Co-funded by the European Union

MATH 3D GEO VR

Materiały szkoleniowe

dla nauczycieli i studentów

„Modele matematyczne do nauczania geometrii trójwymiarowej z wykorzystaniem rzeczywistości wirtualnej”

„Mathematical models for teaching three-dimensional geometry using virtual reality“

POLSKA WERSJA

Lodz University of Technology
universidade de aveiro theoria poiesis praxis
UNIVERSITY OF ŽILINA
TARTU ÜLIKOOL · UNIVERSITY OF TARTU · 1632
UNIVERSITY OF SILESIA IN KATOWICE

Materiały szkoleniowe dla nauczycieli i studentów „Modele matematyczne do nauczania geometrii trójwymiarowej z wykorzystaniem rzeczywistości wirtualnej"

("Mathematical models for teaching three-dimensional geometry using virtual reality")

Stworzone przez konsorcjum projektu Math3DgeoVR.

Co-funded by the European Union

Dofinansowane ze środków UE (Math3DgeoVR, nr projektu 2021-1-PL01-KA220-HED-000030365). Wyrażone poglądy i opinie są jedynie opiniami autora lub autorów i niekoniecznie odzwierciedlają poglądy i opinie Unii Europejskiej lub Fundacji Rozwoju Systemu Edukacji. Unia Europejska ani Fundacja Rozwoju Systemu Edukacji nie ponoszą za nie odpowiedzialności.

Lodz University of Technology · universidade de aveiro theoria poiesis praxis · University of Žilina · Tartu Ülikool / University of Tartu 1632 · University of Silesia in Katowice

Oculus Quest 2

Wprowadzenie do Oculus Quest 2

Oculus Quest 2, obecnie znany jako **Meta Quest 2**, to samodzielne gogle rzeczywistości wirtualnej oferujące szereg zaawansowanych funkcji. Poniżej znajduje się szczegółowy opis ich możliwości oraz instrukcje dotyczące użytkowania.

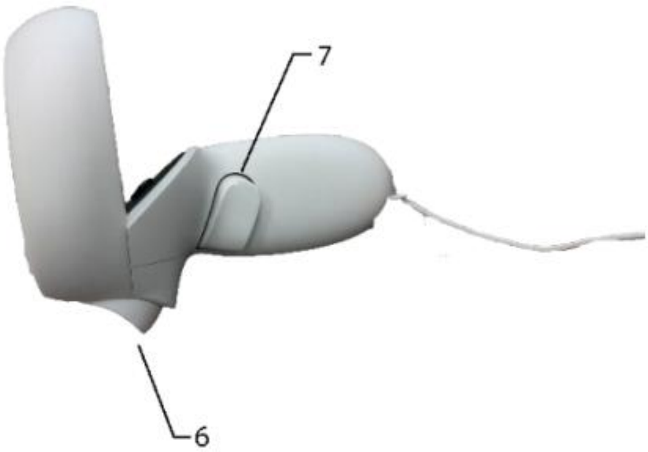
Oculus Quest 2 składa się z dwóch głównych elementów:

- Wyświetlacz mocowany na głowie (HMD).

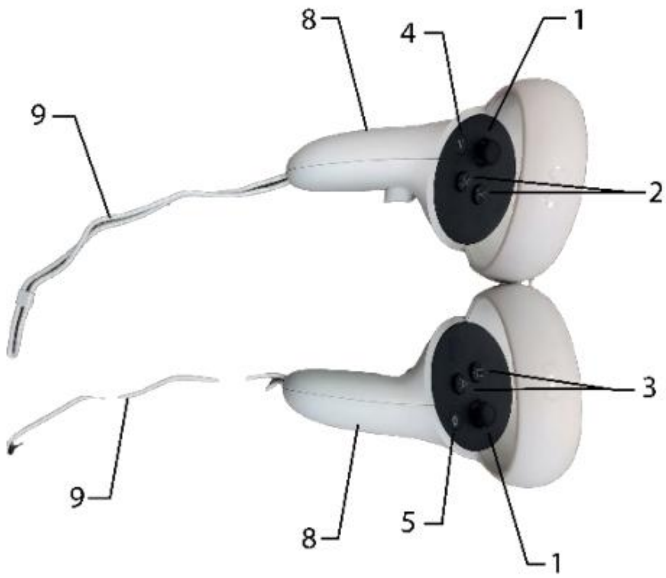
1. Port ładowania
2. Przycisk zasilania
3. Regulacja głośności
4. Port audio
5. Regulacja soczewek
6. Pasek regulacyjny
7. Pasek regulacyjny
8. Przekładka dla okularów (opcjonalna)

Zdjęcie zaadaptowane z przewodnika dla nowych użytkowników Meta Quest 2, University of South Carolina. (b.d.). [Obraz przedstawiający zestaw Meta Quest 2]. W: *Meta Quest 2 New User Guide*. Pobrano z: sc.edu/about/offices_and_divisions/cte/teaching_resources/docs/quest2_user_guide.pdf

- Kontrolery dotykowe



1. Drążki sterujące (joysticki)
2. Przyciski X/Y (lewy kontroler)
3. Przyciski A/B (prawy kontroler)
4. Przycisk menu (lewy kontroler)
5. Przycisk Oculus (prawy kontroler)
6. Przyciski spustowe
7. Przyciski uchwytu
8. Komory na baterie
9. Paski na nadgarstki



Zdjęcie zaadaptowane z przewodnika dla nowych użytkowników Meta Quest 2, University of South Carolina. (b.d.). [Obraz przedstawiający zestaw Meta Quest 2]. W: *Meta Quest 2 New User Guide*. Pobrano z: sc.edu/about/offices_and_divisions/cte/teaching_resources/docs/quest2_user_guide.pdf

Podstawowe funkcje

Wyświetlacze: Gogle wyposażone są w dwa wyświetlacze o rozdzielczości 2064 na 2208 pikseli na oko, co zapewnia wyraźny i szczegółowy obraz.

Procesor: Quest 2 działa na procesorze Qualcomm Snapdragon XR2, który umożliwia płynne działanie gier i aplikacji VR.

