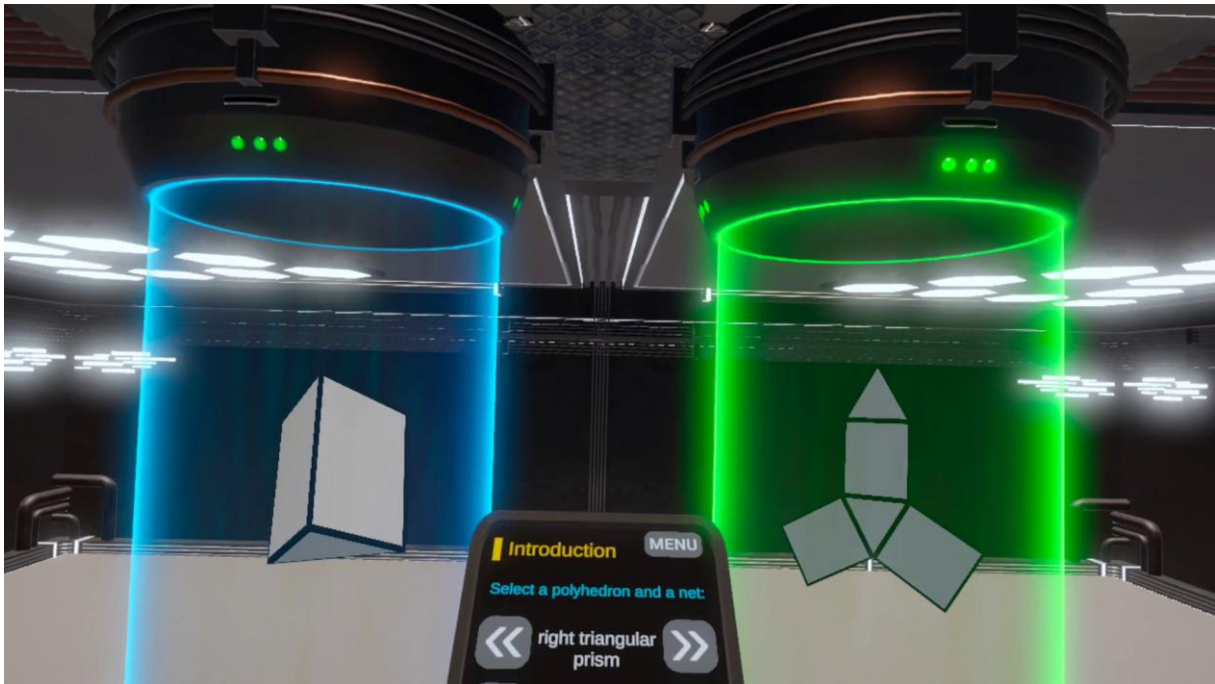


- **Õppestsenaarium 1:** Lineaarsete võrrandite geomeetiline tõlgendamine ruumides
- **Õppestsenaarium 2:** Lineaarsete võrrandite lahendamine

## Moodul 7: Prismad

Selles moodulis keskendutakse prismade geomeetriaale, pöörates erilist ja nende ruumilise paigutuse mõistmisele võrega. Nad tegelevad prismade ruudustikega seotud ülesannetega, visualiseerides, kuidas need tahked kehad struktureeritud paigutuses omavahel suhtlevad

Joonisel on kujutatud hologrammid koos prisma ja selle ruudustikuga.

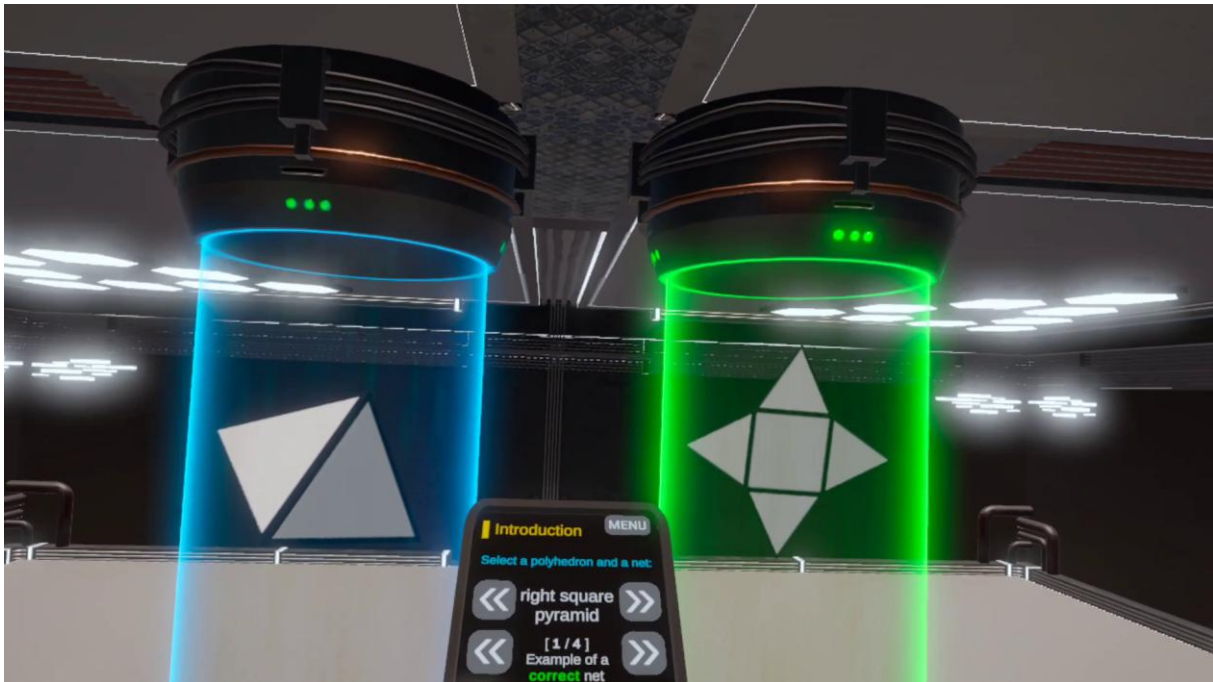


- Õpestsenaarium 1: Prismade ruudustik
- **Õpestsenaarium 2:** Prismade kogupindala ja -mahu arvutamine

## Moodul 8: Püramiidid

Selles moodulis keskendutakse püramiidide geomeetria, pöörates erilist ja nende ruumilise paigutuse mõistmisele võrega. Nad tegelevad püramiidide ruudustikega seotud ülesannetega, visualiseerides, kuidas need tahked kehad struktureeritud paigutuses omavahel suhtlevad.

Joonisel on kujutatud hologrammid koos püramiidi ja selle ruudustikuga.

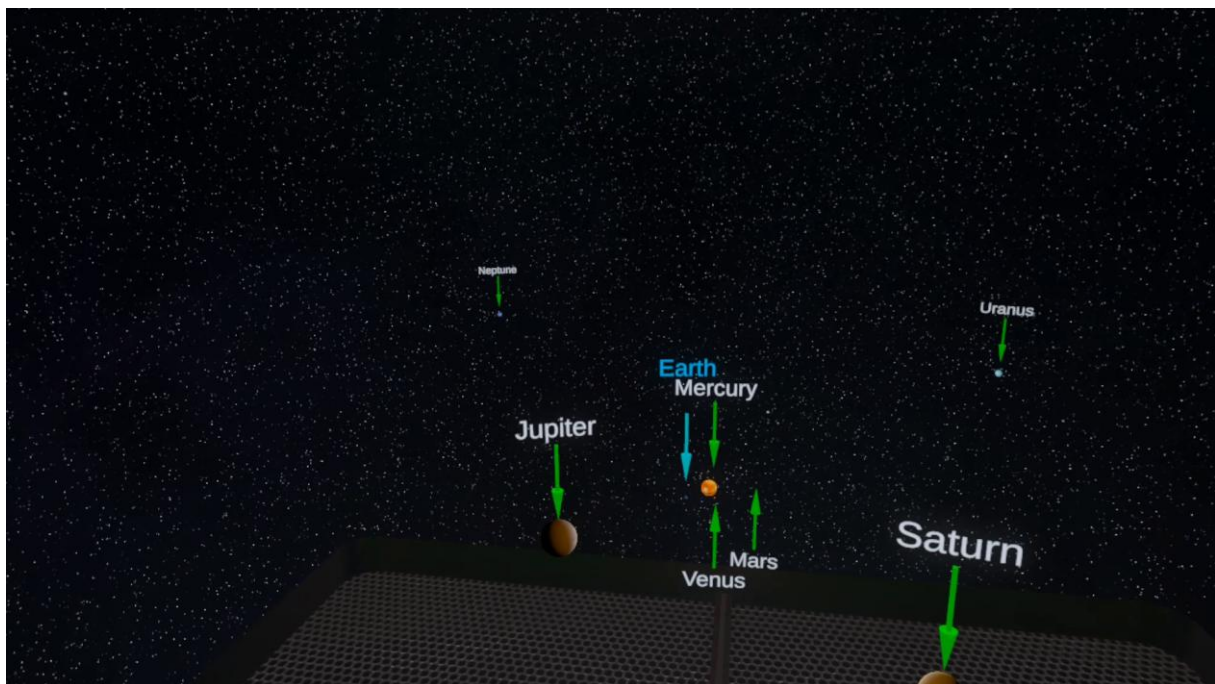


- **Õpeetsenaarium 1:** Püramiidide ruudustik
- **Õpeetsenaarium 2:** Püramiidi ruumala

## Moodul 9: Planeedisüsteem

See moodul tutvustab õpilastele planeedisüsteemide mehaanikat ja geomeetriat. Õpilased uurivad, kuidas planeedid tiirlevad ümber kesktähe, keskendudes jõudude, trajektooride ja orbiitide kuju vastasmõjule. Interaktiivseid vahendeid kasutades visualiseerivad nad planeetide orbiite 3D-ruumis ja reguleerivad selliseid parameetreid nagu orbiidi raadius, ekstsentrilisus ja kiirus. Moodul rõhutab planeetide liikumise põhiliste seaduste, näiteks Kepleri kirjeldatud seaduste mõistmist, süvenemata liigselt keerulisse matemaatikasse. Õpilased näevad, kuidas orbiidid võivad olla elliptilised või ringikujulised ja kuidas gravitatsioon neid liikumisi reguleerib.

Joonisel on kujutatud Päikesesüsteemi planeetide visualiseerimine.

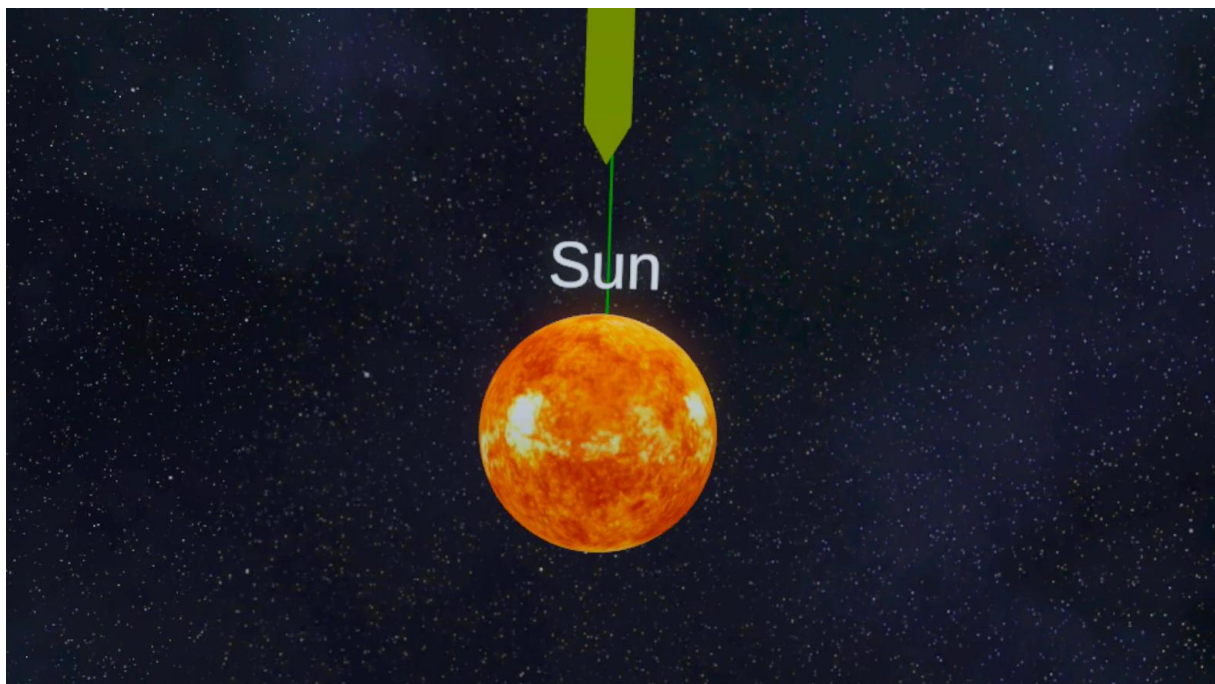


- **Õpeptsenaarium 1:** Kaugused Päikesesüsteemis
- **Õpeptsenaarium 2:** Koguste võrdlus Päikesesüsteemis

## Moodul 10: Päikesesüsteemi uurimine

Moodul tutvustab õpilastele kauguse teemat kosmosesõidus. Õpilased uurivad Päikesesüsteemi, liikudes planeetide vahel, kasutades inimkonnale teadaolevaid kiirusi: teine kosmiline kiirus (või põgenemiskiirus), kõrgeim kiirus Apollo 11 missiooni ajal, Parker Solar Probe kiirus, 1/100 valguse kiirusest, valguse kiirus. Õpilased õpivad, kui kaua kulub aega planeetide vahel reisimiseks ja kuidas mõjutab seda gravitatsioon. Teekond Päikeselt Maale valguse kiirusega kestab üle 8 minuti ja kui me lõpuks näeme meie planeeti, kaob see hetkega. See näitab, kui väike on Maa võrreldes läbitud vahemaaga.

Joonisel on kujutatud Päike Päikesesüsteemis.

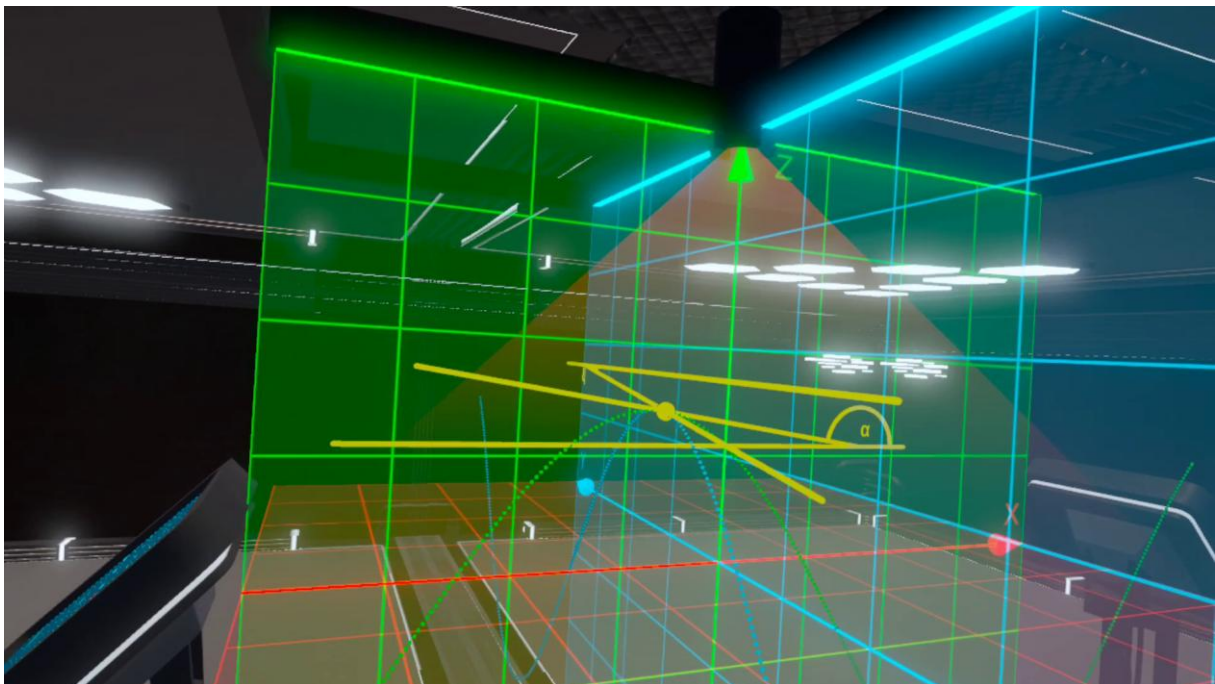


- **Õpeplansenaarium 1:** Kosmoseuuringud - põhimõisted
- **Õpeplansenaarium 2:** Kosmose vallutamine

## Moodul 11: Osaliste tuletiste geomeetiline tõlgendamine

Selles moodulis uurivad õpilased sound- geomeetrilist tähendust mitmemõõtmelises arvutuses. Suundderiivatiivid väljendavad funktsiooni muutumise kiirust kindlaksmääratud suunas, samas kui osalised tuletised mõõdavad muutusi piki ühte telge. Interaktiivsete 3D-visualiseerimiste abil jälgivad õpilased, kuidas funktsiooni kalle muutub sõltuvalt suunast ja asendist. Moodul võimaldab õpilastel manipuleerida pindu ja vektoreid, et mõista, kuidas neid tuletisi arvutatakse ja rakendatakse. See praktiline lähenemisviis aitab ületada lõhet abstraktsete matemaatiliste valemite ja nende tegeliku tõlgendamise vahel.

Joonisel on kujutatud hologramm koos funktsiooni graafiku ja osalise tuletise visualiseerimisega

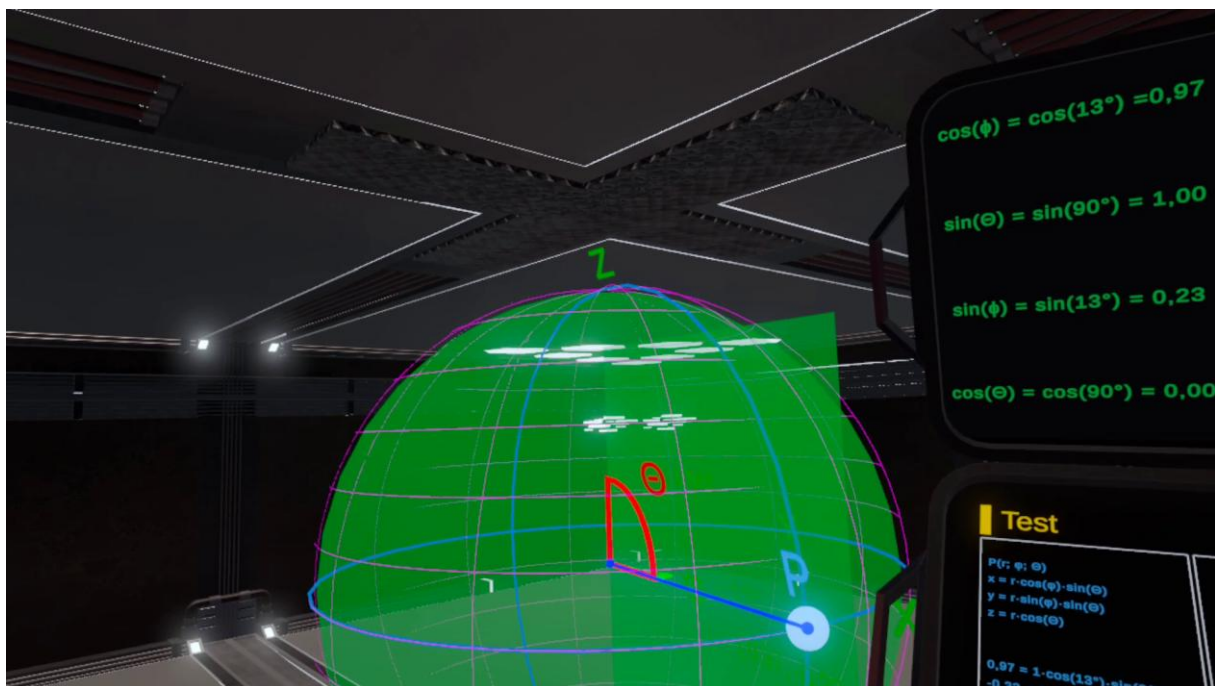


- **Õppestsenaarium 1:** Osaliste tuletiste geomeetiline tõlgendamine
- **Õppestsenaarium 2:** Osaliste tuletiste arvutamine

## Moodul 12: Sfäärilised koordinaadid

Selles moodulis uurivad õpilased sfääriliste koordinaatide mõistet, mis on süsteem, mida kasutatakse punktide kirjeldamiseks kolmemõõtmelises ruumis. Erinevalt kartesiaanlikest koordinaatidest määravad sfäärilised koordinaadid punkti asukohta kolme väärtuse abil: radiaalkaugus ( $r$ ), polaarnurk ( $\theta$ ) ja asümtaalnurk ( $\phi$ ). See koordinaatsüsteem on eriti kasulik probleemide puhul, mis on seotud sümmeetriaga keskse punkti ümber, näiteks füüsikas või tehnikas. Moodul sisaldab interaktiivseid visualiseeringuid, kus õpilased saavad neid parameetreid manipuleerida, et näha, kuidas punkti asukoht 3D-ruumis muutub. Lisaks harjutatakse kartesiaanlike ja sfääriliste koordinaatide vahelist teisendamist ning ülesannete lahendamist, mis hõlmavad funktsioonide integreerimist sfääriliste piirkondade üle.