Śledzenie ruchu: Gogle oferują śledzenie ruchu w przestrzeni 3D dzięki czterem kamerom umieszczonym na zewnątrz, co pozwala na interakcję z otoczeniem.

Kontrolery: Do zestawu dołączone są kontrolery dotykowe, które umożliwiają precyzyjne sterowanie w wirtualnym świecie.

Funkcje społecznościowe: Użytkownicy mogą brać udział w grach wieloosobowych i wydarzeniach na żywo, wzbogacając swoje doświadczenia w VR.

Kompatybilność z PC: Gogle można podłączyć do komputerów, co umożliwia korzystanie z bardziej wymagających aplikacji VR.

Jak włączyć gogle?

Włączanie Oculus Quest 2

1. Naciśnij przycisk zasilania znajdujący się na górze gogli.
2. Poczekaj, aż system uruchomi się i wyświetli logo Oculus.

Rejestracja konta

Aby korzystać z Oculus Quest 2, konieczne jest posiadanie konta Meta (wcześniej Facebook). Proces rejestracji obejmuje:

1. Pobranie aplikacji Oculus. Aplikację można pobrać z App Store lub Google Play.
2. Logowanie. Użytkownik musi zalogować się na swoje konto Meta.
3. Konfiguracja profilu. Ustawienia preferencji, dodanie informacji o płatnościach oraz utworzenie PIN-u do sklepu Oculus.

Resetowanie gogli

W przypadku problemów z działaniem gogli można je zresetować:

- Reset do ustawień fabrycznych:
    1. Wyłącz gogle.
    2. Naciśnij i przytrzymaj jednocześnie przycisk zasilania i przycisk zmniejszania głośności przez około 10 sekund.
    3. Po pojawieniu się logo Oculus zwolnij przyciski.
    4. Użyj przycisków głośności, aby nawigować i wybierz opcję „Factory Reset”.

- Reset aplikacji. Możesz również zresetować aplikację Oculus na urządzeniu mobilnym, co może pomóc w rozwiązaniu problemów z połączeniem.

Oculus Quest 2 to zaawansowane urządzenie oferujące szerokie możliwości rzeczywistości wirtualnej zarówno dla graczy, jak i osób poszukujących nowych doświadczeń.

Wymagania techniczne Oculus Quest 2

Aby w pełni wykorzystać możliwości Oculus Quest 2, komputer musi spełniać określone wymagania techniczne. Oto najważniejsze z nich:

- Procesor: Intel Core i5-4590 lub AMD Ryzen 5 1500X, lub lepszy.
- Pamięć RAM: minimum 8 GB.
- System operacyjny: Windows 10.
- Karta graficzna: NVIDIA GeForce GTX 1060 lub lepsza, AMD Radeon RX 480 lub lepsza.
- Porty: dostępny port USB.

Należy pamiętać, że powyższe wymagania dotyczą korzystania z Oculus Link, który umożliwia podłączenie gogli do komputera i granie w gry VR z bibliotek Rift lub Steam. Jeśli chcesz używać Quest 2 jako samodzielnego urządzenia, bez podłączania go do komputera, wymagania sprzętowe są mniej restrykcyjne.

Warto również zwrócić uwagę na długość kabla Oculus Link. Zaleca się korzystanie z oryginalnego kabla lub wysokiej jakości zamienników, aby zapewnić optymalną długość i swobodę ruchów podczas rozgrywki.

Możliwe problemy podczas użytkowania

Oculus Quest 2, pomimo swoich zaawansowanych funkcji, może napotkać różne problemy podczas użytkowania. Oto najczęstsze z nich oraz sposoby ich rozwiązania.

Problemy z konfiguracją

Podczas początkowej konfiguracji użytkownicy mogą napotkać kilka trudności:

- **Zatrzymanie podczas aktualizacji**. Gogle mogą nie przejść procesu aktualizacji. W takim przypadku spróbuj ponownie uruchomić urządzenie lub przywrócić je do ustawień fabrycznych, jeśli problem będzie się utrzymywał [1].
- **Kod parowania**. Możesz zostać poproszony o wprowadzenie kodu parowania. Otwórz aplikację Oculus na swoim urządzeniu mobilnym i postępuj zgodnie z instrukcjami, aby kontynuować konfigurację [1].

Problemy z oprogramowaniem

Użytkownicy mogą napotkać problemy z oprogramowaniem, takie jak:

- **Zawieszanie aplikacji.** Aplikacje mogą czasami się zawieszać lub przestawać odpowiadać. W takim przypadku pomocne może być ponowne uruchomienie gogli lub wymuszenie aktualizacji oprogramowania w ustawieniach [1,4].
- **Czarny ekran.** Użytkownicy mogą zobaczyć czarny ekran po zdjęciu gogli. W takim przypadku wystarczy ponownie uruchomić urządzenie, aby przywrócić normalny widok [4].

Problemy z wydajnością

Podczas intensywnego użytkowania mogą wystąpić problemy z wydajnością. Na przykład **przegrzewanie się.** Gogle mogą się nagrzewać, zwłaszcza podczas długiej gry. W takiej sytuacji warto zrobić przerwę, aby urządzenie mogło ostygnąć [2].

Problemy z jakością obrazu

Użytkownicy mogą zauważyć, że jakość obrazu jest niezadowalająca. Może to wynikać z niewłaściwych ustawień lub konieczności aktualizacji oprogramowania [2].

Problemy zdrowotne

Korzystanie z gogli VR może prowadzić do pewnych problemów zdrowotnych. **Choroba VR.** Niektórzy użytkownicy mogą odczuwać objawy podobne do choroby lokomocyjnej, takie jak zawroty głowy lub nudności. Aby zminimalizować te objawy, zaleca się robienie przerw i unikanie długotrwałego użytkowania [6].

Problemy z kontem

Użytkownicy mogą mieć trudności z zalogowaniem się na swoje konto Meta (Facebook). Warto sprawdzić, czy dane logowania są poprawne i czy aplikacja Oculus jest zaktualizowana [1].

Podsumowanie

Oculus Quest 2 to zaawansowane urządzenie, które podczas użytkowania może napotkać różne problemy. Wiele z nich można rozwiązać poprzez aktualizację oprogramowania, ponowne uruchomienie urządzenia lub przywrócenie go do ustawień fabrycznych. W przypadku problemów zdrowotnych zaleca się robienie przerw w użytkowaniu.