Joonisel on kujutatud hologramm koos sfääriliste koordinaatide visualiseerimisega.



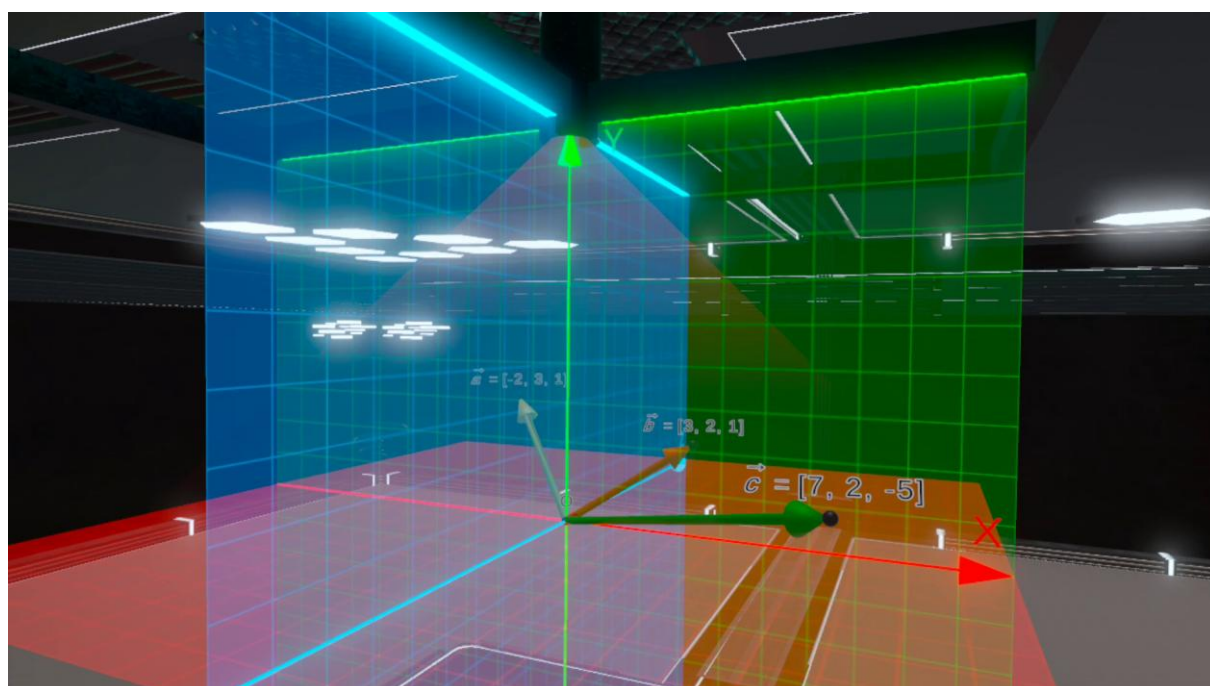
- Õpestsenaarium 1: Polaarkoordinaadid
- **Õpestsenaarium 2:** Sfäärilised koordinaadid



## Moodul 13: Vektorid, operatsioonid vektoritega

See moodul tutvustab õpilastele vektoreid ja nendega tehtavaid põhilisi operatsioone. Vektorid on matemaatilised objektid, millel on nii suurus kui ka suund, mistõttu on nad olulised vahendid füüsikaliste suuruste ja ruumiliste seoste kirjeldamiseks. Õpilased uurivad põhilisi vektoroperatsioone, nagu liitmine, lahutamine, skalaarkordistamine ja normaliseerimine, ning õpivad, kuidas arvutada vektori suurust. Moodul pakub interaktiivseid visualiseeringuid, kus õpilased saavad manipuleerida vektoritega 2D- ja 3D-ruumis, jälgida operatsioonide mõju ja mõista nende geomeetrilisi tõlgendusi.

Joonisel on kujutatud hologramm koos vektoritega 3D-ruumis.



- **Õpestsenaarium 1:** Vektorite geomeetiline tõlgendamine kolmemõõtmelises ruumis, operatsioonid vektoritega
- **Õpestsenaarium 2:** Skalaarproduktsioon, vektorproduktsioon kolmemõõtmelises ruumis

# Moodul 1: Trajektoor

## Õppestsenaariumid koos VR-rakendustega

### Õppestsenaarium 1

#### Tunni pealkiri

#### Ühe muutuja trigonomeetriliste funktsioonide graafikud

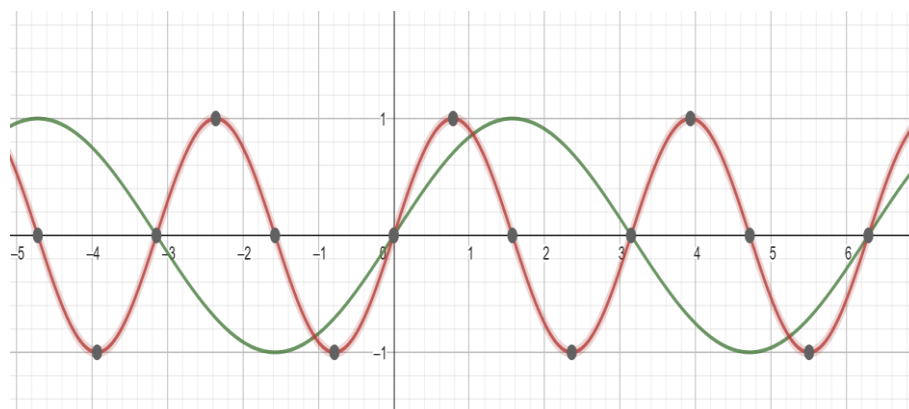
#### Õpiväljundid

- Joonistab funktsiooni  $f(x) = a\sin(x - b) + c$  graafiku.
- Tõlgendab parameetrida,  $b, c$  funktsiooni  $f(x) = a\sin(x - b) + c$  jaoks.

#### Õppetöö käik

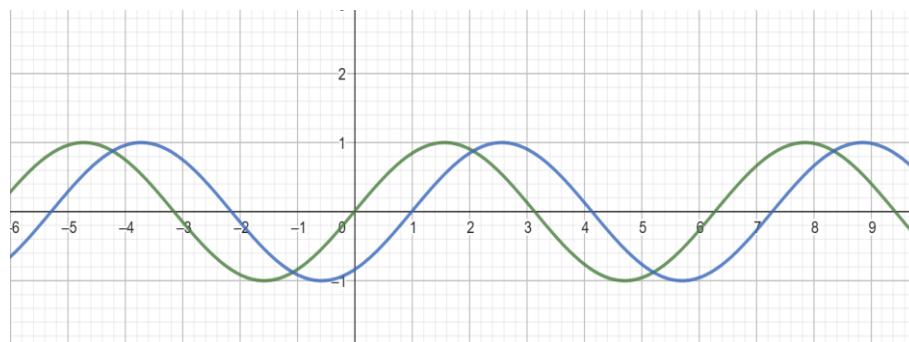
##### 1. samm.

Joonistage funktsioonidesin(x) jasin(2x) graafikud. Arutlege, kuidas koefitsienta mõjutab funktsioonif(x) = sin(ax) graafikut.



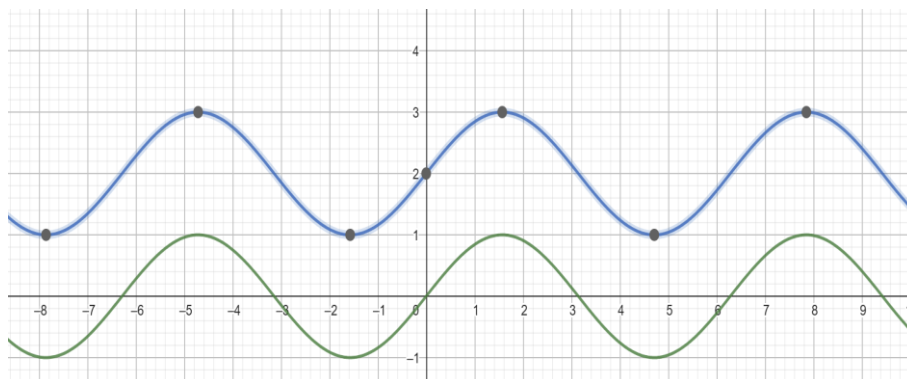
##### 2. samm.

Joonistage funktsioonidesin(x) jasin(x - 1) graafikud. Arutlege, kuidas koefitsienta mõjutab funktsioonif(x) = sin(x - a) graafikut.



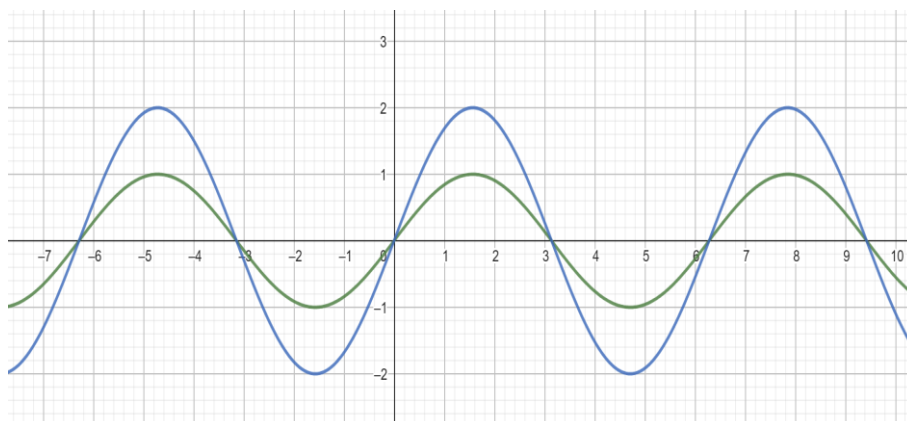
##### 3. samm.

Joonistage funktsioonidesin(x) ja sin(x) + 2 graafikud. Arutlege, kuidas koefitsienta mõjutab funktsioonif(x) = sin(x) + a graafikut.



4. samm.

Joonistage funktsioonidesin(x) ja 2 · sin(x) graafikud. Arutlege, kuidas koefitsienta mõjutab funktsioonif(x) = a · sin(x) graafikut.



5. samm.

Korrake samme 1, 2, 3 ja 4 funktsioonicos(x) jaoks.

6. samm.

Joonistage funktsioonif(x) = 2sin(x - 1) + 2 graafik.

Milliseid küsimusi peaksin esitama, et õpilased saaksid oma mõtteid jagada?

Kuidas muutub funktsiooni väärtuste hulkf(x) = asin(x - b) + c sõltuvalt parameetritest ?a, b, c

## Õppeetsenaarium 2

Tunni pealkiri

Vektorväärtusega funktsioon

Õpiväljundid

- Kasutab vektorväärtusega funktsiooni.

- Analüüsib vektorväärtusega funktsiooni.

Õppetöö käik

1. samm.

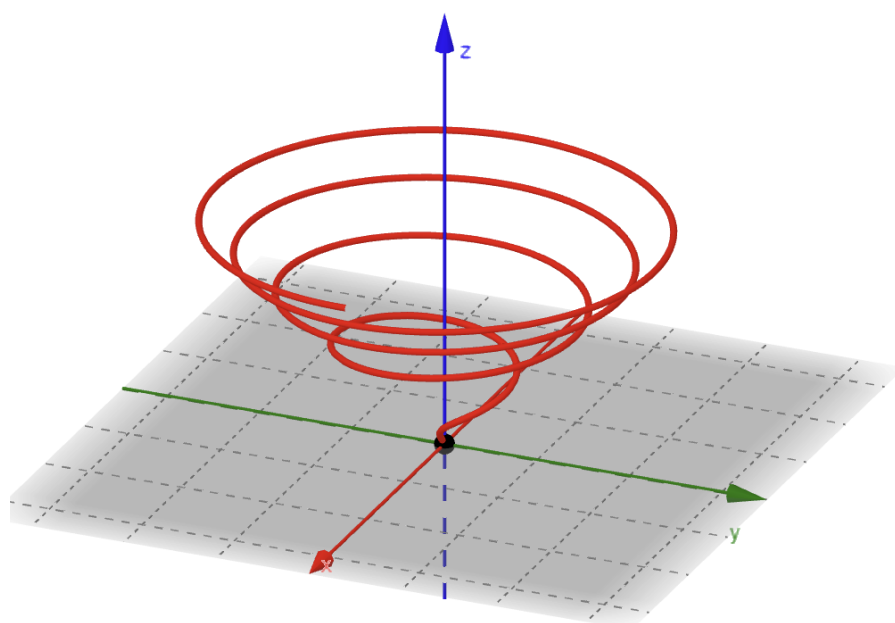
Kolme koordinaadiga vektorfunktsiooni definitsiooni tutvustamine.

Kolme koordinaadiga vektorfunktsiooni nimetatakse funktsiooniks kujul  $f(t) = [x(t), y(t), z(t)]$ , kus  $x(t), y(t), z(t)$  on muutujat skalaarfunktsioonid.

Funktsiooni näited.

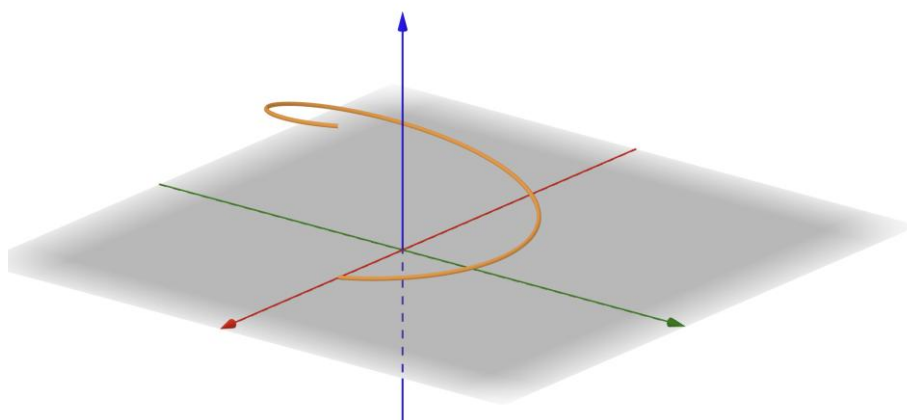
2. samm.

Funktsioon on antud parameetriselt  $[t, \sqrt{t} \sin(t), \sqrt{t} \cos(t)]$ , kust on suvaline reaalarv.



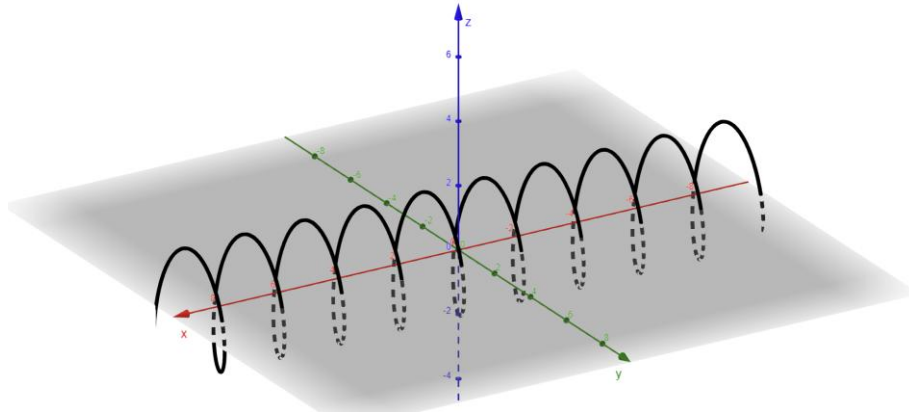
3. samm.

Funktsioon on antud parameetriselt  $[2 \cos(t), 3 \sin(t), t]$ , kust on suvaline reaalarv.



## 4. samm.

Funktsioon on antud parameetriliselt  $[t, \sin(\pi t), \cos(\pi t)]$ , kust on suvaline reaalarv.



## 5. samm.

Joonistage funktsiooni  $[t, 0, t^2]$  graafik.

## 6. samm.

Analüüsige funktsiooni  $[t, a_1 \sin(t) + b_1 \cos(t), a_2 \sin(t) + b_2 \cos(t)]$

Milliseid küsimusi peaksin esitama, et õpilased saaksid oma mõtteid jagada?

Kuidas tutvustada funktsiooni mõistet, mille väärtused on  $n$  -mõõtmelised vektorid?

## Ettepanekud ja nõuanded õpetajatele

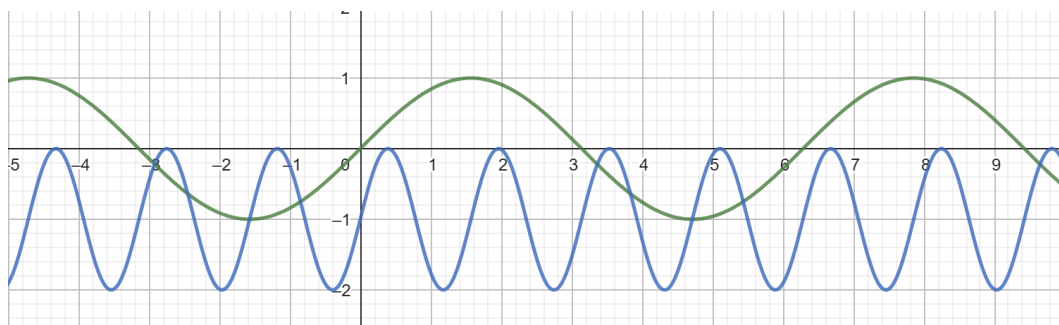
1. Küsimus õpilastele: Kuidas tutvustada vektorfunktsiooni tuletise mõistet?
2. Küsimus õpilastele: Kuidas tutvustada kahe muutuva vektorfunktsiooni mõistet?
3. Tutvustage vektorfunktsiooni pööramise mõistet ja näidake selle rakendusi.
4. Vektorfunktsioonide joonistamiseks saate kasutada programmi WOLFRAM.

## Töölehed õpilastele

### Harjutus 1.

Joonistage funktsiooni  $f(x) = \sin(4x) - 1$  graafik.

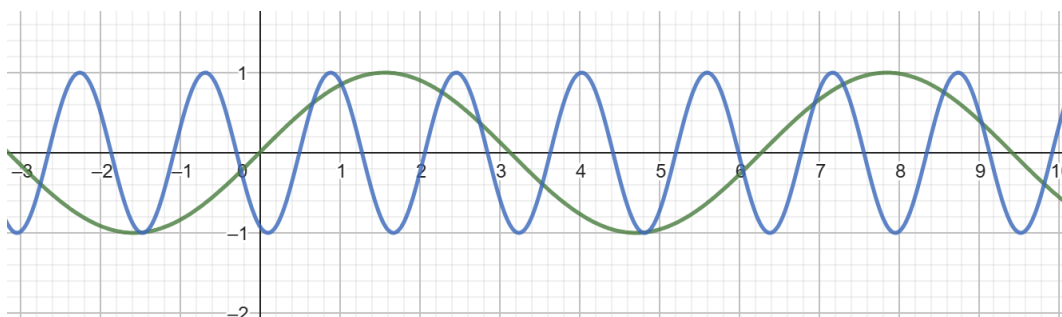
## Lahendus



## Harjutus 2.

Joonistage funktsioonif  $f(x) = \sin(4x - 2)$  graafik.

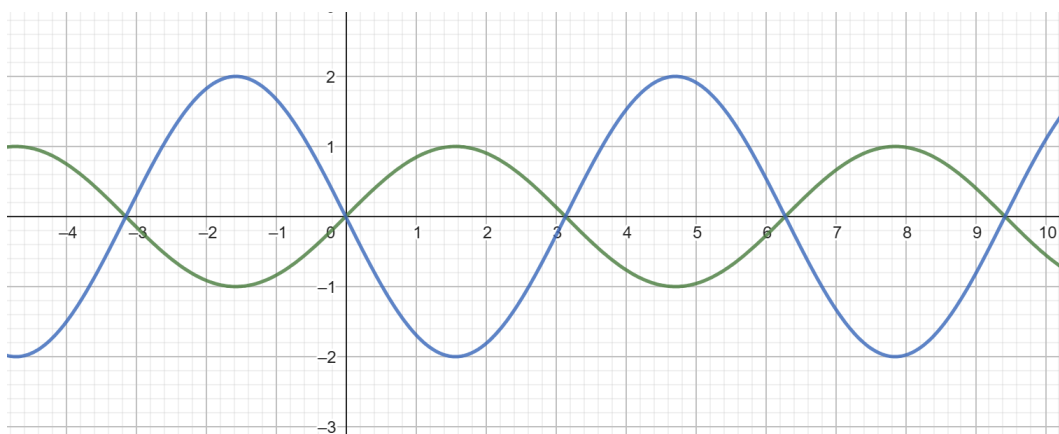
## Lahendus



## Harjutus 3.

Joonistage funktsioonif  $f(x) = -2 \sin(x)$  graafik.

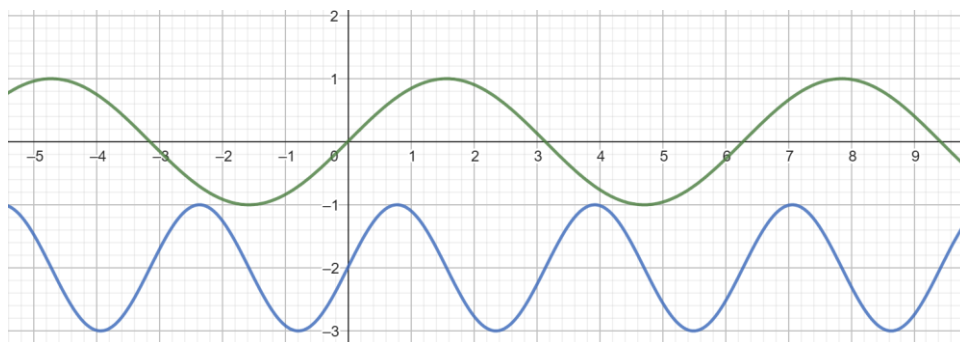
## Lahendus



## Harjutus 4.

Joonistage funktsioonif  $f(x) = -\sin(2x) + 1$  graafik.

## Lahendus



## Harjutus 5.

Määrake vektorfunktsiooni  $f(t) = [\sqrt{t}, t, \frac{1}{t-2}]$  domeen.

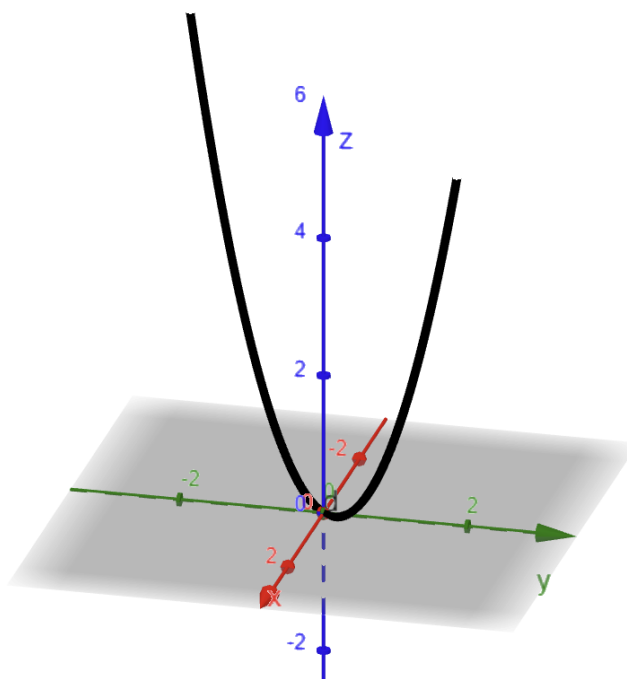
## Lahendus

$t \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$ .

## Harjutus 6.

Joonistage vektorfunktsiooni  $f(t) = [t, t, t^2]$  graafik  $t \in (-3, 3)$  jaoks.

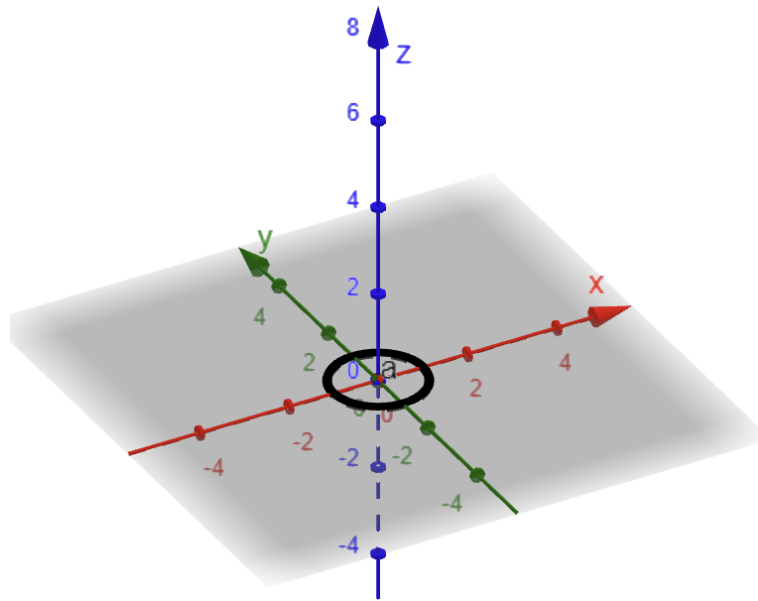
## Lahendus



## Harjutus 7.

Joonistage vektorfunktsiooni  $f(t) = [\sin(t), \cos(t), 0]$  graafik  $t \in (0, 2\pi)$  jaoks.

Lahendus



Harjutus 8.

Arvutage vektorfunktsioonif  $f(t) = [t, 2 \sin(t) + \cos(t), \sin(t) - \cos(t)]$  väärtust  $t = 0$  jaoks.

Lahendus

$$f(t) = [0, 1, -1].$$



## Moodul 2: Nurgad kuubis

### Õppestsenaariumid koos VR-rakendustega

#### Õppestsenaarium 1

Tunni pealkiri

Nurgad kuubis

Õpiväljundid

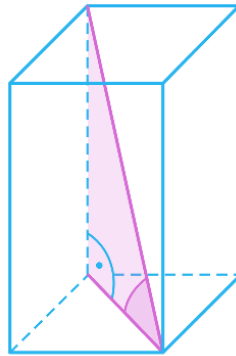
- Tunneb ära kuubi nurgad.

Õppetöö käik

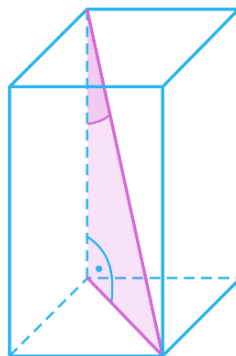
1. samm.

Mõistete tutvustamine.

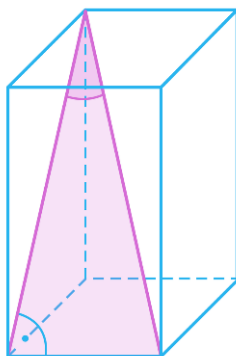
Kuubiku diagonaali ja aluse diagonaali vaheline nurk.



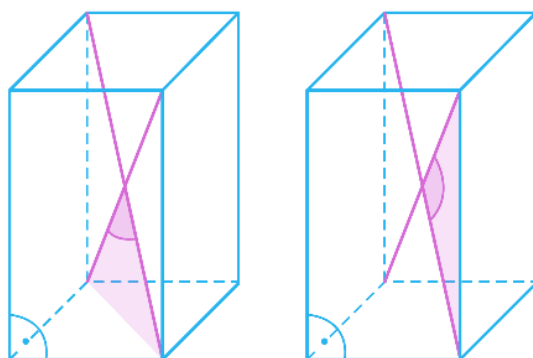
Kuubiku diagonaali ja külgserva vaheline nurk.



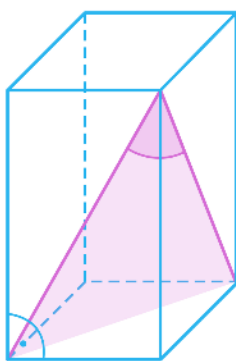
Kuubiku diagonaali ja külgpinna diagonaali vaheline nurk.



Kuubiku diagonaalide vaheline nurk.

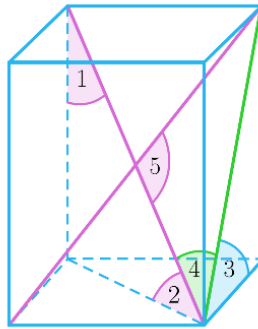


Kõrvalolevate külgseinte diagonaalide vaheline nurk.



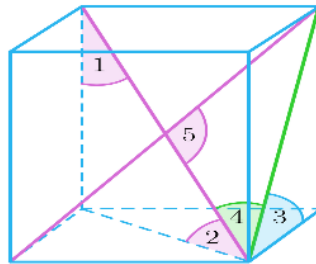
2. samm.

Nimetage iga nurk: 1, 2, 3, 4 ja 5.



3. samm.

Määrake kuubiku kõigi nurkade mõõtmed



Milliseid küsimusi peaksin esitama, et õpilased saaksid oma mõtteid jagada?

Milline on kuubiku nurgaväärtuste 1, 2, 3 ja 4 vahemik? Milline on väikseim ja suurim nurga väärtus

## Õppeetsenaarium 2

Tunni pealkiri

Serva pikkuse, pindala ja ruumala arvutamine kuubikujulises ruumis

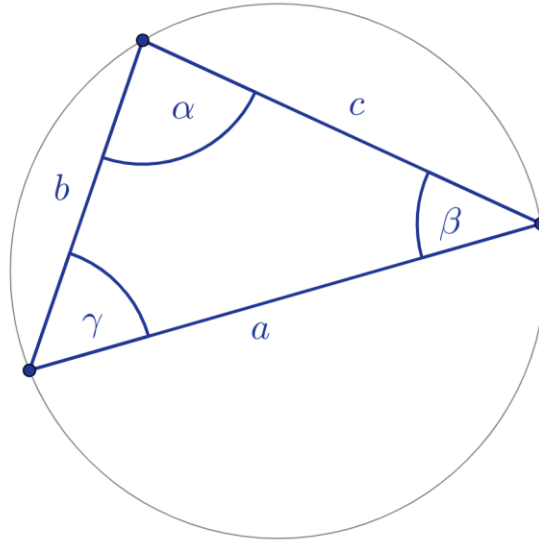
Õpiväljundid

- Kasutab kuubiku nurkasid, et arvutada: serva pikkus, pindala, ruumala

Õppetöö käik

1. samm.

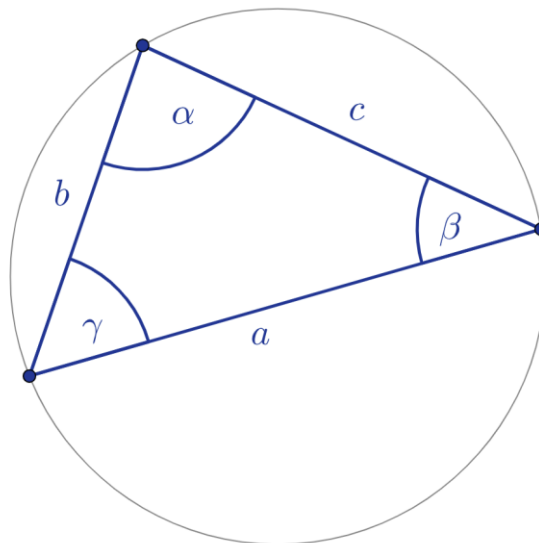
Tuletame meelde sinuse teoreemi.



$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

2. samm.

Kosinusteoreemi meeldetuletus.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$$

Täitke ülejäänud sõltuvused:

$$b^2 = a^2 + \dots^2 - 2 \dots \cos(\dots)$$

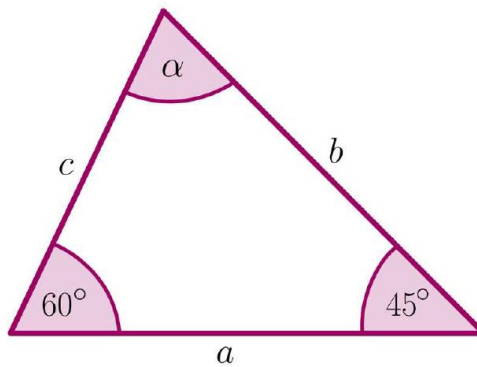
$$c^2 = a^2 + \dots^2 - 2 \dots \cos(\dots)$$

3. samm.

Arvutused, kasutades siinus- ja kosinuse teoreemi.

## Harjutus 1.

Arvutage lõigu pikkus  $b$ , kui  $c = 5$

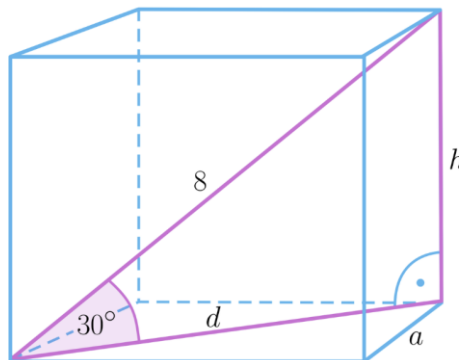


## 4. samm.

Serva pikkuse, pindala ja ruumala arvutused kuubiku puhul.

## Harjutus 2.

Arvutage kuubiku kogupindala ja -maht, kui alus on ruudukujuline.



Milliseid küsimusi peaksin esitama, et õpilased saaksid oma mõtteid jagada?

Millistes olukordades kasutatakse siinuste teoreemi ja millistes olukordades kosinuste teoreemi?

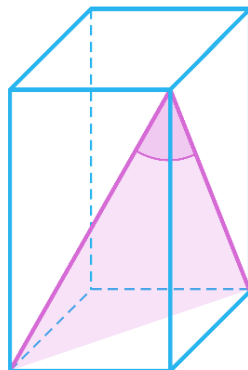
## Ettepanekud ja nõuanded õpetajatele

1. Küsimus õpilastele: Kas on võimalik tõestada Pythagorase teoreemi, kasutades kosinuste teoreemi?
2. Küsimus õpilastele kui nende enda töö: Kuidas kasutatakse prisma nurki arhitektuuris?
3. Kas on võimalik konstrueerida prisma, mille kõik nurgad külgservade ja aluste vahel on võrdsed? Põhjendage.
4. Trigonomeetrilisteks arvutusteks saate kasutada programmi WOLFRAM.

## Töölehed õpilastele

### Harjutus 1.

Nimetage nurk



Lahendus

Kuubiku külgpindade diagonaalide vaheline nurk.

### Harjutus 2.

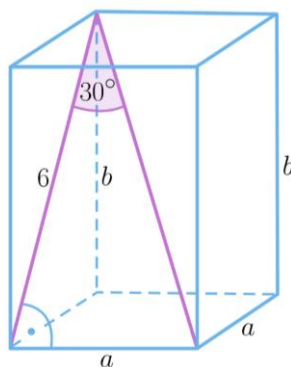
Arvutage kuubiku ruumala  $\alpha = 45^\circ$

Lahendus

$$V = 48\sqrt{2}.$$

### Harjutus 3.

Joonisel kujutatud kuubiku ruumala on  $48\sqrt{3}$ . Arvutage kuubiku mõõtmed.

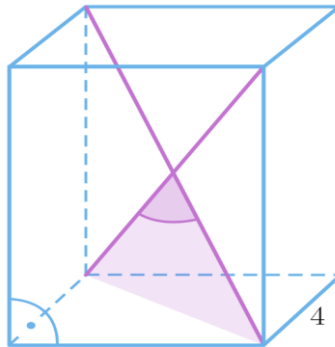


Lahendus

$$a = 2\sqrt{6}, .b = 2\sqrt{3}$$

### Harjutus 4.

Kuubiku külje pikkus on 4 . Määrake joonisel märgitud nurga košinusemõõt.



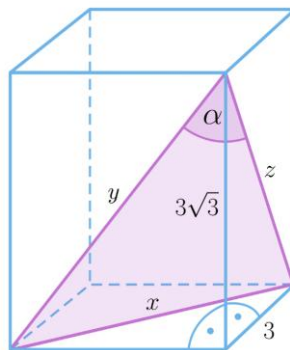
Lahendus

$$\cos(\alpha) = \frac{-2}{3}$$

### Harjutus 5.

Joonisel kujutatud kuubi alus on  $3 \times 3$  ja külgserva  $3\sqrt{3}$  . Määrake kuubiku kõrvuti asetsevate külgpindade diagonaalide vahelise nurga mõõt.

Lahendus

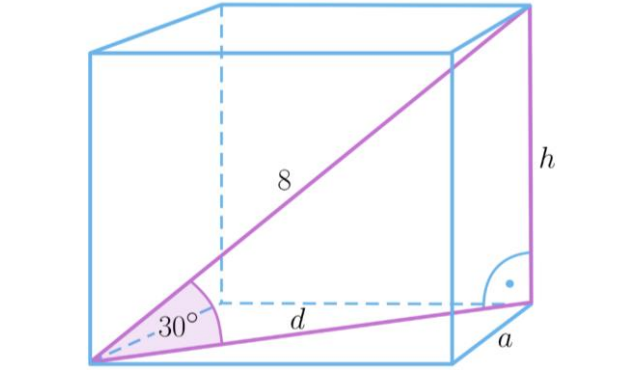


Pange tähele, et  $y = x$  ja  $x = 3\sqrt{2}$  . Kasutades kosinuse teoreemi kolmnurga jaoks, mille küljed  $x, y, z$ , saame  $\cos(\alpha) = \frac{45}{72}$

### Harjutus 6.

Ruudukujulise alusega kuubiku diagonaal on pikkusega 8 ja kallutatud aluse tasapinna suhtes nurga all  $30^\circ$ . Arvutage kuubiku servade mõõtmed.

Lahendus

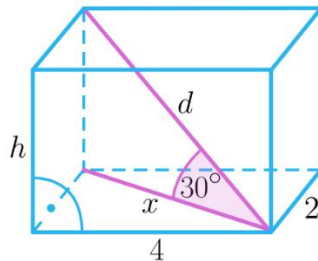


$$\frac{h}{8} = \sin(30^\circ) = \frac{1}{2}, \text{ seega } h = 4 \text{ ja } d = 4\sqrt{3}. \text{ Seega } a = 2\sqrt{6}$$

### Harjutus 7.

Kuubiku servade pikkused on 4, 2,  $h$ . Määrake kuubiku diagonaali pikkus, kui kuubiku diagonaali ja kuubiku aluse diagonaali vaheline nurk on  $30^\circ$

Lahendus



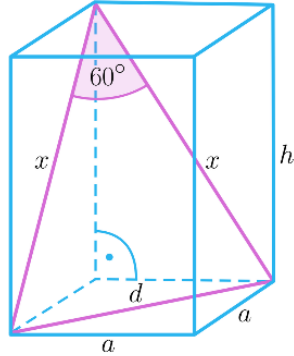
Kasutades Pythagorase teoreemi, määrax  $x = 2\sqrt{5}$ . Kuna  $\frac{x}{d} = \cos(30^\circ)$ , siis  $d = \frac{4}{3}\sqrt{15}$



### Harjutus 8.

Antud on ruudukujulise alusega kuubik. Tõestage, et kuubik on kuubik, kui kõrvuti asetsevate külgede diagonaalide vaheline nurk on  $60^\circ$

Lahendus



Kolmnurk  $x, x, d$  on võrdkülgne, seega  $x = \frac{d}{\sqrt{2}}$ . Kasutades Pythagorase teoreemi kolmnurga jaoks, mille küljed on  $x, a, h$ , saame, et  $h = a$

## Moodul 3: Püramiidi nurgad

### Õppestsenaariumid koos VR-rakendustega

#### Õppestsenaarium 1

Tunni pealkiri

Püramiidid ja kogupindala

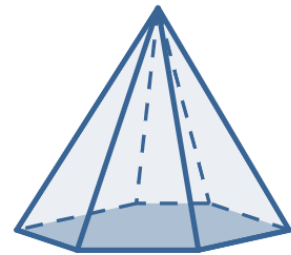
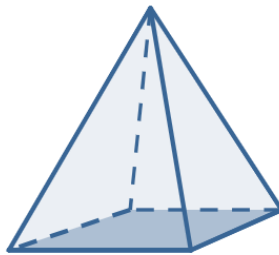
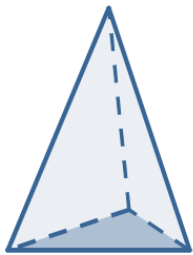
Õpiväljundid

- Määratakse püramiidi maht ja kogupindala .

Õppetöö käik

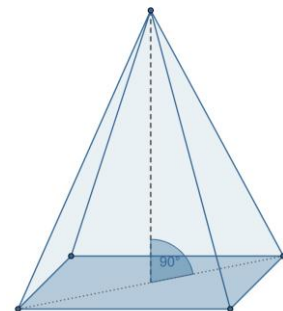
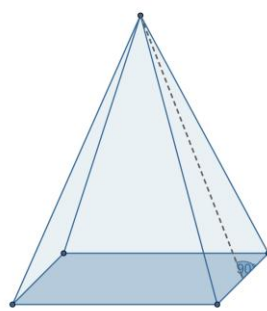
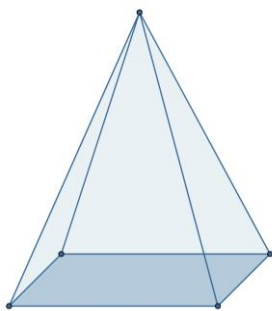
1. samm.