Bibliografia

[1] https://vrpolska.eu/poradnik-nowego-posiadacza-questa/
[2] https://mobiletrends.pl/sprawdzamy-gogle-oculus-quest-2-od-facebooka-czy-wprowadza-wirtulana-rzeczywistosc-pod-strzechy/
[3] https://www.youtube.com/watch?v=1uSoGOqmVbE
[4] https://business.oculus.com/support/444171669614375/?locale=pl_PL
[5] https://securecdn.oculus.com/sr/oculusquest-warning-polish
[6] https://motionsystems.pl/vr-sickness/
[7] https://www.meta.com/pl-pl/help/quest/articles/getting-started/getting-started-with-quest-2/what-is-meta-quest-2/
[8] https:// www.meta.com/pl-pl/help/quest/articles/headsets-and-accessories/using-your-headset

Poradnik: Nawigacja po modułach

Kontrolery i ręce

W aplikacji większość interakcji można wykonywać zarówno za pomocą kontrolerów, jak i własnych rąk (jeśli śledzenie dłoni jest włączone w ustawieniach gogli VR). W celu aktywacji funkcji śledzenia dłoni, odłóż kontrolery, aby się nie poruszały, a następnie umieść dłonie w polu widzenia gogli VR. Aby aktywować śledzenie kontrolerów, wystarczy wziąć je do rąk.

Śledzenie dłoni: Aby używać śledzenia dłoni, należy je najpierw włączyć na poziomie systemowym: menu systemowe -> szybkie ustawienia -> ustawienia -> urządzenie -> ręce i kontrolery -> śledzenie dłoni.

Poruszanie się

Za pomocą drążka w lewym kontrolerze można poruszać się do przodu, do tyłu i na boki. Przód zawsze odpowiada kierunkowi, w którym patrzysz. Przesuwając drążek w prawym kontrolerze w lewo lub w prawo, możesz obracać się o 45 stopni.

Teleportacja

Przechylając drążek w prawym kontrolerze do przodu, aktywujesz wskaźnik teleportacji. Skieruj go w wybrane miejsce, a następnie puść drążek – zostaniesz przeniesiony do wskazanego miejsca. Strzałki na końcu wskaźnika pokazują kierunek widoku po teleportacji. Możesz go dostosować, przechylając drążek w bok.

Wskaźnik teleportacji można wywołać prawą ręką, ustawiając ją zgodnie z animacją: dłonie równoległe do ziemi, wyprostowany palec wskazujący skierowany do przodu, kciuk wyprostowany na bok. Zatwierdzenie teleportacji następuje, gdy skierujesz wyprostowany kciuk do przodu.

Chwytanie obiektów

Wsuń koniec kontrolera w chwytalny obiekt i użyj przycisku chwytania na uchwycie kontrolera, aby go złapać. Będziesz trzymać obiekt, dopóki nie puścisz przycisku. Możesz również chwycić taki obiekt ręką, zaciskając wszystkie palce na nim lub chwytając go tylko palcem wskazującym i kciukiem.

Sterowanie interfejsem

Możesz wchodzić w interakcję z elementami interfejsu, używając końcówki kontrolera (mała biała kula). Dotyczy to również różnego rodzaju suwaków i przycisków.

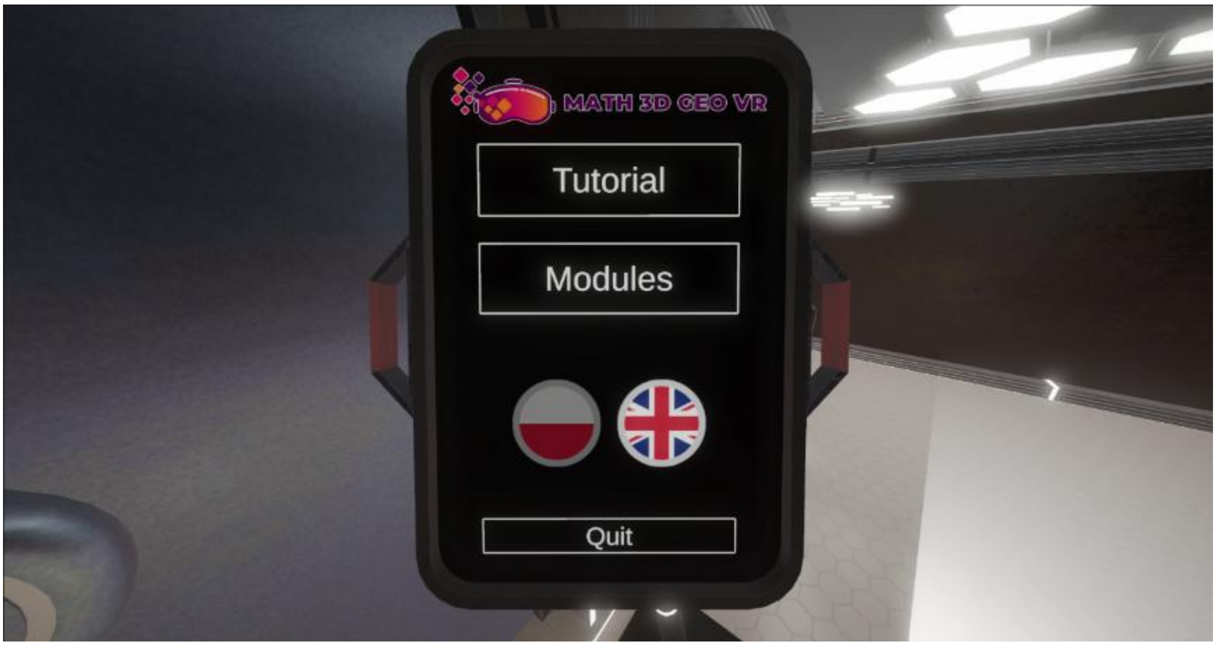
Menu podręczne

Aby wywołać menu podręczne, naciśnij płaski przycisk na lewym kontrolerze lub wykonaj gest szczypania za pomocą palca wskazującego i kciuka lewej ręki, trzymając rękę podniesioną i skierowaną w stronę gogli VR. W ten sam sposób możesz zamknąć to menu.

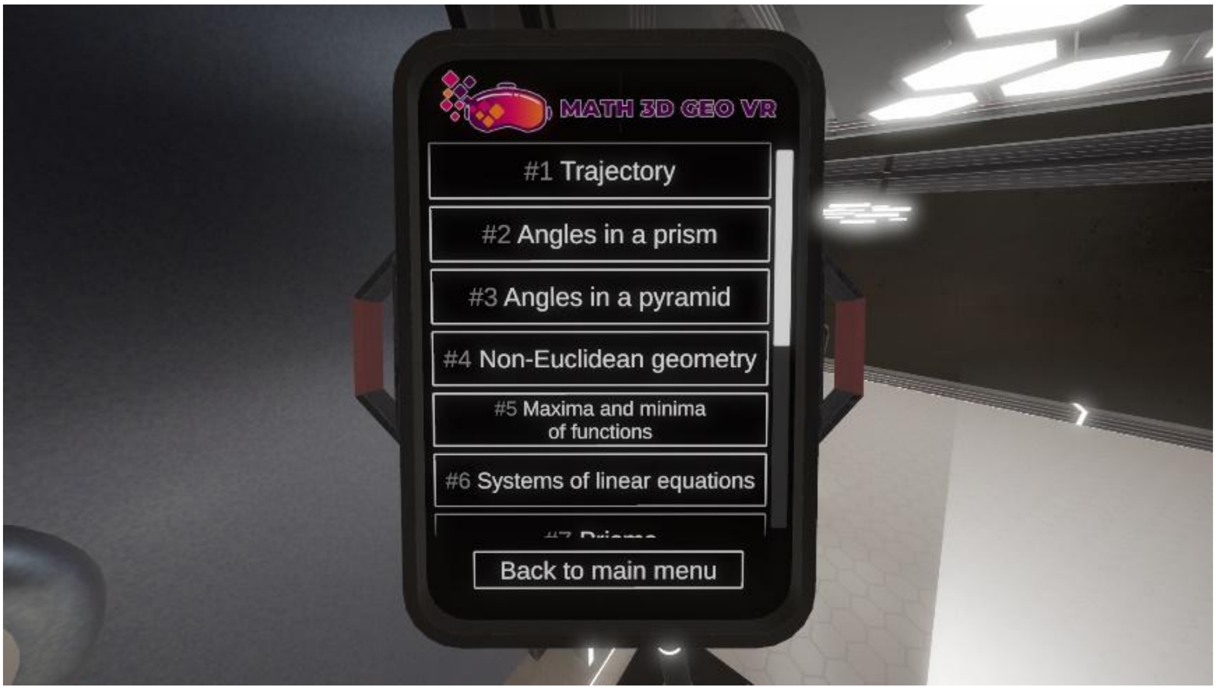
Menu podręczne pozwala w dowolnym momencie wyjść z modułu do głównego menu, czyli bieżącego pokoju, lub opuścić aplikację. Umożliwia także zmianę głośności, przełączanie między trybem siedzącym a stojącym oraz pokazywanie i ukrywanie ekranu w podpowiedzi.

Praca z modułami Math3DGeoVR

W aplikacji dostępne są moduły odpowiadające różnym zagadnieniom matematycznym. Dla każdego z nich istnieje część wprowadzająca, część testowa, a także przykłady praktycznego zastosowania. Główny panel nawigacyjny przedstawiono na rysunku.



Rozpocznij moduł po ukończeniu tutorialu z menu na tym ekranie. Wybierz *Modules*, a następnie naciśnij przycisk odpowiadający wybranemu modułowi.



Wyjście z modułów

W większości przypadków możesz opuścić moduł i wrócić do głównego menu, naciskając przycisk na drzwiach wyjściowych w dowolnym momencie. Możesz również opuścić moduł, naciskając dolny przycisk w menu podręcznym.

Wskazówki

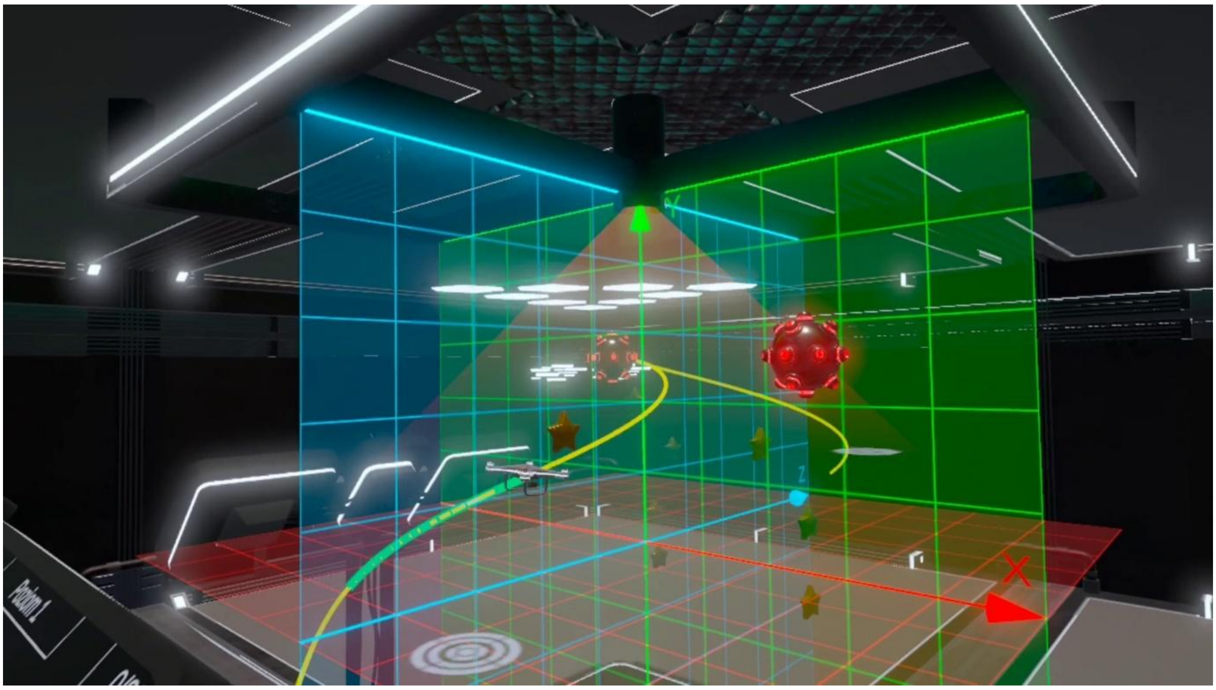
Moduły mogą zawierać dodatkowe ekrany z podpowiedziami dotyczącymi m.in. ich specyficznego sterowania. Aby wyświetlić lub ukryć te ekrany, naciśnij przycisk B na prawym kontrolerze. Możesz także zmienić ich widoczność za pomocą przycisku w menu podręcznym.