Põhipüramiidide määratluse tutvustamine, mis on jaotatud vastavalt alusele.



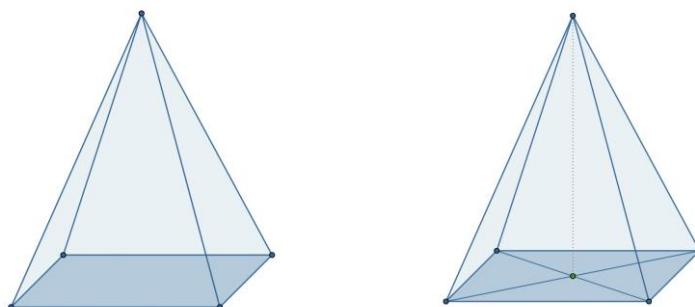
2. samm.

Joonistatakse külgliseina kõrgus ja püramiidi kõrgus.



3. samm.

Püramiidi aluse diagonaalide joonistamine.



4. samm.

Püramiidi kogupindala valemite arutelu .

Milliseid küsimusi peaksin esitama, et õpilased saaksid oma mõtteid jagada?

Milline on prisma ja sama põhja ja võrdse kõrgusega püramiidi ruumala suhe?

## Õppestsenaarium 2

Tunni pealkiri

Püramiidi nurgad

Õpiväljundid

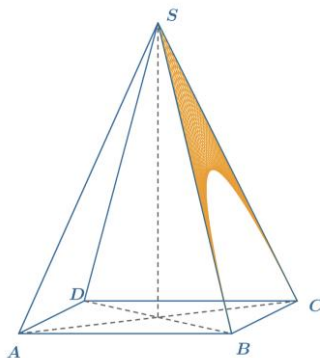
- Tunneb ära püramiidi nurgad.

Õppetöö käik

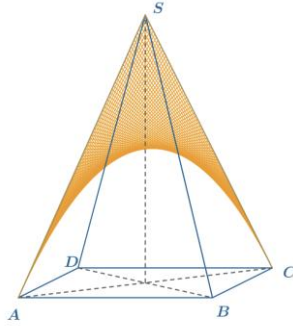
1. samm.

Püramiidi servade vaheliste nurkade määratluse tutvustamine.

Külgmiste servade vaheline nurk.



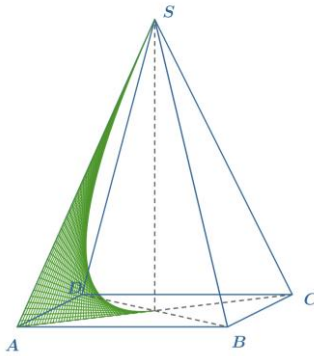
Vastaskülgede vaheline nurk.



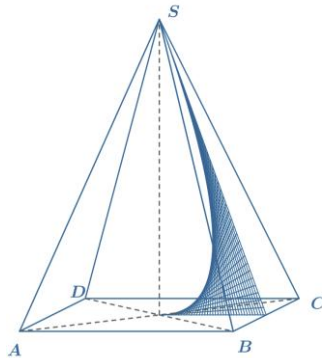
2. samm.

Püramiidi ülejäänud nurkade määratluse tutvustamine.

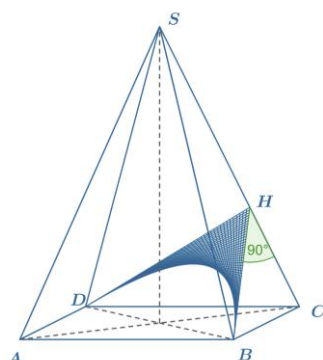
Nurk külkseina serva ja aluse diagonaali vahel.



Külkseina kaldenurk aluse suhtes.



Kõrvalolevate külgseinte vaheline nurk.



3. samm.

Tetraeedri kõigi nurkade väärtuste määramine.

Milliseid küsimusi peaksin esitama, et õpilased saaksid oma mõtteid jagada?

Kuidas määrata tetraeedri poolt piiritletud kera raadiust?

## Ettepanekud ja nõuanded õpetajatele

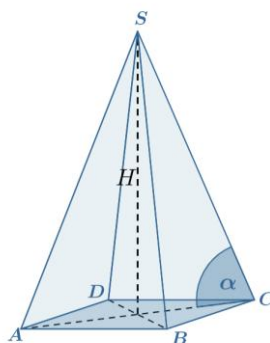
1. Ettepanek õpilastele: püramiidi nimetatakse sirgeks, kui selle külgmised servad on võrdsed
2. Ettepanek õpilastele: püramiidi nimetatakse tetraeedriks, kui kõik selle külgmised küljed on võrdkülgse kolmnurgad.
3. Küsimus õpilastele: Joonistage prismade võrgud.
4. Püramiidide mahu arvutamiseks saate kasutada programmi WOLFRAM.

## Töölehed õpilastele

### Harjutus 1.

Antud on korrapärane nelinurkne püramiid. Põhiserva pikkus on 6 ja kõrgus on  $3\sqrt{2}$ . Arvutage nurk külgserva ja alusplaadi vahel.

Lahendus

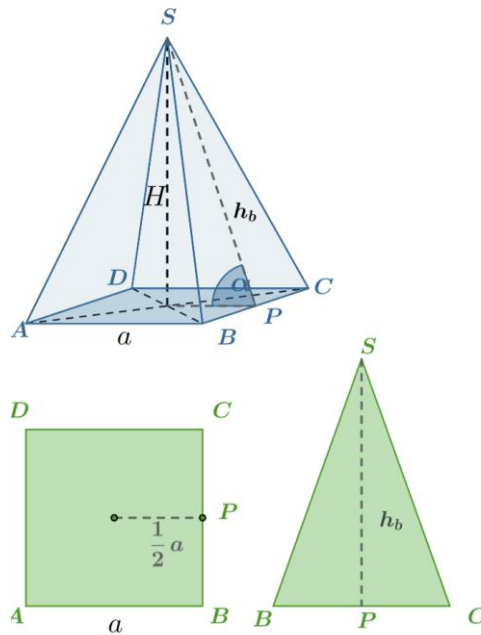


$$|\overline{AC}| = 6\sqrt{2}. \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{H}{\frac{|\overline{AC}|}{2}} = 1. \text{ Seega } \alpha = 45^\circ$$

### Harjutus 2.

Antud on korrapärane nelinurkne püramiid. Põhiserva pikkus on 6 ja kõrgus on  $3\sqrt{2}$ . Arvutage küljeseina ja aluse tasapinna vahelise nurga puutuja.

Lahendus

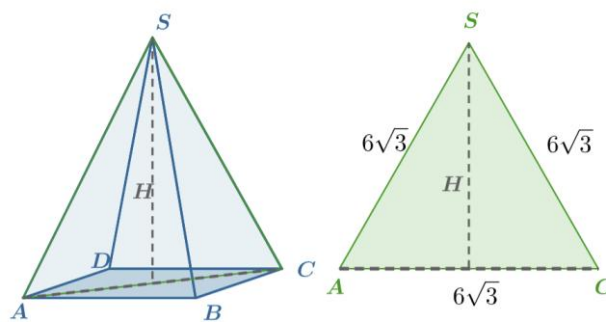


$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{H}{\frac{1}{2}a} = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}.$$

### Harjutus 3.

Antud on korrapärane nelinurkne püramiid. Põhiserva pikkus on  $3\sqrt{6}$  ja küljeservade pikkus on  $6\sqrt{3}$ . Arvutage püramiidi kõrgus.

Lahendus

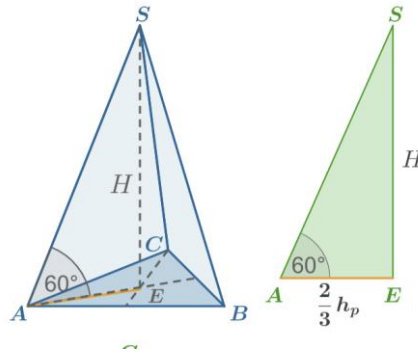


$$H = 9.$$

### Harjutus 4.

Antud on korrapärane kolmnurkne püramiid. Põhiserva pikkus on  $a = 3\sqrt{3}$  ja nurk külgserva ja põhitasandi vahel on  $60^\circ$ . Arvutage püramiidi kõrgus.

Lahendus



$$h_p = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{2}. \text{ Seega } H = \frac{2}{3}h_p \operatorname{tg}(60^\circ) = 3\sqrt{3}$$

### Harjutus 5.

Arvutage korrapärase tetraeedri kõrgus, mille serva pikkus on 3.

Lahendus

$$\sqrt{6}.$$

### Harjutus 6.

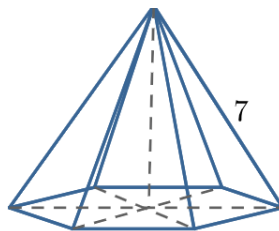
Püramiidi kolm külge on võrdhaarne täisnurkne kolmnurk, mille küljepikkus on 1. Arvutage neljanda külje pindala.

Lahendus

$$\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

### Harjutus 7.

Joonisel kujutatud parema kuusnurkse püramiidi aluspindala on  $\frac{75\sqrt{3}}{2}$ . Arvutage külgserva ja baastasapinna kaldenurga košinus.

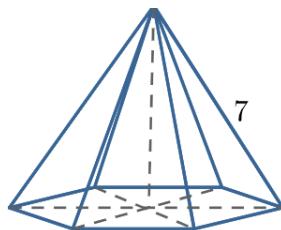


Lahendus

$$P = \frac{75\sqrt{3}}{2} = 6 \frac{a^2\sqrt{3}}{4}. \text{ Seega } a = 5 \text{ ja } \sin(\alpha) = \frac{5}{7}$$

## Harjutus 8.

Joonisel kujutatud parema kuusnurkse püramiidi aluspindala on  $\frac{75\sqrt{3}}{2}$ . Arvutage selle püramiidi kõrgus.



## Lahendus

$P = \frac{75\sqrt{3}}{2} = 6 \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ , seega  $a = 5$ . Pythagorase teoreemi järgi on  $H^2 = 7^2 - 5^2$ , seega  $H = 2\sqrt{6}$



## Moodul 4: Mitte-eukleidiline geomeetria

### Õppestsenaariumid koos VR-rakendustega

#### Õppestsenaarium 1

Tunni pealkiri

Eukleidiline geomeetria

Õpiväljundid

- Teab eukleidilise geomeetria aksioomi.

Õppetöö käik

1. samm.

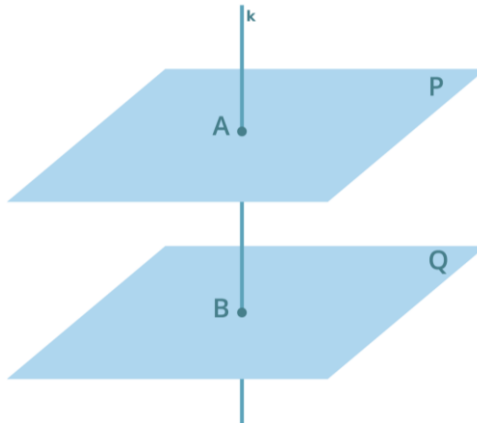
Geomeetria põhimõistete tutvustamine: punkt, joon, tasapind.

2. samm.

Eukleidilise geomeetria aksioomide õppimine.

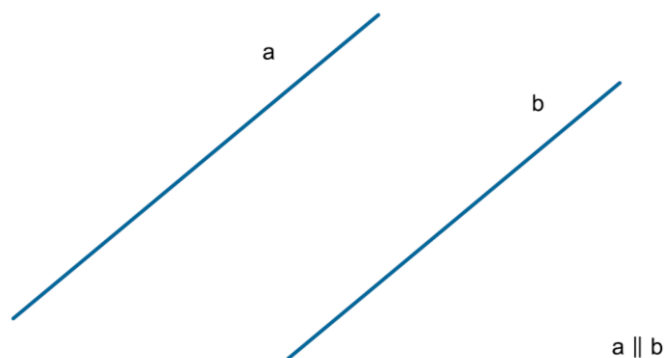
3. samm.

Arutelu tasandite asendi üle kolmemõõtmelises ruumis, nt paralleelsed tasandid



4. samm.

Kahe joone asendi arutamine tasapinnal, nt paralleelsed jooned.



5. samm.

Arutelu joone ja punkti asukoha üle tasapinnal ja ruumis.

6. samm.

Tasandi ja punkti asukoha arutamine ruumis.

Milliseid küsimusi peaksin esitama, et õpilased saaksid oma mõtteid jagada?

Milline on kahe joone asukoht kolmemõõtmelises ruumis?

## Õppestsenaarium 2

Tunni pealkiri

Mitte-eukleidilise geomeetria alused

Õpiväljundid

- Kasutab mitte-eukleidilist geomeetriat.

Õppetöö käik

1. samm.

Sissejuhatus mitte-eukleidilises geomeetrias, ajaloolised elemendid.

2. samm.

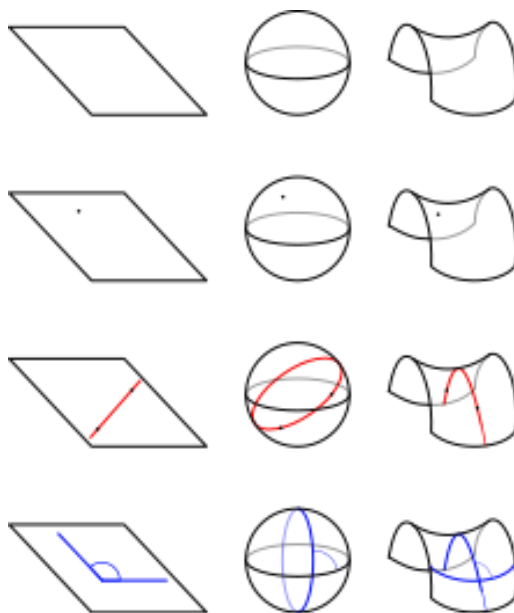
Arutelu elliptilise geomeetria eelduste üle.

3. samm.

Arutelu hüperboolse geomeetria eelduste üle.

## 4. samm.

Tasand, punkt, sirge, nurk eukleidilise, sfäärilise ja hüperboolse geomeetria tähenduses.



[https://pl.wikipedia.org/wiki/Geometria\\_nieuklidesowa](https://pl.wikipedia.org/wiki/Geometria_nieuklidesowa)

Milliseid küsimusi peaksin esitama, et õpilased saaksid oma mõtteid jagada?

Kas hüperboolses geomeetrias võib kolmnurga nurkade summa olla väiksem kui  $180^\circ$ ?

## Ettepanekud ja nõuanded õpetajatele

1. Küsimus õpilastele: Kuidas erineb mitte-eukleidiline geomeetria eukleidilisest geomeetriast?
2. Küsimus õpilastele: Kuidas näeb ring välja mitte-eukleidilises geomeetrias?
3. Matemaatikud, kes aitaksid kaasa mitte-eukleidilise geomeetria arendamisele.
4. Mõtteid mitte-eukleidilise geomeetria kasutamise kohta.

## Töölehed õpilastele

### Harjutus 1.

Mitu sirget, mis on paralleelsed antud sirgega, saab tõmmata läbi antud punkti?

Lahendus

Läbi antud punkti saab tõmmata ainult ühe antud sirgega paralleelse joone.

### Harjutus 2.

Mitu tasapinda, mis on paralleelsed antud tasapinnaga, saab läbi antud punkti tõmmata?

### Lahendus

Läbi antud punkti võib tõmmata ainult ühe tasapinna, mis on paralleelne antud tasapinnaga.

### Harjutus 3.

Mitu punkti määratleb selgelt tasandit?

### Lahendus

Kolm mittekolleaarset punkti.

### Harjutus 4.

Kuidas selgelt määrata tasandit kahe joone abil?

### Lahendus

Näiteks kasutades kahte joont, mis lõikuvad ühes punktis.

### Harjutus 5.

Mis võib olla joone ja tasandi ühine osa?

### Lahendus

Joone ja tasandi ühine osa võib olla: tühi hulk, punkt, joon.

# Moodul 5: Funktsioonide maksimumid ja miinimumid

## Õppestsenaariumid koos VR-rakendustega

### Õppestsenaarium 1

#### Tunni pealkiri

Kohalik miinimum ja maksimum: määratlus, geomeetriline tõlgendus

#### Õpiväljundid

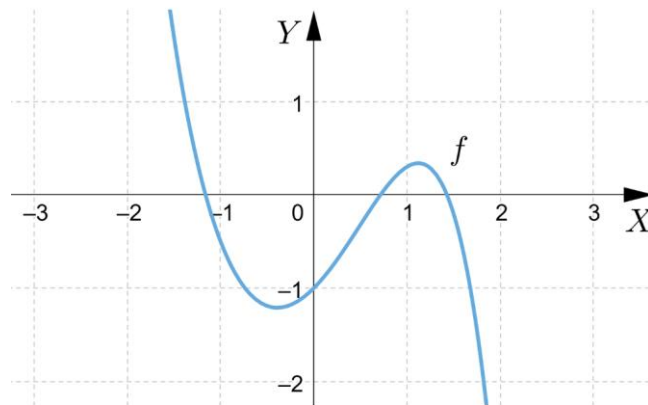
- Loeb kahe muutuja funktsioonide lokaalseid ekstreeme.
- Näitab erinevusi kahe muutuja ekstreemumi ja globaalse funktsiooni vahel.

#### Õppetöö käik

##### 1. samm.

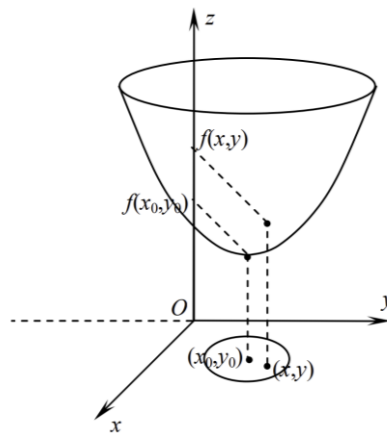
Ühe muutuja funktsiooni miinimumi ja maksimumi määratluse meeldetuletus.

Ühe muutuja funktsiooni kohaliku miinimumi ja maksimumi näitamine.



## 2. samm.

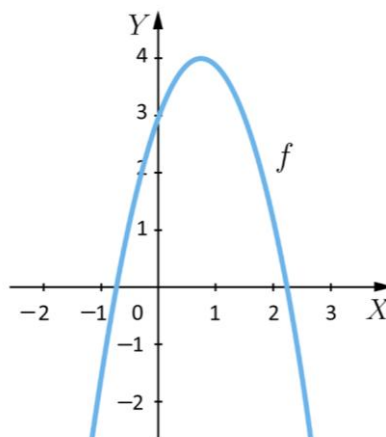
Kahe muutuja funktsiooni lokaalse miinimumi määratluse sõnastamine graafiku põhjal.



## 3. samm.

Mis vahe on kohalikul miinimumil ja globaalsel miinimumil?

Tooge näide. Põhjendus funktsioonide  $f$  ja  $x \in [-1, 3]$  graafiku põhjal.



## 4. samm.

Kahe muutuja funktsiooni globaalse miinimumi definitsiooni sõnastamine.

Milliseid küsimusi peaksin esitama, et õpilased saaksid oma mõtteid jagada?

Kas funktsioonil võib olla miinimum ja funktsiooni nullpunkt fikseeritud punktis?

## Õppeetsenaarium 2

Tunni pealkiri

Kahe muutuja funktsiooni ekstreemumi vajalikud ja piisavad tingimused

Õpiväljundid

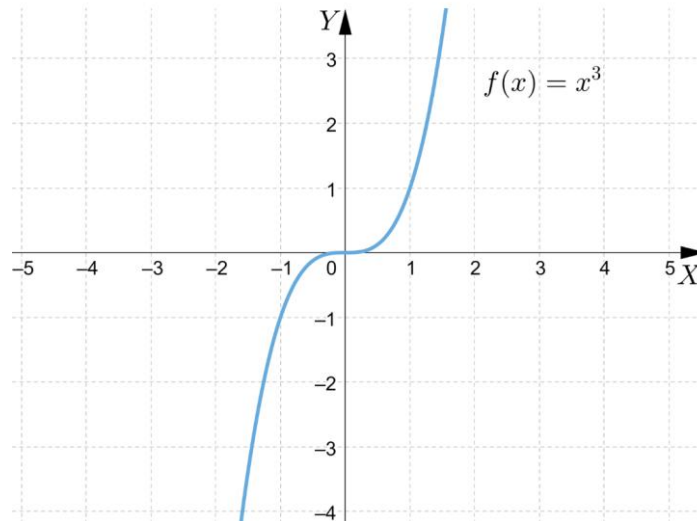
- Kasutab kahe muutuja funktsiooni ekstreemumi vajalikke ja piisavaid tingimusi.

Õppetöö käik

1. samm.

Ühe muutuja funktsiooni ekstreemumi vajaliku tingimuse meeldetuletus.