Moduły w Aplikacji VR

Moduł 1: Trajektoria

W tym module uczniowie poznają zależność między funkcjami matematycznymi a ich graficznymi reprezentacjami, skupiając się na krzywych przestrzennych. Celem jest zrozumienie, w jaki sposób funkcja jednej zmiennej może opisywać krzywą trójwymiarową, taką jak trajektoria poruszającego się obiektu, na przykład drona. Uczniowie zaprojektują ścieżkę lotu drona, korzystając z dwóch funkcji – jednej opisującej ruch w płaszczyźnie poziomej, a drugiej ruch w pionie. Zadaniem będzie przeprowadzenie drona przez wybrane punkty przy jednoczesnym omijaniu przeszkód. Poprzez manipulację funkcjami uczniowie mogą zwizualizować trasę drona zarówno w przestrzeni 3D, jak i jej rzut na płaszczyznę XY.

Rysunek przedstawia hologram z trajektorią lotu drona.

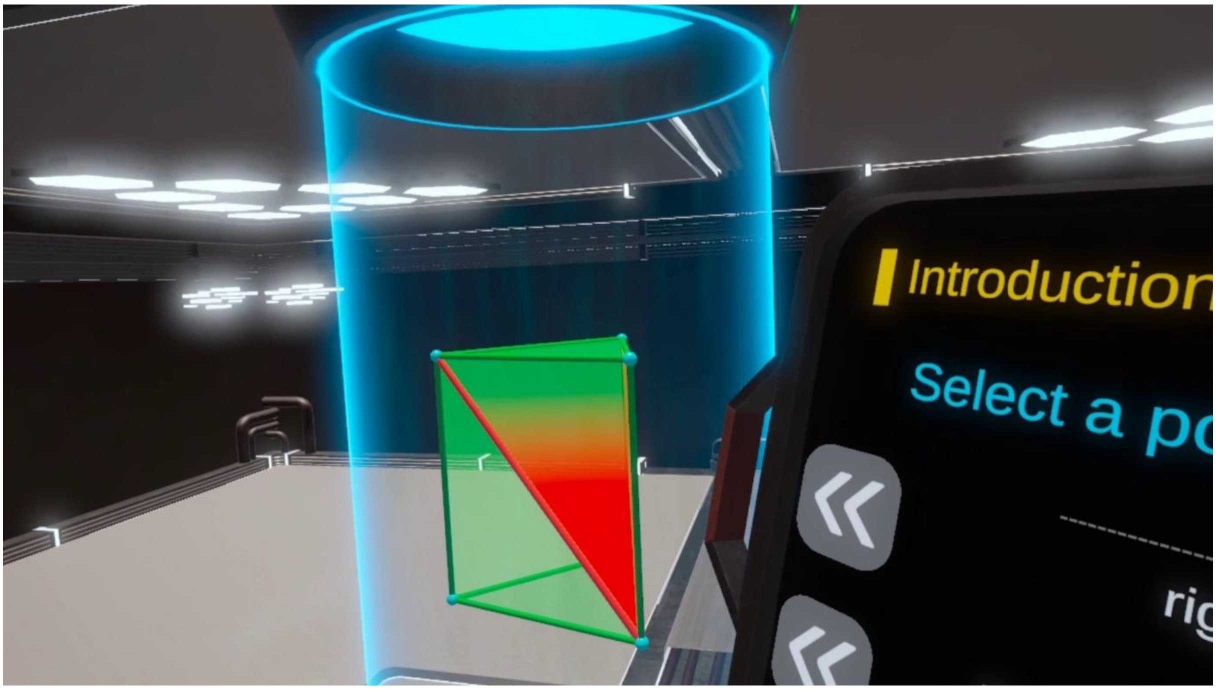


- **Scenariusz zajęć 1:** Wykresy funkcji trygonometrycznych jednej zmiennej
- **Scenariusz zajęć 2:** Funkcja o wartościach wektorowych

Moduł 2: Kąty w graniastosłupie

Temat „Kąty w graniastosłupie" obejmuje analizę kątów tworzonych przez przekątne i krawędzie graniastosłupa. Graniastosłup, jako trójwymiarowa bryła geometryczna, jest jednym z podstawowych obiektów badanych w geometrii przestrzennej. Zrozumienie kątów formujących się między różnymi elementami graniastosłupa jest kluczowe dla pogłębienia wiedzy o geometrii brył oraz jej zastosowań w rozwiązywaniu rzeczywistych problemów. W tym module zapoznasz się z bryłami i kątami. Bryła z przykładem danego kąta pojawi się na hologramie – można ją wyjąć i obejrzeć z bliska.

Rysunek przedstawia hologram z graniastosłupem trójkątnym.

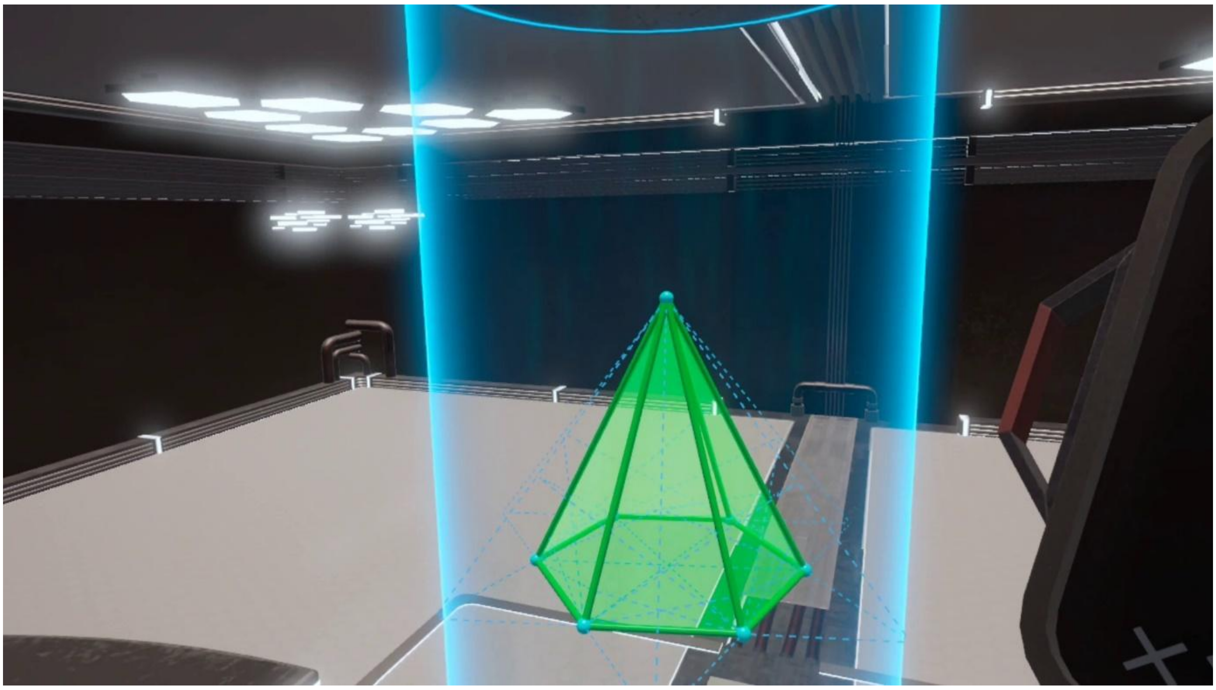


- **Scenariusz zajęć 1:** Kąty w prostopadłościanie
- **Scenariusz zajęć 2:** Obliczanie długości krawędzi, pola powierzchni, objętości w prostopadłościanie

Moduł 3: Kąty w ostrosłupie

W tym module uczniowie nauczą się rozpoznawać, obliczać i rozumieć kąty w ostrosłupach, stosując zasady geometryczne. Ustawienia są podobne do tych z poprzedniego modułu dotyczącego krzywych przestrzennych, jednak teraz uwaga skupia się na analizie i manipulacji kształtami ostrosłupów. Uczniowie będą pracować z różnymi ostrosłupami, realizując różnorodne zadania za pomocą interaktywnych funkcji, takich jak tryb nauki, tryb ćwiczeń i tryb przykładów. Dzięki temu modułowi uczniowie pogłębią swoją wiedzę z zakresu geometrii przestrzennej oraz rozwiną umiejętność obliczania kątów między ścianami, krawędziami i wierzchołkami brył ostrosłupowych.

Rysunek przedstawia hologram z ostrosłupem sześciokątnym.

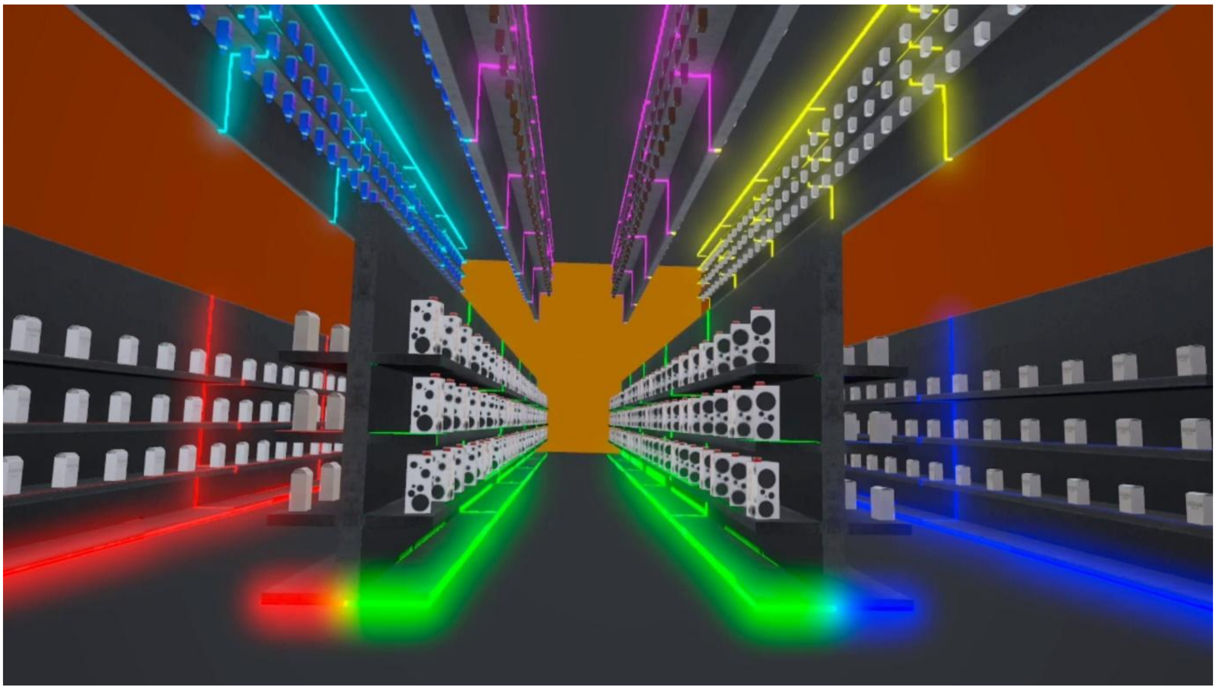


- **Scenariusz zajęć 1:** Ostrosłupy i pole powierzchni całkowitej
- **Scenariusz zajęć 2:** Kąty w ostrosłupie