Kas funktsiooni  $y = x^3$  jaoks  $x = 0$  vastab funktsiooni ekstreemumi vajalikule tingimusele?



2. samm.

Meeldetuletus ühe muutuja funktsiooni ekstreemumi piisava tingimuse kohta.

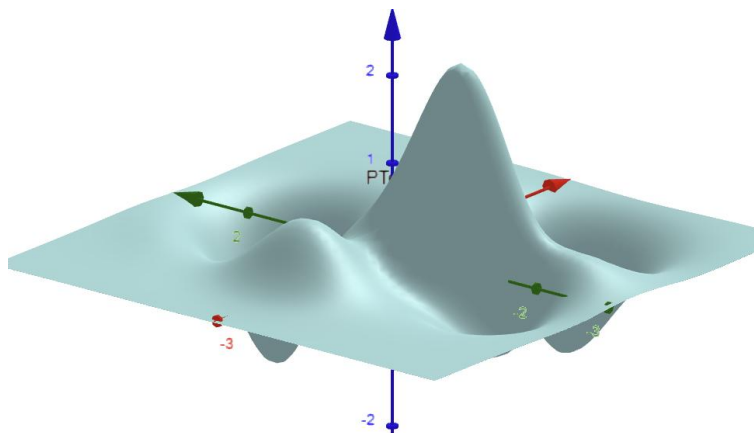
3. samm.

Kahe muutuja funktsiooni ekstreemumi vajaliku tingimuse formuleerimine.

4. samm.

Kahe muutuja funktsiooni ekstreemumi piisava tingimuse formuleerimine

Nende punktide näitamine, kus funktsioon vastab kahe muutuja funktsiooni ekstreemumi vajalikele ja piisavatele tingimustele.



## 5. samm.

Ühe ja kahe muutuja funktsioonide ekstreemumi vajalike ja piisavate tingimuste võrdlus.

Milliseid küsimusi peaksin esitama, et õpilased saaksid oma mõtteid jagada?

Kas on olemas funktsioon, mille esimese astme osalised tuletised puuduvad ja millel on selles punktis lokaalne ekstreemum?

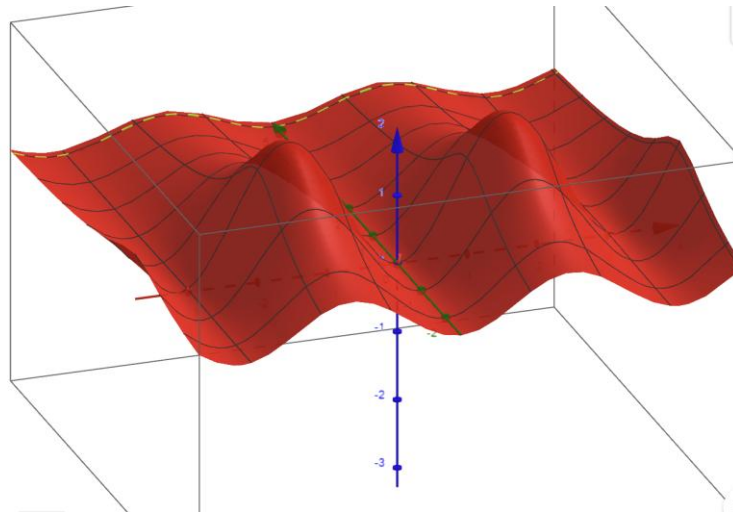
## Ettepanekud ja nõuanded õpetajatele

1. Küsimus õpilastele: Kas funktsioonil ei ole ekstreemumit, kuna puuduvad osalised tuletised?
2. Näidake õpilastele näiteid kahe muutuja funktsioonide kohta, mille puhul on täidetud vajalik tingimus funktsiooni äärmuseni jõudmiseks, kuid piisav tingimus ei ole täidetud.
3. Küsimus õpilastele: Sõnastage kolme muutuja funktsiooni ekstreemumi vajalik tingimus.
4. Kahe muutuja funktsioonide maksimumi ja miinimumi leidmiseks saab kasutada programmi WOLFRAM.

## Töölehed õpilastele

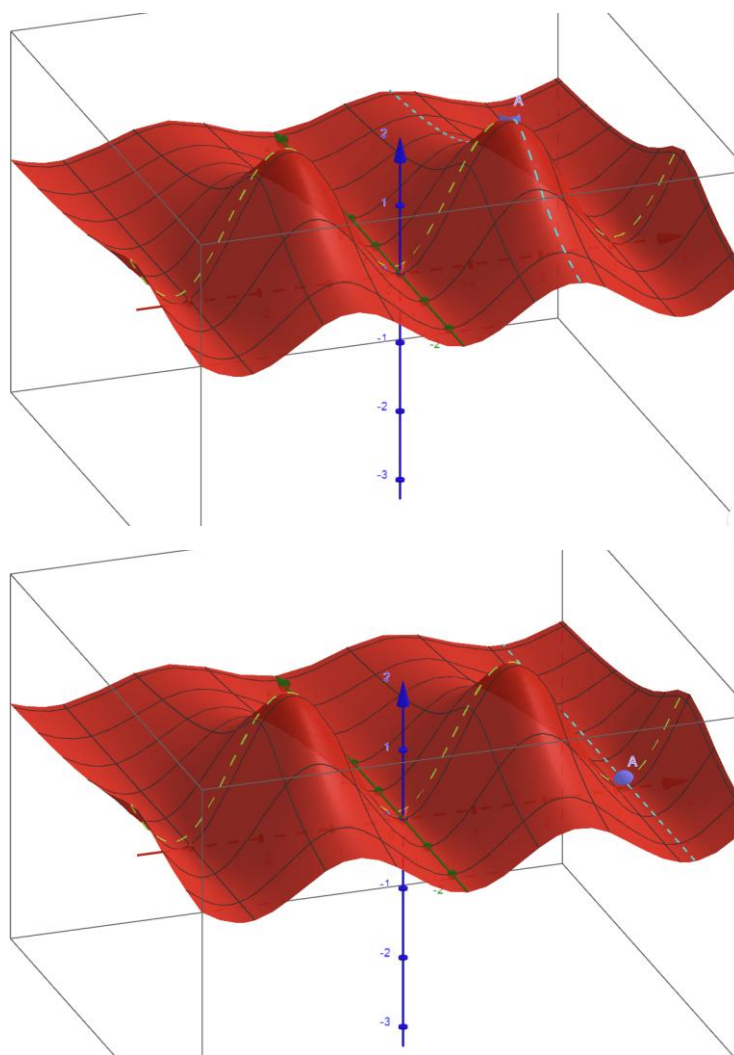
### Harjutus 1.

Märkige graafikul esitatud funktsiooni lokaalne miinimum ja lokaalne maksimum.





## Lahendus



## Harjutus 2.

Antud on ülalt avatud kuubikujuline mahuti. Selle maht on 256. Määrake selle mahuti mõõtmed nii, et kuubiku pindala oleks väikseim.

## Lahendus

$$a = 8, b = 8, h = 4.$$

## Harjutus 3.

Andke näide kahe muutuva funktsiooni kohta, millel on lõpmatult palju lokaalseid ekstreeme.

## Lahendus

$$f(x, y) = \sin(x) + \sin(y).$$

## Harjutus 4.

Funktsioon  $f(x, y) = x^2y + y^3 + 6xy$  lokaalsete ekstreemide määramine.

Lahendus

$$\min = -6\sqrt{3}. \max = 6\sqrt{3}.$$

### Harjutus 5.

Funktsioonil  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy$  lokaalsete ekstreemide määramine.

Lahendus

$$\min = -8.$$

### Harjutus 6.

Kas funktsioonil  $f(x, y) = x^2y + y^3 + 6xy$  punktis  $P(0,0)$  on kohalik ekstreem?

Lahendus

Ei.

### Harjutus 7.

Määrata funktsioonil  $f(x, y) = e^{x^2+y^2}(x^2 + y^2)$  kohalikud ekstreemid.

Lahendus

$$\min = 0.$$

### Harjutus 8.

Kas funktsioonil  $f(x, y) = |x| + |y|$  punktis  $P(0,0)$  on lokaalne miinimum?

Lahendus

Jah.

## Moodul 6: Lineaarsete võrrandite süsteemid

### Õppestsenaariumid koos VR-rakendustega

#### Õppestsenaarium 1

##### Tunni pealkiri

Lineaarsete võrrandite geomeetiline tõlgendamine ruumides

##### Õpiväljundid

- Visualiseerida lineaarsete võrrandite süsteemi lahenduste hulga erinevaid võimalusi.
- Tunnistab lineaarsete võrrandite süsteemi lahenduste hulga erinevaid võimalusi.

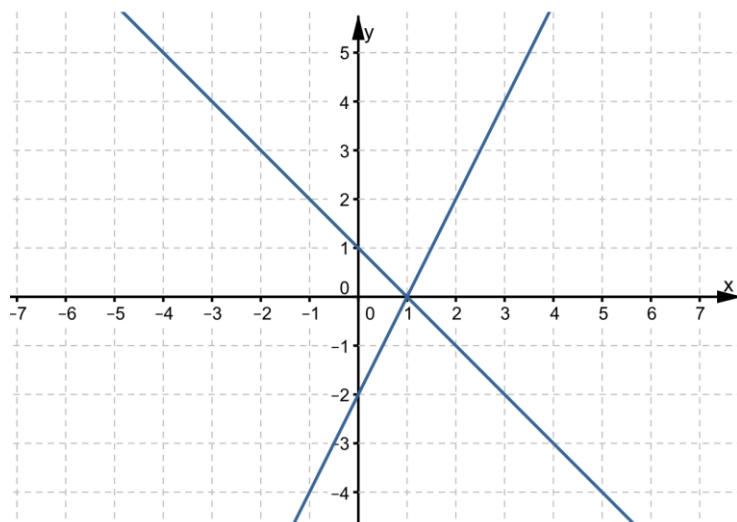
##### Õppetöö käik

###### 1. samm.

Meeldetuletus kahe muutuja lineaarsete võrrandite süsteemi tõlgendamise kohta.

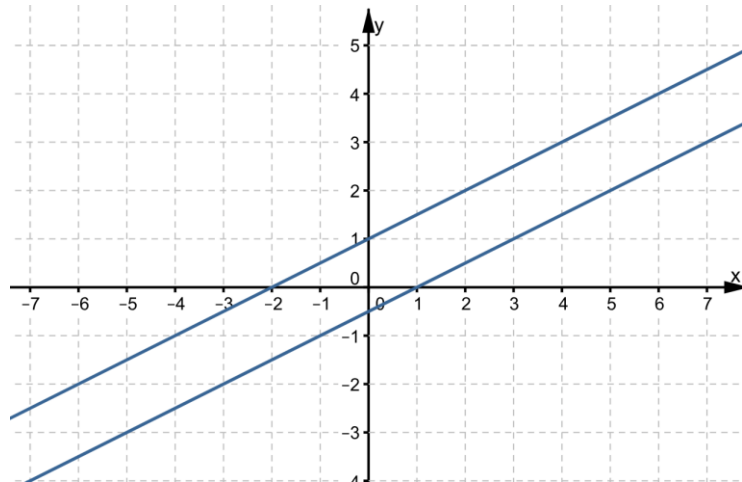
###### 2. samm.

Lineaarsete võrrandite süsteemi lahenduse esitamine graafikul.



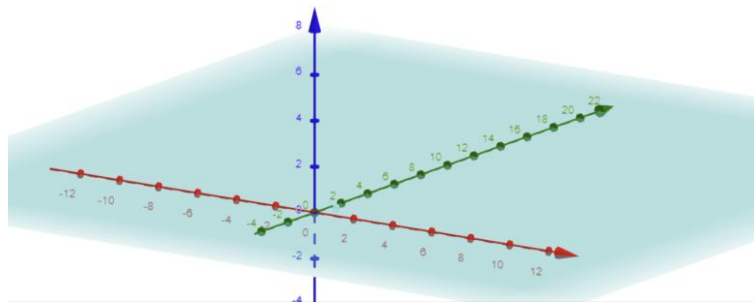
## 3. samm.

Lineaarsete võrrandite süsteemi lahenduse esitamine graafikul.

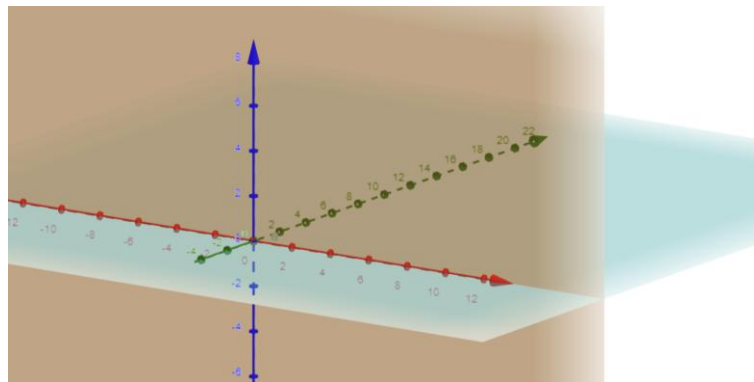


## 4. samm.

Joonista lennuk  $x = 0$



Joonistage  $x = 0$  ja  $y = 0$  tasandid.



Milliseid küsimusi peaksin esitama, et õpilased saaksid oma mõtteid jagada?

Millised on neljamõõtmelises ruumis lineaarsete võrrandite süsteemide võimalikud lahendused?

## Õppeetsenaarium 2

### Tunni pealkiri

Lineaarsete võrrandite lahendamine

### Õpiväljundid

- Lahendab lineaarsete võrrandite süsteeme kolmemõõtmelises ruumis.

### Õppetöö käik

#### 1. samm.

Lineaarsete võrrandite süsteemi lahendamine.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

#### 2. samm.

Lineaarsete võrrandite süsteemi lahendamine.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$$

#### 3. samm.

Lineaarsete võrrandite süsteemi lahendamine.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

#### 4. samm.

Lineaarsete võrrandite süsteemi lahendamine.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

Milliseid küsimusi peaksin esitama, et õpilased saaksid oma mõtteid jagada?

Kas kogu ruum võib olla lineaarsete võrrandite süsteemi lahendus?

## Ettepanekud ja nõuanded õpetajatele

5. Õppige tundma erinevaid meetodeid lineaarsete võrrandite süsteemide lahendamiseks.
6. Enne lineaarsete võrrandite süsteemi lahendamise alustamist tasub võrrandid ümber paigutada, viies kõik tundmatutega terminid vasakule poole ja vabad terminid paremale.
7. Kontrollida lineaarsete võrrandite süsteemi lahendust, nt leitud lahenduse asendamise teel.
8. Tehisintellektis kasutatakse lineaarsete võrrandite süsteeme.

9. Saate kasutada programmi WOLFRAM lineaarsete võrrandite süsteemide lahendamiseks.

## Töölehed õpilastele

### Harjutus 1.

Andke parameetrite väärtused  $a, b$  nii, et lineaarsete võrrandite süsteemi lahendus oleks tühi hulk.

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 2 \\ 2x + y + az = b \end{cases}$$

Lahendus

$$a = 3, b \neq 2.$$

### Harjutus 2.

Andke parameetrite väärtused  $a, b$  nii, et lineaarsete võrrandite süsteemi lahendus oleks joon.

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 2 \\ 2x + y + az = b \end{cases}$$

Lahendus

$$a \neq 3, b \in R.$$

### Harjutus 3.

Andke parameetrite väärtused  $a, b$  nii, et lineaarsete võrrandite süsteemi lahendus oleks punkt.

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 2 \\ 2x + y + az = b \end{cases}$$

Lahendus

$$a = 3, b = 2.$$

### Harjutus 4.

Andke parameetrite väärtused  $a, b$  nii, et lineaarsete võrrandite süsteemi lahendus oleks tasand.

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 2 \\ 0x + 0y + az = b \\ 0x + y + z = 2 \end{cases}$$

Lahendus

$$a \neq 0, b \in R.$$

### Harjutus 5.

Lahendage lineaarsete võrrandite süsteem.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 2x + 2y + 4z = 6 \end{cases}$$

Lahendus

$\emptyset$ .

### Harjutus 6.

Kontrollige, kas süsteem on Crameri oma.

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + y + 3z = 8 \\ x + 2y + z = 5 \\ 3x + 4y + 5z = 17 \end{cases}$$

Lahendus

Jah.

### Harjutus 7.

Lahendage lineaarsete võrrandite süsteem.

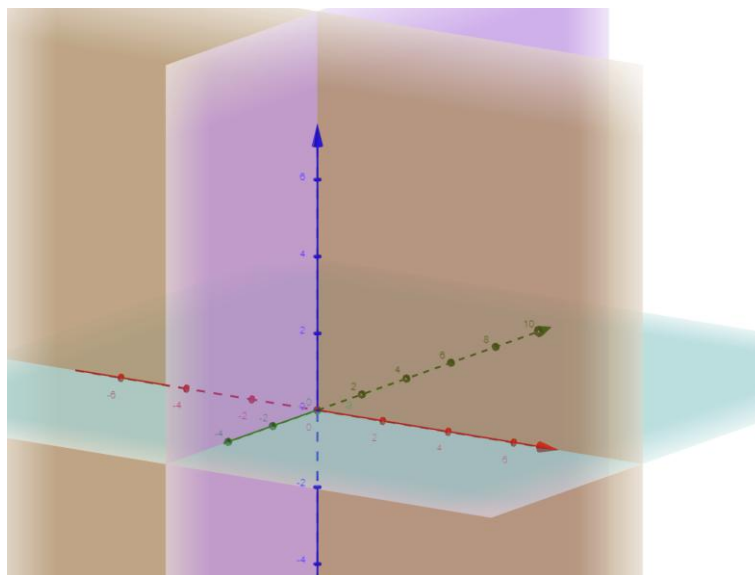
$$\{2x + y + 3z = 1$$

Lahendus

$y = -2x - 3z + 1$  või  $[x, -2x - 3z + 1, z]$  kus  $x, z \in R$

### Harjutus 8.

Kirjutage graafiku põhjal lineaarsete võrrandite süsteem.



Lahendus

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$



# Moodul 7: Prismad - prismade lõiked, prismadega võrgud

## Õppestsenaariumid koos VR-rakendustega

### Õppestsenaarium 1

Tunni pealkiri

Prismade ruudustik

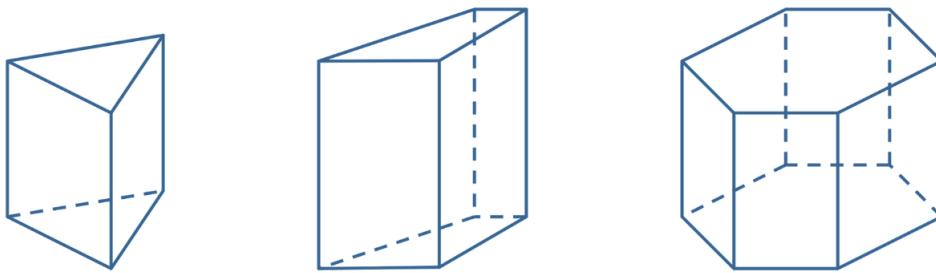
Õpiväljundid

- Tunneb ära prismade ruudustikud.

Õppetöö käik

1. samm.

Prismade võrgustike joonistamine.



2. samm.

Kirjeldades, millistest kujunditest koosnevad prismade ruudud.

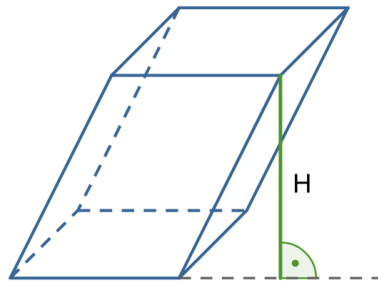
3. samm.

Kas joonistel on näidatud prismade võred? Põhjendus.



4. samm.

Joonisel kujutatud prisma ruudustiku joonistamine.



Milliseid küsimusi peaksin esitama, et õpilased saaksid oma mõtteid jagada?

Kas igal fikseeritud prisma on ainult üks ruudustik?

## Õppeetsenaarium 2

Tunni pealkiri

Prismade kogupindala ja -mahu arvutamine

Õpiväljundid

- Arvutage prisma kogupindala ja -maht.

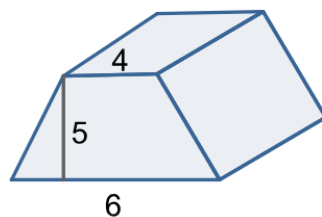
Õppetöö käik

1. samm.

Tasapinnaliste kujundite kogupindala valemite meeldetuletamine: kolmnurk, parallelogramm, trapets, korrapärane kuusnurk.

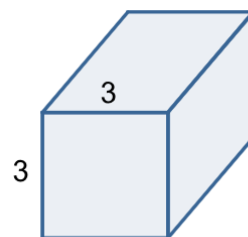
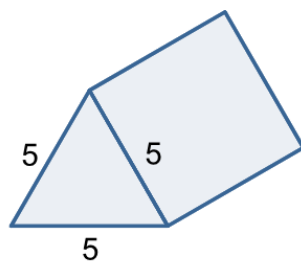
2. samm.