Moduł 4: Geometria nieeuklidesowa

W tym module uczniowie zgłębią geometrię eliptyczną, gałąź geometrii nieeuklidesowej, która odrzuca piąty postulat Euklidesa, czyli postulat o równoległości. W geometrii eliptycznej dowolne dwie linie przecinają się w jakimś punkcie, co oznacza, że pojęcie linii równoległych nie istnieje. Ma to głębokie konsekwencje dla zrozumienia kształtów i odległości w przestrzeniach zakrzywionych, takich jak powierzchnia Ziemi. Moduł oparty na technologii VR pozwala uczniom doświadczyć geometrii eliptycznej w praktyce, nawigując po budynku, w którym ścieżki przypominają elipsy. Takie podejście praktyczne pomaga uczniom wizualizować i zrozumieć właściwości oraz zasady geometrii nieeuklidesowej w immersyjnym środowisku.

Rysunek przedstawia zaaranżowaną przestrzeń nieeuklidesową – „nieeuklidesowy sklep spożywczy".

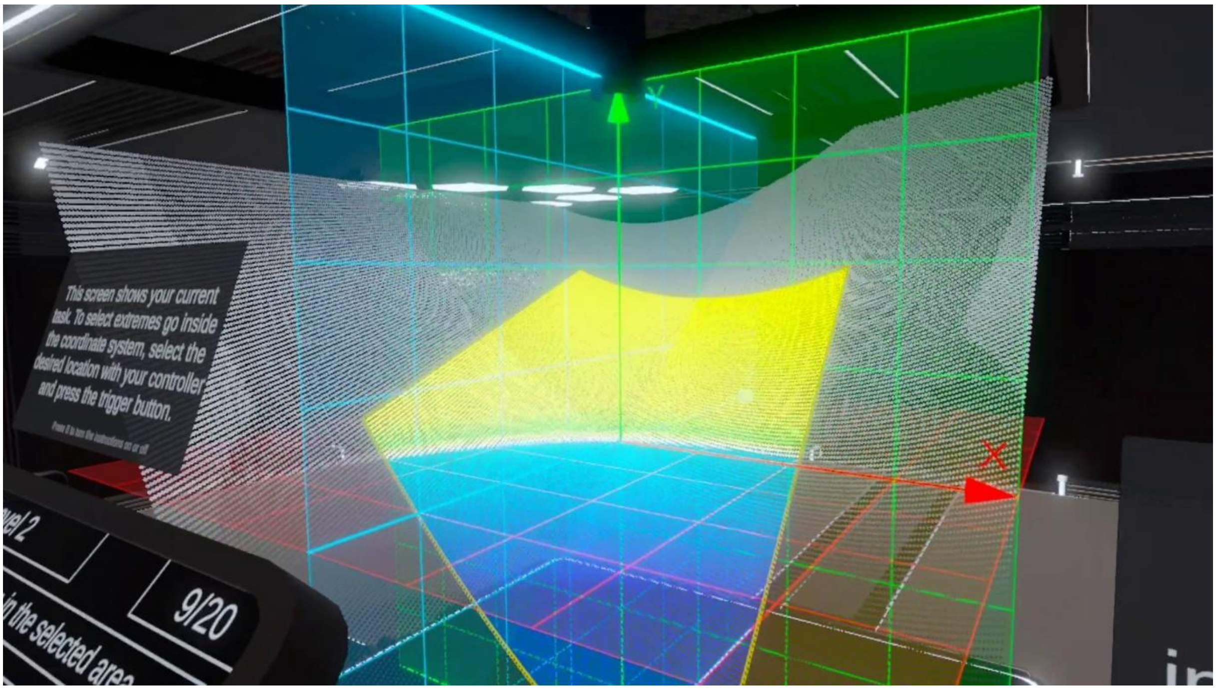


- **Scenariusz zajęć 1:** Geometria euklidesowa
- **Scenariusz zajęć 2:** Podstawy geometrii nieeuklidesowej

Moduł 5: Ekstrema funkcji – maksima i minima

W tym module uczniowie nauczą się znajdować globalne ekstrema (zarówno maksima, jak i minima) funkcji dwóch lub trzech zmiennych. Zadanie jest przedstawione w interaktywny sposób: na centralnym ekranie wyświetlany jest układ trzech równań dla płaszczyzn X, Y i Z. Uczniowie muszą zidentyfikować globalne ekstrema, umieszczając markery (reprezentowane jako sfery) na trójwymiarowej wizualizacji powierzchni generowanej przez te równania. Moduł ten pomaga uczniom zrozumieć, jak interpretować geometrię funkcji i identyfikować punkty krytyczne, w których funkcja osiąga swoje największe lub najmniejsze wartości globalnie, a nie tylko lokalnie.

Rysunek przedstawia hologram z wykresem funkcji.