Joonisel kujutatud prisma ruumala on 500. Arvutatakse joonise kõrgus.



3. samm.

Prismade kõrguste suhte määramine nii, et nende ruumala oleks võrdne.

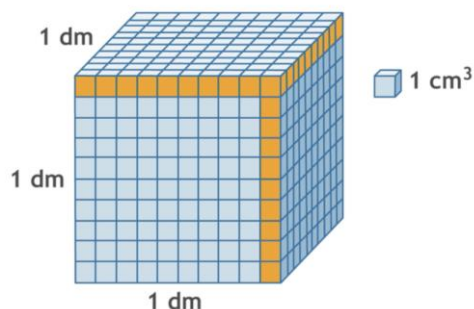


Kuidas muutub regulaarse kuusnurkse prisma maht, kui

- aluse serv on kahekordistunud?
- kõrgus on kahekordistunud?

4. samm.

Mahuühikute teisendamine. Kui palju on üks  $\text{dm}^3 \text{cm}^3$  ?



5. samm.

Kui palju on ühel  $\text{m}^3 \text{dm}^3$  ?

Kui palju on ühel  $\text{m}^3 \text{cm}^3$  ?

Kui palju on ühel  $\text{km}^3 \text{cm}^3$  ?

Milliseid küsimusi peaksin esitama, et õpilased saaksid oma mõtteid jagada?

Kas on võimalik ehitada erinevaid korrapäraseid nelinurkseid prismsid, millel on ühesugune alus, võrdne kõrgus ja võrdne ruumala?

## Ettepanekud ja nõuanded õpetajatele

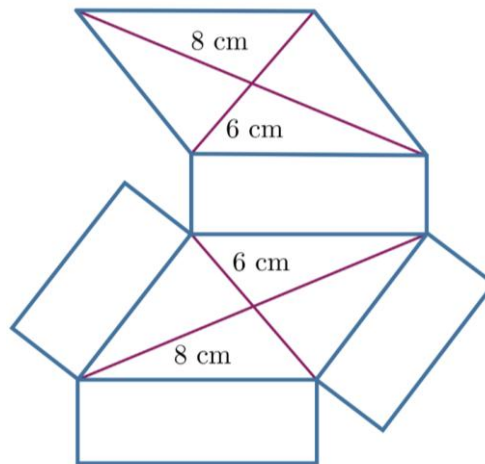
1. Küsimus õpilastele: Kuidas muutub prisma ruumala, kui selle kõrgus kolmekordistub?
2. Küsimus õpilastele: Kuidas muutub korrapärase nelinurkse prisma ruumala, kui selle kõrgus kolmekordistub?
3. Küsimus õpilastele: Kuidas muutub korrapärase nelinurkse prisma diagonaali pikkus, kui selle kõrgus kolmekordistub?
4. Küsimus õpilastele: Kuidas muutub regulaarse nelinurkse prisma kogupindala, kui kõrgus kolmekordistub?
5. Programmiga WOLFRAM saate arvutada prismade ruumala ja kogupindala .

## Töölehed õpilastele

### Harjutus 1.

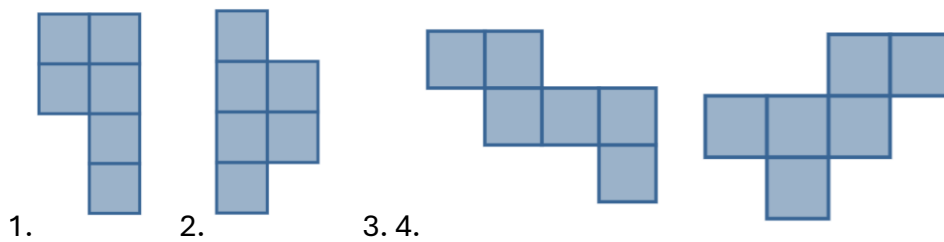
Joonistage prisma ruudustik, mille alused on rombid diagonaalidega 6 cm ja 8 cm

Lahendus



## Harjutus 2.

Millised joonised näitavad prismavõrgustikke?

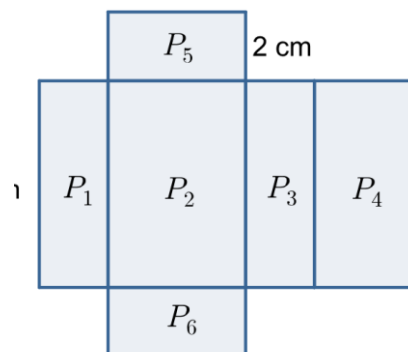


Lahendus

1. Ei.
2. Ei.
3. Jah.
4. Jah.

## Harjutus 3.

Joonisel kujutatud prisma ruumala on 24 ja kogupindala on 52. Määrake ülejäänud servade pikkused.

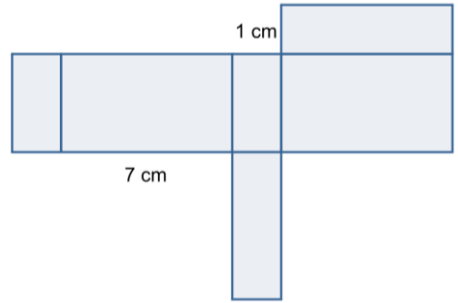


Lahendus

$$a = 2, , b = 3c = 4$$

#### Harjutus 4.

Joonisel näidatud prisma kogupindala on 78 . Määrake prisma ruumala.



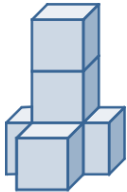
Lahendus

$$V = 28.$$

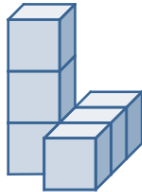
#### Harjutus 5.

Milline joonis on suurima mahuga?

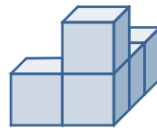
I.



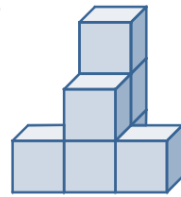
II.



III.



IV.

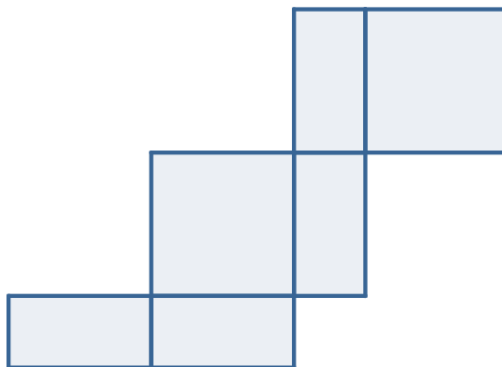


Lahendus

IV.

#### Harjutus 6.

Kas joonisel on kujutatud prismavõrk?

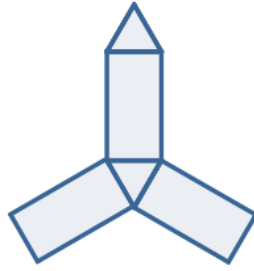


Lahendus

Jah.

### Harjutus 7.

Millist tüüpi prisma on kujutatud joonisel?

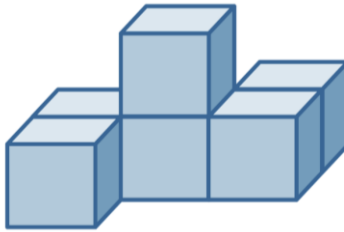


Lahendus

Regulaarne kolmnurkne prisma.

### Harjutus 8.

Joonistage joonisel näidatud joonise ruudustik.



Lahendus

Pärast ruudustiku joonistamist lõigake see välja ja proovige seda kokku panna.

## Moodul 8: Püramiidid - püramiidide lõiked, püramiididega võrgud

Õppestsenaariumid koos VR-rakendustega

Õppestsenaarium 1

Tunni pealkiri

Püramiidide ruudustik

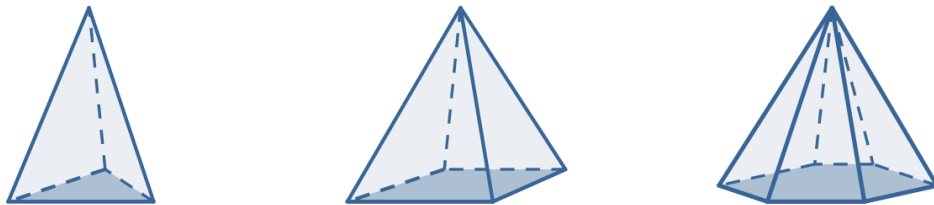
Õpiväljundid

- Tunneb ära püramiidide ruudustikud.

Õppetöö käik

1. samm.

Püramiidide ruudustike joonistamine.

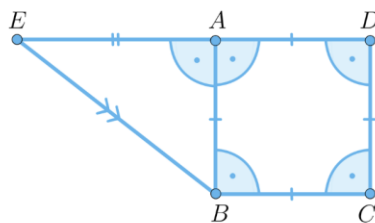


2. samm.

Kirjeldades, millistest kujunditest püramiidide ruudustikud koosnevad.

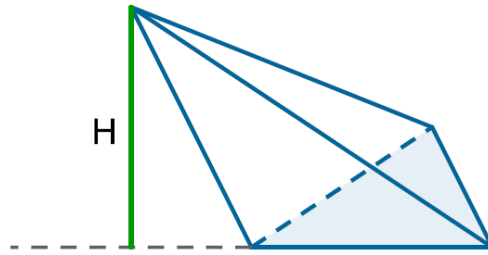
3. samm.

Püramiidivõrgu joonistamine.



4. samm.

Joonisel kujutatud püramiidi ruudustiku joonistamine.



Milliseid küsimusi peaksin esitama, et õpilased saaksid oma mõtteid jagada?

Kas igal fikseeritud püramiidil on ainult üks ruudustik?

## Õppeetsenaarium 2

Tunni pealkiri

Püramiidi maht

Õpiväljundid

- Arvutab püramiidi ruumala.

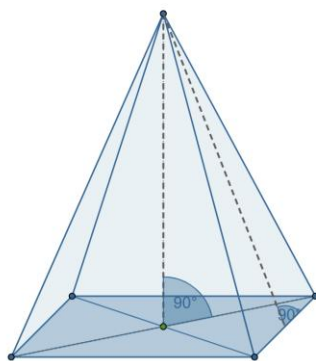
Õppetöö käik

1. samm.

Tasapinnaliste kujundite kogupindala valemite meeldetuletamine: kolmnurk, parallelogramm, trapets, korrapärane kuusnurk.

2. samm.

Regulaarse püramiidi  $V$  ruumala tuletamine, mille serva pikkus on  $a$  ja külgseina kõrguse pikkus  $h$



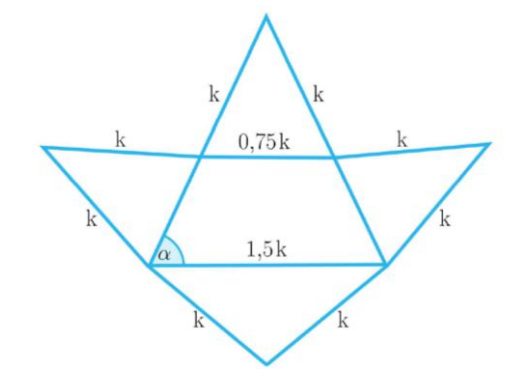
3. samm.

Regulaarse kuusnurkse püramiidi ruumala valemi tuletamine, mille serva pikkus on  $a$  ja külgseina kõrguse pikkus  $h$



## 4. samm.

Püramiidi mahu valemi tuletamine sõltuvalt  $\alpha$



Milliseid küsimusi peaksin esitama, et õpilased saaksid oma mõtteid jagada?

Kas on võimalik ehitada erinevaid korrapäraseid nelinurkseid püramiide, millel on ühesugused alused, võrdne kõrgus ja võrdne ruumala?

### Ettepanekud ja nõuanded õpetajatele

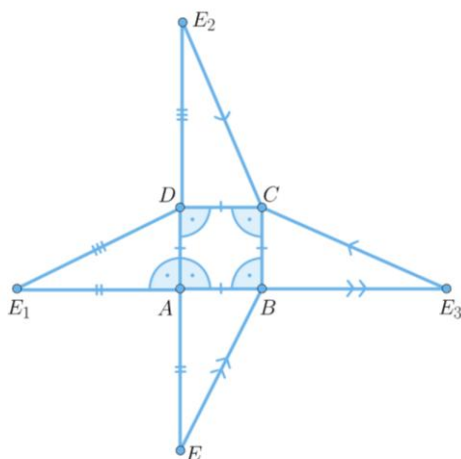
1. Küsimus õpilastele: Kuidas muutub püramiidi ruumala, kui selle kõrgus kolmekordistub?
2. Küsimus õpilastele: Kuidas muutub korrapärase nelinurkse püramiidi ruumala, kui selle kõrgus kolmekordistub?
3. Küsimus õpilastele: Kuidas muutub korrapärase nelinurkse püramiidi diagonaali pikkus, kui kõrgus kolmekordistub?
4. Küsimus õpilastele: Kuidas muutub regulaarse püramiidi kogupindala, kui kõrgus kolmekordistub?
5. Saate kasutada programmi WOLFRAM, et arvutada püramiidide maht ja kogupindala .

### Töölehed õpilastele

#### Harjutus 1.

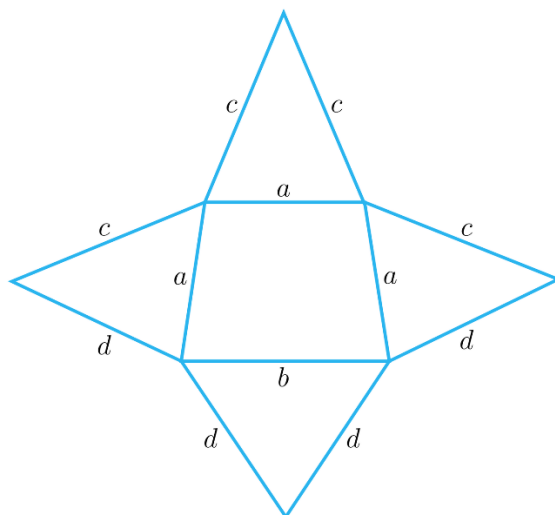
Joonistage püramiidi ruudustik, mille alus on ruut ja küljed on täisnurksed kolmnurgad.

Lahendus



Harjutus 2.

Nimetage püramiid, mille ruudustik on näidatud joonisel.

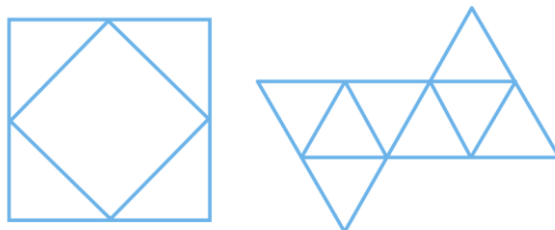


Lahendus

Nelinurkne püramiid, mille põhjas on trapets.

Harjutus 3.

Millisel joonisel on kujutatud püramiidi ruudustik?

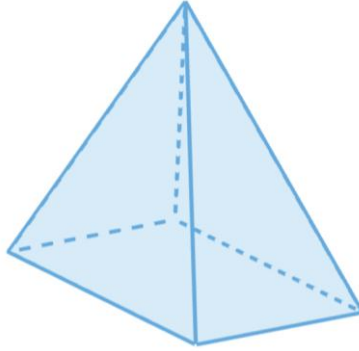


Lahendus

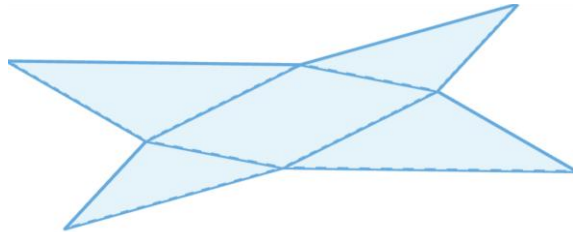
Püramiidi ruudustikku joonistel ei ole.

Harjutus 4.

Joonistage joonisel kujutatud püramiidi ruudustik.



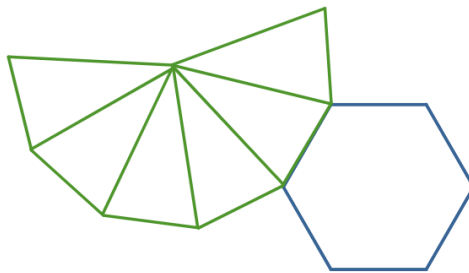
Lahendus



Harjutus 5.

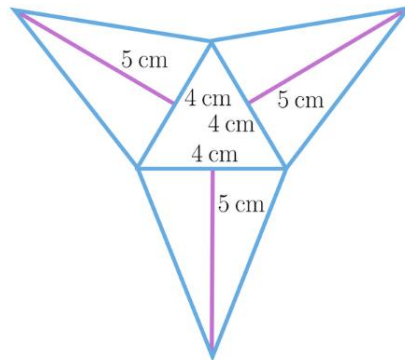
Joonistage korrapärase kuusnurkse püramiidi ruudustik.

Lahendus



### Harjutus 6.

Arvutage joonisel kujutatud püramiidi kõrguse pikkus.

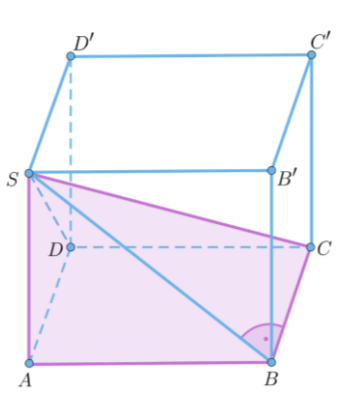


Lahendus

$$h = \sqrt{23\frac{2}{3}}.$$

### Harjutus 7.

Arvuta püramiidi ruumala  $ABCDS$ , kui prisma küljepikkuse kuup on .3

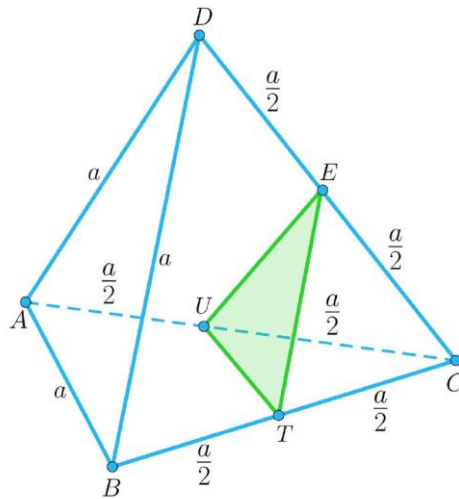


Lahendus

$$V = 9.$$

### Harjutus 8.

Antud on tetraeeder  $ABCD$ , mille servade pikkus on 2. Arvutage kolmnurga  $UTE$  pindala.

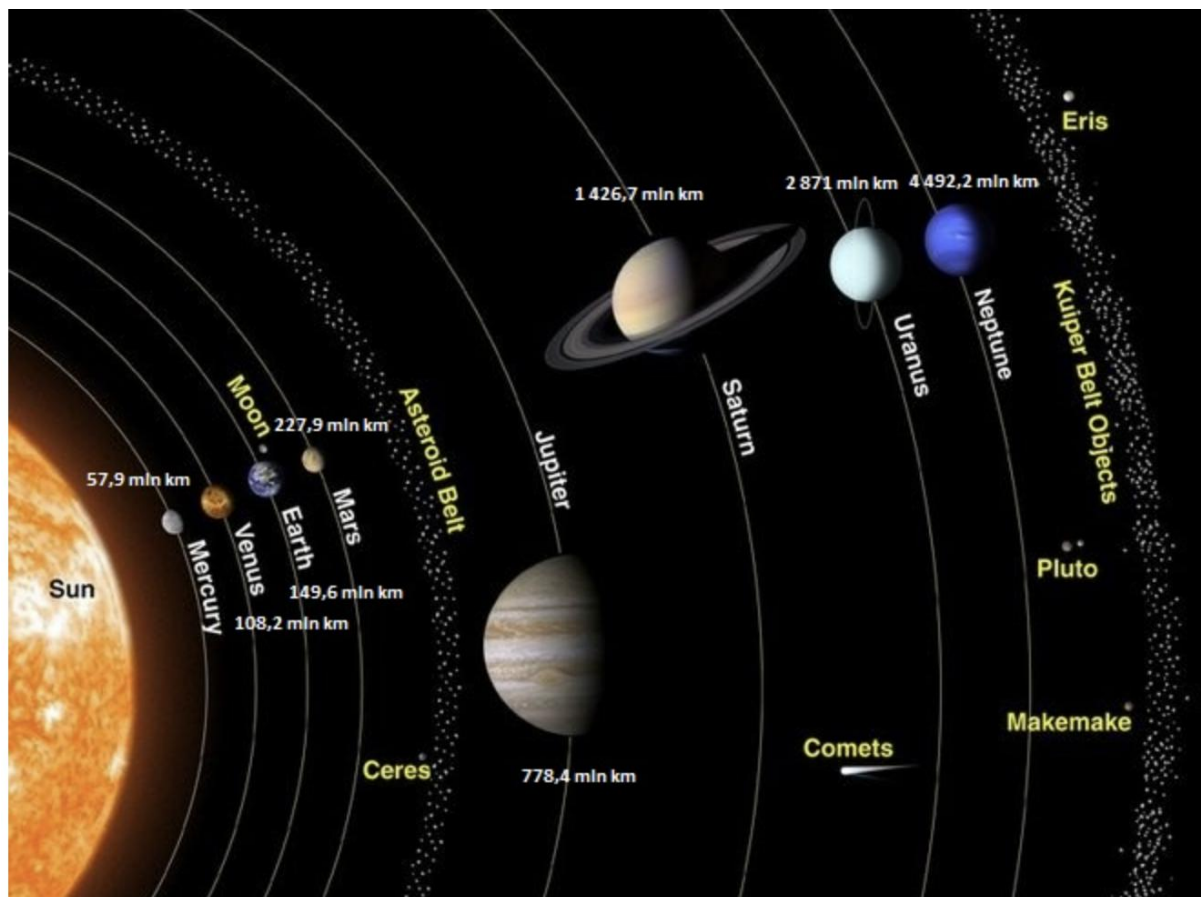


Lahendus

$$P = \sqrt{3}.$$

## Moodul 9: Planeedisüsteem

Õppeetsenaariumid koos VR-rakendustega



### Õppeetsenaarium 1

Tunni pealkiri

Kaugused Päikesesüsteemis

Õpiväljundid

- Tutvuge kaugustega Päikesesüsteemis.

Õppetöö käik

1. samm.

Astronoomilise ühikuu tutvustamine.

Üks astronoomiline ühik on Maa ja Päikese vaheline keskmine kaugus, mis on ligikaudu 149 598 000 km. Hinnanguliste arvutuste puhul võime eeldada, et .150 000 000 km

2. samm.

Kuu keskmise kauguse määramine Maastau ühikus.

Lahendus. Umbes .0.0026 au

3. samm.

Astronoomilise ühiku valgusaasta määratlemine(ly) . Valgusaasta on vahemaa, mille valgus läbib vaakumis ühe aasta jooksul. ly = 63241 au.

4. samm.

Arvutada, mitu kilomeetrit on valgusaastas.

Lahendus. ly =  $9.5 \cdot 10^{12}$  km.

Milliseid küsimusi peaksin esitama, et õpilased saaksid oma mõtteid jagada?

Valguse kiirus vaakumis on  $300\,000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$  . Kui kaua kulub valgusel vaakumis Maa ekvaatori ületamiseks?

## Õppestsenaarium 2

Tunni pealkiri

Koguste võrdlused Päikesesüsteemis

Õpiväljundid

- Võrreldes koguseid Päikesesüsteemis.

Õppetöö käik

1. samm.

Marsi raadius on  $3\,392$  km . Maa läbimõõt on  $12\,756$  km

Marsi pindala arvutamine

Lahendus. Umbes  $.15 \cdot 10^8$  km<sup>2</sup>

2. samm.

Marsi mahu arvutamine

Lahendus. Umbes  $.16 \cdot 10^{11}$  km<sup>3</sup>

3. samm.

Arvutage, milline osa Maa ruumalast on Marsi ruumala.

Lahendus. Umbes .0.15

#### 4. samm.

Arvutage, milline osa Maa pindalast moodustab Marsi .

Lahendus. Umbes .0.3

Milliseid küsimusi peaksin esitama, et õpilased saaksid oma mõtteid jagada?

Võrrelge Marsi ja Maa tihedust.

### Ettepanekud ja nõuanded õpetajatele

1. Märkus õpilastele: Tutvuge astronoomilise ühiku parsekiga .(pc)
2. Küsimus õpilastele: milline planeet on Päikesele kõige lähemal?
3. Kui kaua võtab aega Marsile sõit?
4. Päikesesüsteemi arvutuste tegemiseks saate kasutada programmi WOLFRAM.

### Töölehed õpilastele

#### Harjutus 1.

Määrake Jupiteri keskmine kaugus Päikesest.

Lahendus

5.203 au.

#### Harjutus 2.

Määrake Maa keskmine kaugus Päikesest valgusaastates.

Lahendus

Umbes8 valgusminutid.

#### Harjutus 3.

Määrake Maa keskmine kaugus Kuust valgusaastates.

Lahendus

Umbes1.3 valgussekundid.

#### Harjutus 4.

Määrake Maa pindala ligikaudne väärtus (läbimõõt:12 756 km ).

Lahendus

510 000 000 km<sup>2</sup> .



### Harjutus 5.

Määrake Maa ruumala ligikaudne väärtus (läbimõõt: ). 12 756 km

Lahendus

$10^{12} \text{ km}^3$  .

### Harjutus 6.

Joonisel on kujutatud Maa ja Marsi mõõtkavas. Maa läbimõõt on 12 756 km . Hinnake Marsi läbimõõtu.



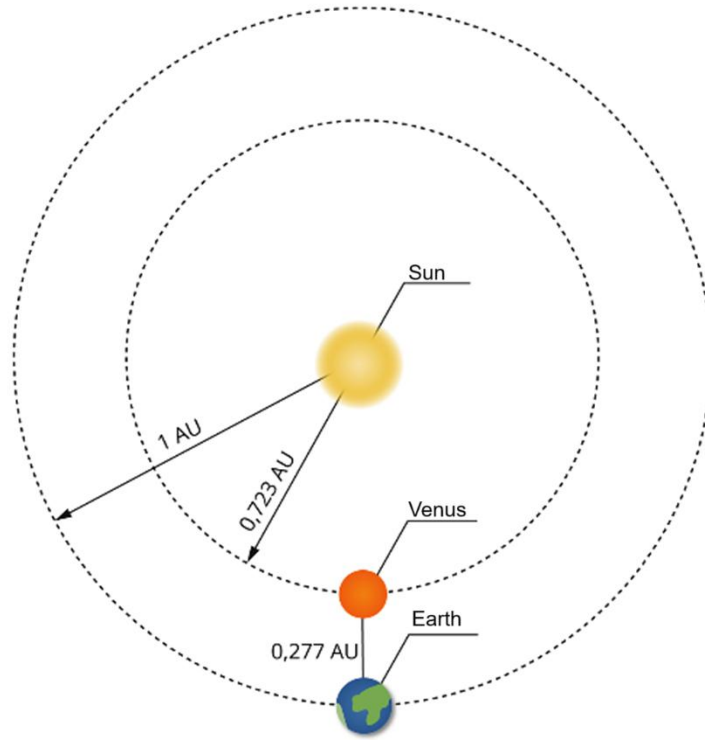
<https://pl.wikipedia.org/wiki/Mars>

Lahendus

6 800 km .

### Harjutus 7.

Määrake Veenuse kaugus Päikesest kilomeetrites.



## Moodul 10: Päikesesüsteemi uurimine

### Õppestsenaariumid koos VR-rakendustega

#### Õppestsenaarium 1

Tunni pealkiri

Kosmoseuuringud - põhimõisted

Õpiväljundid

- Kasutab põhimõisteid kosmoseuuringute kohta.

Õppetöö käik

1. samm.

Kosmoseaparaadi määratluse tutvustamine. Kosmoseaparaadi tüübid.

2. samm.

Arutelu kosmilise kiirguse teemal.

3. samm.

Arutelu gravitatsiooniküsimuse üle. Gravitatsioon Maal ja teistel planeetidel.

4. samm.

Arutelu gravitatsiooni mõju kohta inimese tervisele.

Milliseid küsimusi peaksin esitama, et õpilased saaksid oma mõtteid jagada?

Milline on kosmose praegune õiguslik staatus?

#### Õppestsenaarium 2

Tunni pealkiri

Kosmose vallutamine

Õpiväljundid

- Arutleb kosmose vallutamise üle.

Õppetöö käik

1. samm.

Arutelu esimese inimese loo kohta kosmoses.

2. samm.

Arutelu inimkonna tuleviku üle kosmoses. Populaarteaduslike artiklite läbivaatamine.

### 3. samm.

Arutelu kosmose vallutamise eetiliste küsimuste üle. Populaarteaduslike artiklite läbivaatamine.

Milliseid küsimusi peaksin esitama, et õpilased saaksid oma mõtteid jagada?

Millal toimus esimene inimese maandumine Kuule?

## Ettepanekud ja nõuanded õpetajatele

1. Küsimus õpilastele: Gravitatsioon Maal on  $9.81 \frac{m}{s^2}$ . Kas Marsil on sama gravitatsioon kui Maal?
2. Küsimus õpilastele: Kus on suurim raskusjõud Maal?
3. Millised on NASA praegused kosmoseuuringute plaanid?

## Töölehed õpilastele

### Harjutus 1.

Esitage oma arvamus Päikesesüsteemi planeetide vallutamise kohta.

### Harjutus 2.

Esitage oma positiivsed argumendid Päikesesüsteemi planeetide vallutamise kohta.

### Harjutus 3.

Esitage oma negatiivsed argumendid Päikesesüsteemi planeetide vallutamise kohta.

### Harjutus 4.

Milliseid avastusi on hiljuti teinud kosmosesondid Päikesesüsteemis?

### Harjutus 5.

Millised on kosmoseprügi ohud?

### Harjutus 6.

Maal kaalub inimene 50 kg. Kui palju kaalub see inimene Marsil?

### Lahendus

18 kg.

# Moodul 11: Osaliste tuletiste geomeetiline tõlgendamine

## Õppestsenaariumid koos VR-rakendustega

### Õppestsenaarium 1

#### Tunni pealkiri

#### Osaliste tuletiste geomeetiline tõlgendamine

#### Õpiväljundid

- Tõlgendab osalisi tuletisi.

#### Õppetöö käik

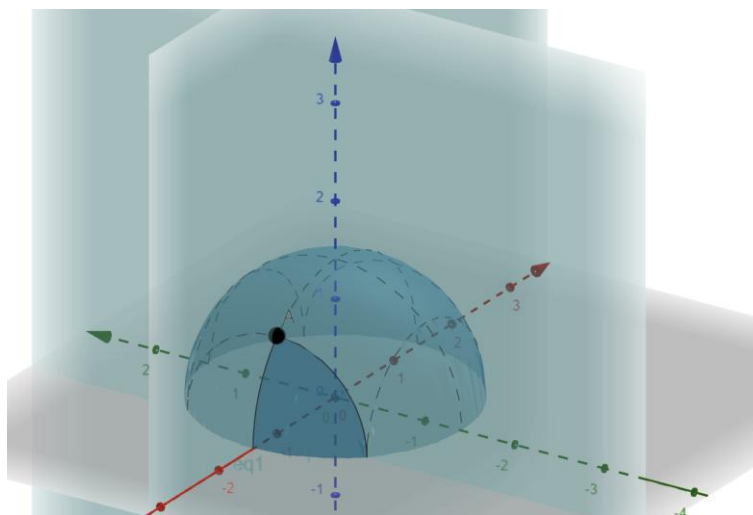
##### 1. samm.

Ühe muutuja funktsiooni tuletise tõlgendamise meeldetuletus.

##### 2. samm.

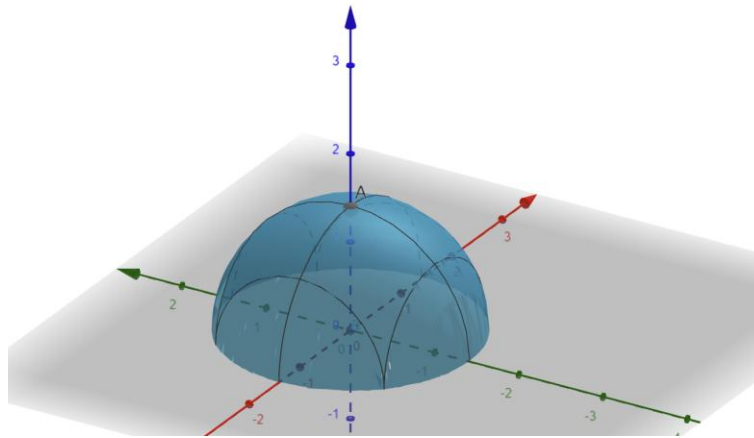
Osalise tuletise mõiste ja selle tõlgendamine kahe muutuja funktsioonide puhul.

Osaliste tuletiste hindamine valitud punktis.



3. samm.

Osaliste tuletiste hindamine valitud punktis.



4. samm.

Funktsiooni ekstreemumi ja osaliste tuletiste vahelise seose hüpoteesimine.

Milliseid küsimusi peaksin esitama, et õpilased saaksid oma mõtteid jagada?

Kuidas võtta kasutusele osaliste tuletiste definitsioonid  $n$ -mõõtmelise funktsiooni jaoks?

## Õppeetsenaarium 2

Tunni peakiri

Osaliste tuletiste arvutamine

Õpiväljundid

- Arvutab osalisi tuletisi.

Õppetöö käik

1. samm.

Arvutatakse definitsioonist lähtuvalt funktsioonil  $f(x, y) = y + x^2$  osaline tuletis muutujay suhtes.

2. samm.

Funktsioonil  $f(x, y) = y + x^2$  osalise tuletise arvutamine muutujay suhtes definitsioonist lähtuvalt.

3. samm.

Funktsioonil  $f(x, y) = \sin(x^3 + y^2)$  osaliste tuletiste arvutamine.

4. samm.

Funktsioonif  $f(x, y) = x \cdot \sin(x^3 + y^2)$  osaliste tuletiste arvutamine.

5. samm.

Funktsioonif  $f(x, y) = x \cdot \frac{\sin(x^3 + y^2)}{x^2 + 2}$  osaliste tuletiste arvutamine.

Milliseid küsimusi peaksin esitama, et õpilased saaksid oma mõtteid jagada?

Kuidas arvutada kõrgema astme tuletisi?

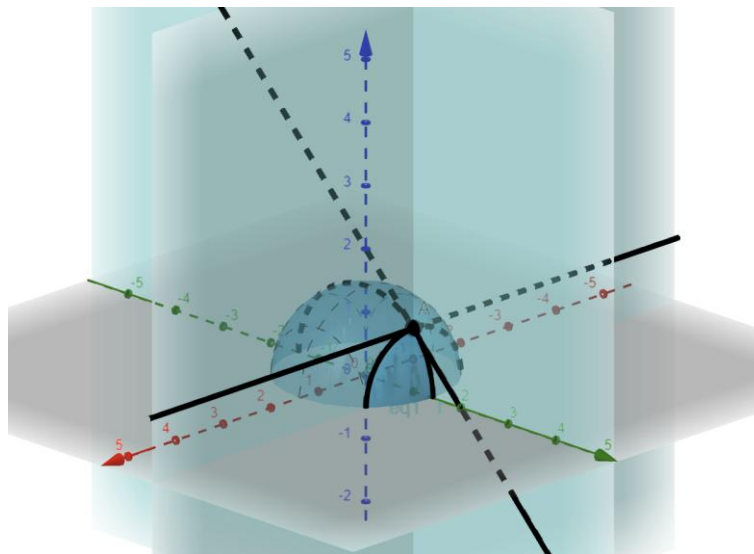
## Ettepanekud ja nõuanded õpetajatele

6. Märkus õpilastele: Osatuletise arvutamisel valitud muutuja suhtes arvutame seda samamoodi nagu ühe muutuja funktsiooni puhul, ülejäänud muutujaid käsitleme konstantidena.
7. Küsimus õpilastele: Kuidas arvutada kolme muutuja funktsiooni osaline tuletis muutujax suhtes? Rakendage ülaltoodud reeglit ja arvutage  $\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}$ , kui  $f(x, y, z) = x^2zy + x$
8. Funktsioon  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0,0) \\ 0, & (x, y) = (0,0) \end{cases}$  ei ole pidev ja tal on osalised tuletised punktis  $(0, 0)$
9. Oluline: funktsioon ei tohi olla pidev, kui on olemas osalised tuletised.
10. Osaliste tuletiste arvutamiseks saate kasutada programmi WOLFRAM.

## Töölehed õpilastele

### Harjutus 1.

Andke joonisel kujutatud funktsiooni osalised tuletised punktis A .

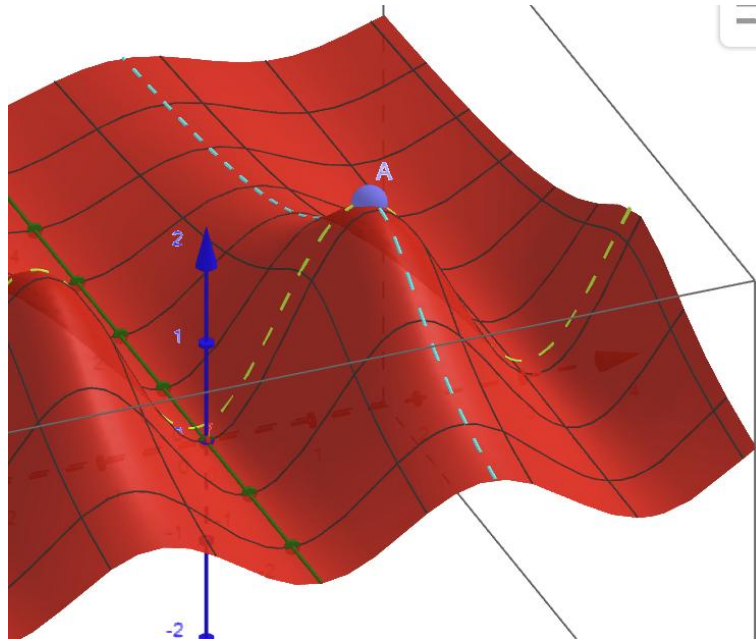


Lahendus

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 1, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0$$

Harjutus 2.

Andke joonisel kujutatud funktsiooni osalised tuletised punktis A .



Lahendus

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0$$

Harjutus 3.

Arvutage funktsiooni  $f(x, y) = x^3y + y^2 + 4$  osalised tuletised.

Lahendus

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 3x^2y, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^3 + 2y$$

Harjutus 4.

Arvutatakse definitsioonist lähtuvalt funktsiooni  $f(x, y) = x^2y + x$  osaline tuletis muutujax suhtes.

Lahendus

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2y + x + h - (x^2y + x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xhy + h^2}{h} = 2xy.$$

Harjutus 5.

Arvutage funktsiooni  $f(x, y) = xe^{x^2+y^2}$  osalised tuletised.



Lahendus

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^{x^2+y^2}(1+2x^2), \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2xye^{x^2+y^2}$$

Harjutus 6.

Kas funktsioon  $f(x, y) = \sqrt{x + y}$  ja osaliste tuletiste domeenid on samad?

Lahendus

Ei.

Harjutus 7.

Funktsioon on antud  $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ . Põhjendage

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = (2x + 2y) \cdot f(x, y).$$

Lahendus

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2x\sin(x^2 + y^2) + 2y\sin(x^2 + y^2) = (2x + 2y) \cdot f(x, y).$$

Harjutus 8.

Andke näide funktsioonist  $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$  kohta, mis vastab tingimusele

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0.$$

Lahendus

$$f(x, y) = x - y.$$

# Moodul 12: Sfäärilised koordinaadid

## Õppestsenaariumid koos VR-rakendustega

### Õppestsenaarium 1

Tunni pealkiri

Polaarkoordinaadid

Õpiväljundid

- Kasutab polaarkoordinaate.

Õppetöö käik

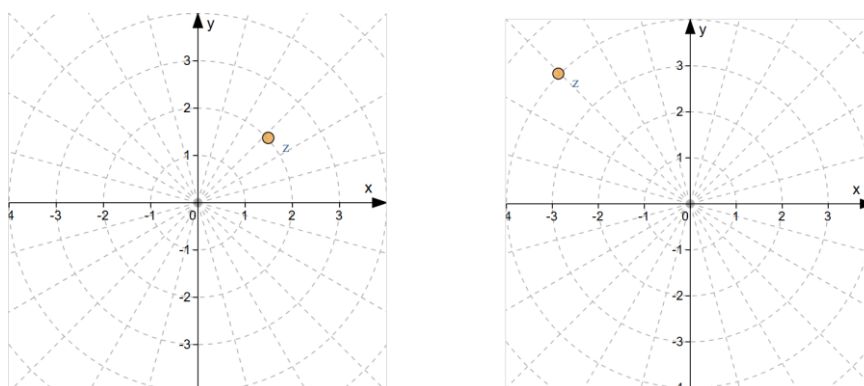
1. samm.

Funktsioonidesin(x) ja cos(x) omaduste ja graafikute meeldetuletus.

2. samm.

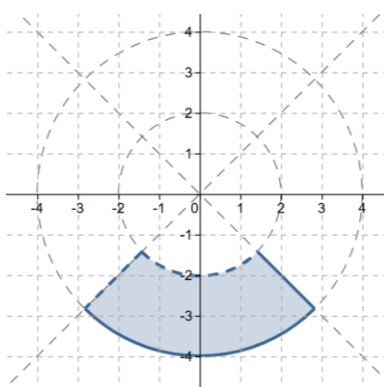
Arutelu polaarkoordinaatide küsimuse üle  $\begin{cases} x = r\cos(\alpha) \\ y = r\sin(\alpha) \end{cases}$

Joonisel näidatud punktide polaarkoordinaatide määramine.



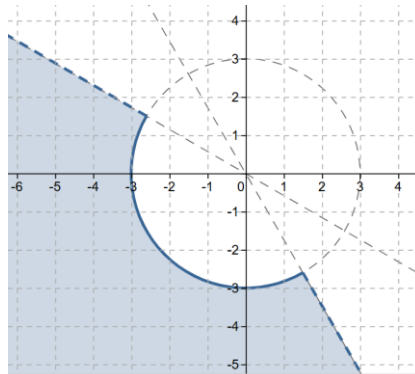
3. samm.

Ala kirjeldamine polaarkoordinaatide abil.



4. samm.

Ala kirjeldamine polaarkoordinaatide abil.



Milliseid küsimusi peaksin esitama, et õpilased saaksid oma mõtteid jagada?

Kuidas erinevad polaarkoordinaadid kartesiaanlikest koordinaatidest?

## Õppestsenaarium 2

Tunni pealkiri

Sfäärilised koordinaadid

Õpiväljundid

- Kasutab sfäärilisi koordinaate.

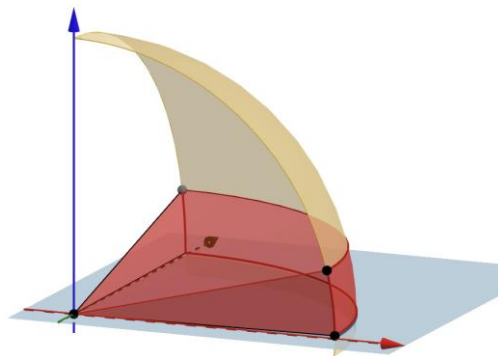
Õppetöö käik

1. samm.

Sfääriliste koordinaatide kehtestamine  $\begin{cases} x = r\cos(\theta)\cos(\alpha) \\ y = r\cos(\theta)\sin(\alpha) \\ z = r\sin(\theta) \end{cases}$

2. samm.

Arutelu kogumitest sfäärilistes koordinaatides.



$$\begin{cases} 0 \leq r \leq 4 \\ 0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ \\ 0^\circ \leq \theta \leq 20^\circ \end{cases}$$

3. samm.

Arvutage punktide vaheline kaugus, kui see on antud sfäärilistes koordinaatides.

Milliseid küsimusi peaksin esitama, et õpilased saaksid oma mõtteid jagada?

Millised on sfääriliste koordinaatide väärtuste piirid?

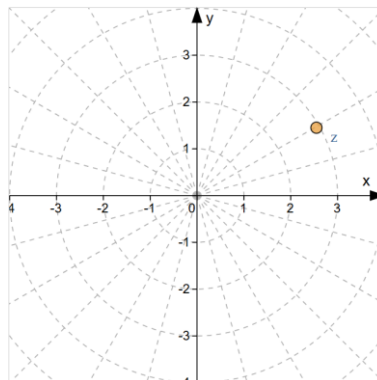
## Ettepanekud ja nõuanded õpetajatele

1. Küsimus õpilastele: Kuidas kirjutada ringi võrrand polaarkoordinaatides?
2. Küsimus õpilastele: Kuidas kirjutada sfääri võrrand sfäärilistes koordinaatides?
3. Kuidas teisendada polaarkoordinaadid kartesiaanlikeks koordinaatideks?
4. Kuidas teisendada sfäärilised koordinaadid kartesiaanlikeks koordinaatideks?
5. Sfääriliste koordinaatide arvutamiseks saate kasutada programmi WOLFRAM.

## Töölehed õpilastele

### Harjutus 1.

Määrake joonisel kujutatud punkti polaarkoordinaadid.

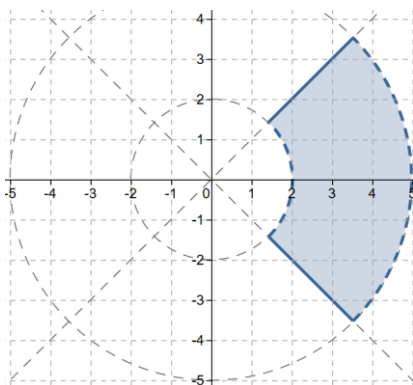


Lahendus

Polaarkoordinaadid:  $r = 3$ ,  $\alpha = 30^\circ$

## Harjutus 2.

Kirjeldage joonisel kujutatud kogumit polaarkoordinaatide abil.



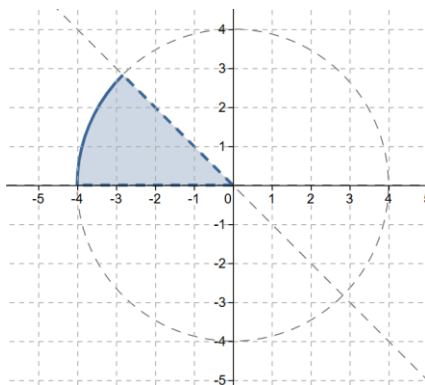
Lahendus

$$\begin{cases} 2 < r < 5 \\ -45^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ \end{cases}$$

## Harjutus 3.

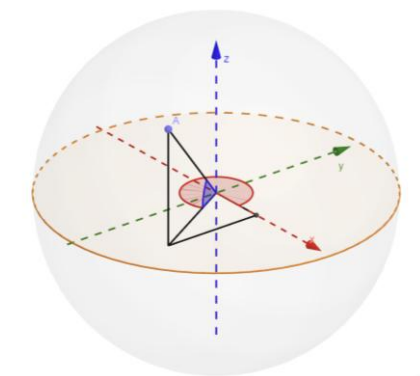
Joonistage antud hulk  $\begin{cases} 0 \leq r \leq 4 \\ 135^\circ < \alpha < 180^\circ \end{cases}$  polaarkoordinaatides.

Lahendus



## Harjutus 4.

Hinnake sfäärilised koordinaadid joonise põhjal.



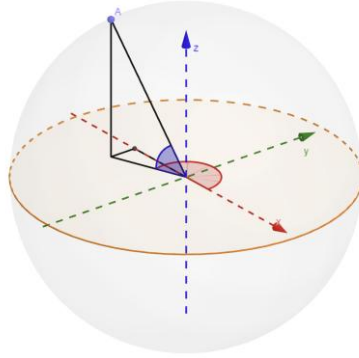
Lahendus

$$\alpha = 300^\circ, \theta = 45^\circ, r = 3$$

Harjutus 5.

Joonistage punkt polaarkoordinaatidega:  $\alpha = 200^\circ, \theta = 60^\circ, r = 3$

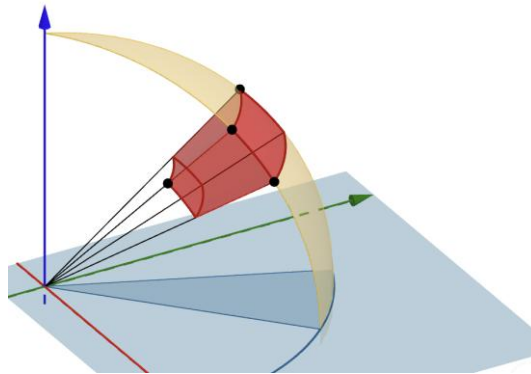
Lahendus



Harjutus 6.

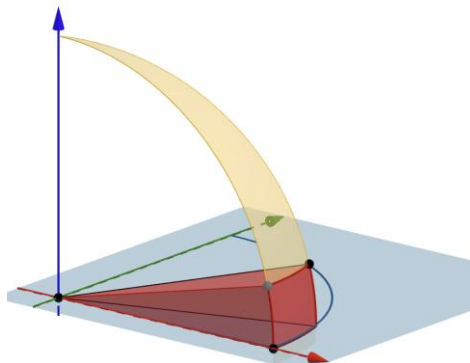
$$\text{Joonistage kogum } \begin{cases} 2 \leq r \leq 4 \\ 30^\circ \leq \alpha \leq 60^\circ \\ 40^\circ \leq \theta \leq 50^\circ \end{cases}$$

Lahendus



Harjutus 7.

Kirjeldage kogumit sfääriliste koordinaatide abil.



## Lahendus

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq 4 \\ 0^\circ \leq \alpha \leq 20^\circ. \\ 0^\circ \leq \theta \leq 20^\circ \end{cases}$$



# Moodul 13: Vektorid, operatsioonid vektoritega, skalaarid

## Õppestsenaariumid koos VR-rakendustega

### Õppestsenaarium 1

#### Tunni pealkiri

Vektorite geomeetiline tõlgendamine kolmemõõtmelises ruumis, operatsioonid vektoritega

#### Õpiväljundid

- Tõlgendab vektoreid kolmemõõtmelises ruumis.

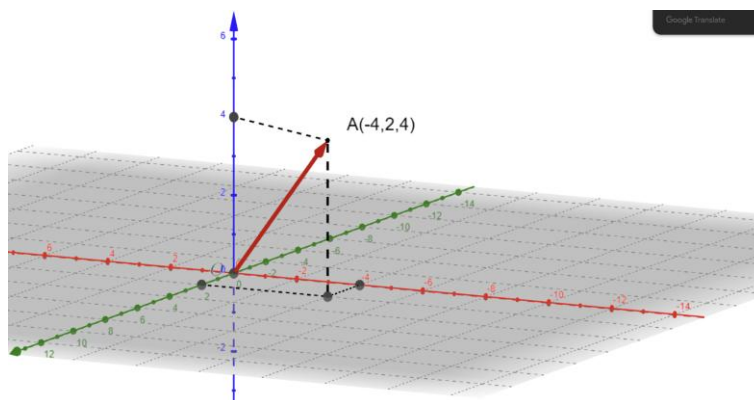
#### Õppetöö käik

##### 1. samm.

Meeldetuletus vektori tõlgendamise kohta tasapinnal ja vektoritega tehtavate operatsioonide kohta.

##### 2. samm.

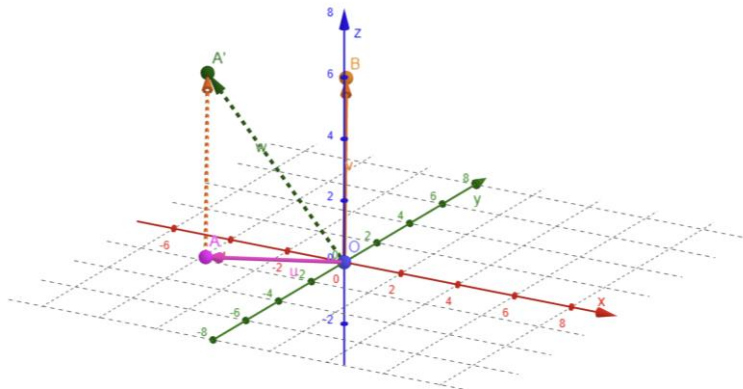
Vektori joonistamine koordinaatidega  $\vec{v} = [-4, 2, 4]$





3. samm.

Vektorite summa esitamine  $\vec{u}, \vec{v}$  kui  $\vec{u} = [-4, -2, 0]$   $\vec{v} = [0, 0, 6]$



4. samm.

Tehakse operatsioon  $\vec{u} + 3\vec{v} - 2\vec{s}$  vektoritega  $\vec{u} = [1, 3, 0]$   $\vec{v} = [-1, 1, 2]$   $\vec{s} = [1, 0, 0]$

Lahendus:  $\vec{u} + 3\vec{v} - 2\vec{s} = [-4, 6, 6]$

Milliseid küsimusi peaksin esitama, et õpilased saaksid oma mõtteid jagada?

Kuidas defineerida vektoreid, operatsioone vektoritega  $n$ -mõõtmelises ruumis?

## Õppestsenaarium 2

Tunni pealkiri

Skalaarprodukt, vektorprodukt kolmemõõtmelises ruumis

Õpiväljundid

- Arvutab skalaar- ja vektorprodukti kolmemõõtmelises ruumis.

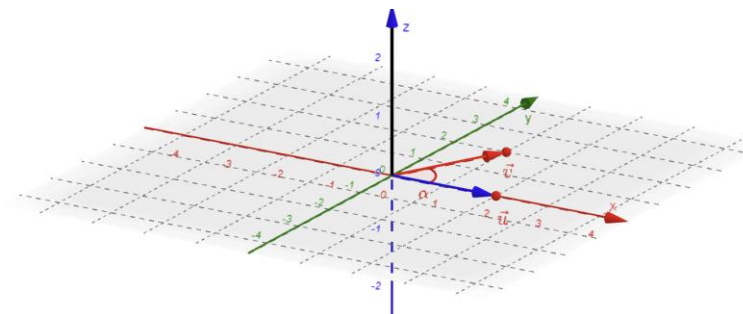
Õppetöö käik

1. samm.

Meeldetuletus skalaarprodukti tõlgendamise kohta tasapinnal.

2. samm.

Vektorprodukti tõlgendamise graafiline esitus vektorite jaoks  $\vec{u}, \vec{v}$  ruumis.



## 3. samm.

Skalaarprodukti arvutamine ruumis vektorite  $\vec{u} = [1,4,0]$ ,  $\vec{v} = [3,1,1]$  jaoks.

## 4. samm.

Vektorprodukti mõiste ja tõlgenduse tutvustamine.

Milliseid küsimusi peaksin esitama, et õpilased saaksid oma mõtteid jagada?

Kuidas defineerida skalaarprodukti ja vektorprodukti  $n$ -mõõtmelises ruumis.

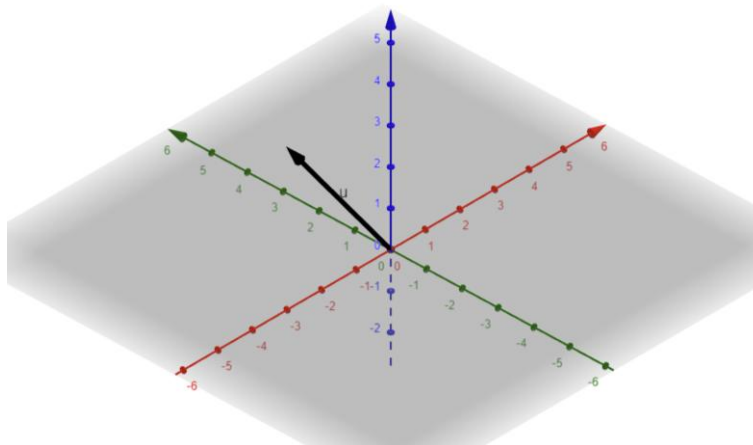
## Ettepanekud ja nõuanded õpetajatele

1. Millised on skalaarprodukti praktilised rakendused?
2. Millised on vektorprodukti praktilised rakendused, nt arvutigraafikas?
3. Arutlege skalaarprodukti põhiomaduste üle.
4. Arutlege vektorprodukti põhiomaduste üle.
5. Kuidas kontrollida, kas vektorid on paralleelsed või risti?
6. Skalaar- või vektorprodukti arvutamiseks saate kasutada programmi WOLFRAM.

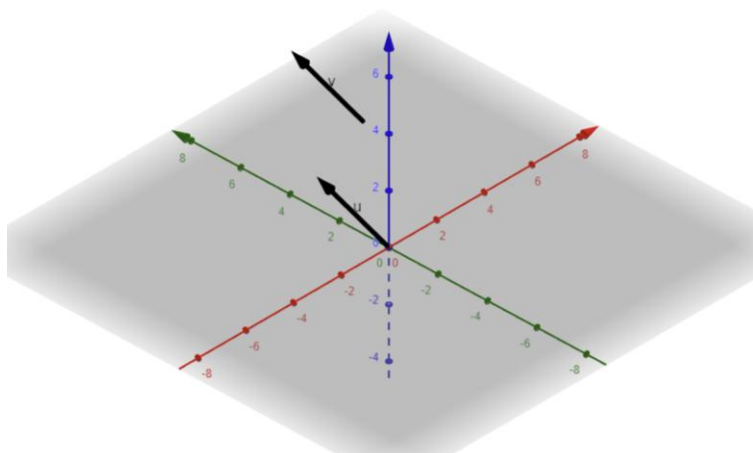
## Töölehed õpilastele

## Harjutus 1.

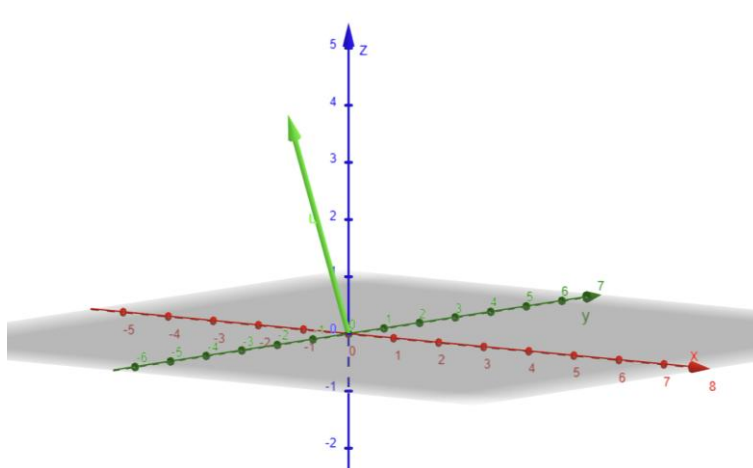
Vektorid  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  on võrdsed. Joonistage vektor  $\vec{v}$ , teades, et  $\vec{u} = [-2,1,3]$



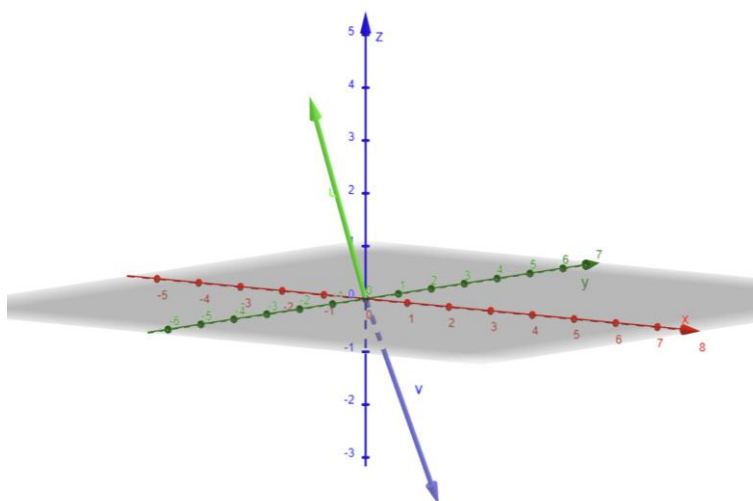
Lahendus



Harjutus 2.

Vektorid  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  on vastupidised. Joonistage vektor  $\vec{v}$ , teades, et  $\vec{u} = [0, 2, 4]$ 

Lahendus



### Harjutus 3.

Arvutage vektori  $\overrightarrow{AB}$  koordinaadid, kui  $A = (2,5,-1)$   $B = (0,2,4)$

Lahendus

$$\overrightarrow{AB} = [-2, -3, 5].$$

### Harjutus 4.

Arvutage vektori  $\vec{u} = [3,4,0]$  pikkus.

Lahendus

$$|\vec{u}| = 5.$$

### Harjutus 5.

Määrake parameetrida  $a, b, c$  nii, et vektorid  $\overrightarrow{AB}$  ja  $\overrightarrow{CD}$  oleksid võrdsed, kui  $A = (2,5,-1)$   $B = (0,2,4)$   $C = (a, 0, c)$   $D = (0, b, 4)$

Lahendus

$$a = 2, \quad b = -3c = -1$$

### Harjutus 6.

Arvutage vektorite  $\vec{u} = [1,4,0]$   $\vec{v} = [3,1,1]$  vektorprodukti.

Lahendus

$$\vec{u} \times \vec{v} = [4, -1, -11].$$

### Harjutus 7.

Arvuta vektorite  $\vec{u} = [3,4,0]$   $\vec{v} = [2,4,1]$  skalaartoot.

Lahendus

$$22.$$

### Harjutus 8.

Kontrollida, kas kolmnurk on täisnurkne, kui  $A = (2,5,-1)$   $B = (0,2,10)$   $C = (0,0,0)$

Lahendus

Jah.

### Harjutus 9.

Tõestage, et  $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$

Lahendus

Oletame, et  $\vec{u} = [a, b, c]$ . Siis  $\vec{u} \cdot \vec{u} = [a, b, c] \cdot [a, b, c] = a^2 + b^2 + c^2 = |\vec{u}|^2$

### Harjutus 10.

Tõestage, et  $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$

Lahendus

Oletame, et  $\vec{u} = [a, b, c]$ . Siis  $\vec{u} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} = \vec{0}$

### Harjutus 11.

Arvuta tahke keha ruumala, mis on määratletud vektoritega  $\vec{u} = [1, 4, 0]$ ,  $\vec{v} = [3, 1, 1]$ ,  $\vec{s} = [1, 1, 0]$

Lahendus

$$\vec{u} \times \vec{v} = [4, -1, -11]. V = \vec{s} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 3.$$