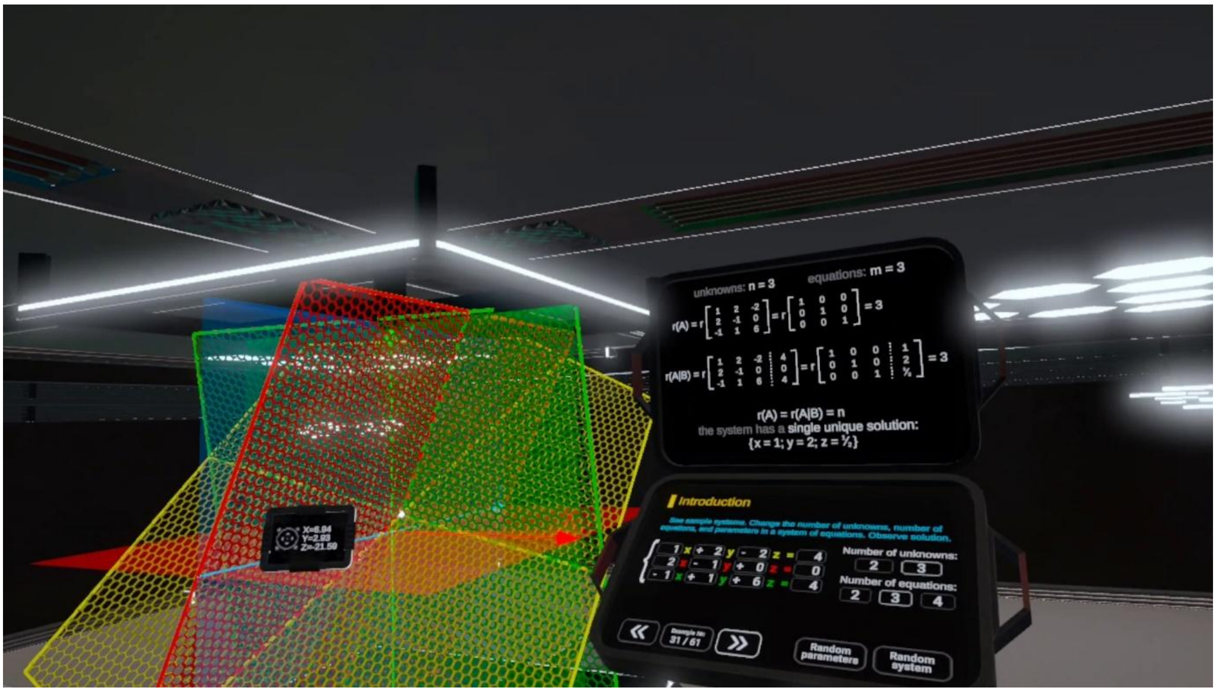


- **Scenariusz zajęć 1:** Lokalne minima i maksima funkcji: definicja, interpretacja geometryczna
- **Scenariusz zajęć 2:** Warunek konieczny i dostateczny ekstremum funkcji dwóch zmiennych

Moduł 6: Układy równań liniowych

W tym module uczniowie będą zgłębiać układy równań liniowych za pomocą interaktywnych wizualizacji. Na głównym ekranie wyświetlane są równania, które uczniowie wprowadzają za pomocą interfejsu na tablecie. Z tabletu można wybierać spośród ponad 60 gotowych przykładów lub modyfikować parametry, takie jak zmienne, równania i współczynniki. Dodatkowo dostępna jest opcja losowego generowania całego układu lub wybranych parametrów, takich jak wartości dla x, y i z. Uczniowie mogą również dostosować liczbę niewiadomych lub równań, co zapewnia elastyczne środowisko zarówno do podstawowych, jak i zaawansowanych zadań. Drugi tablet wyświetla macierze, wyznaczniki oraz rozwiązania tych układów, co pozwala uczniom na eksplorację zastosowań pojęć z algebry liniowej w rozwiązywaniu układów równań.

Rysunek przedstawia hologram z układem równań.

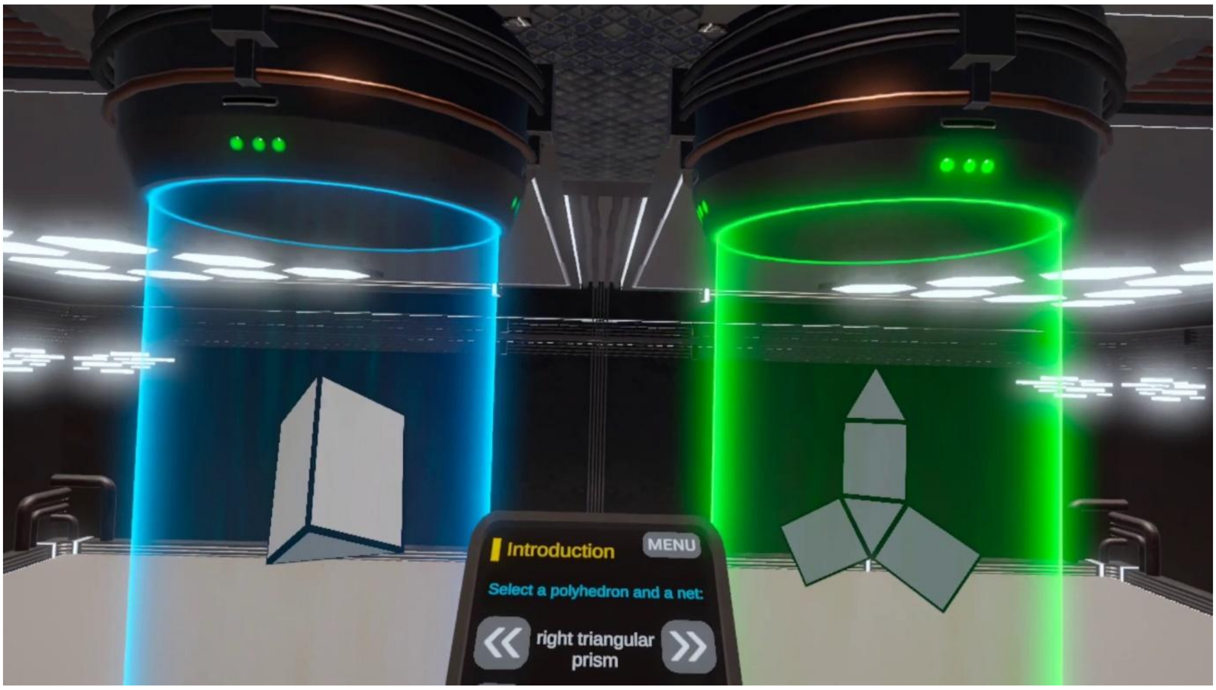


- **Scenariusz zajęć 1:** Interpretacja geometryczna układów równań liniowych w przestrzeniach
- **Scenariusz zajęć 2:** Rozwiązywanie układów równań liniowych

Moduł 7: Graniastosłupy

Ten moduł koncentruje się na geometrii graniastosłupów, ze szczególnym uwzględnieniem zrozumienia ich przestrzennego rozmieszczenia w siatkach. Uczniowie będą wykonywać zadania związane z siatkami graniastosłupów, wizualizując jak te bryły oddziałują w uporządkowanym układzie. Moduł oferuje interaktywne narzędzia do manipulowania płaszczyznami.

Rysunek przedstawia hologramy z graniastosłupem i jego siatką.



- **Scenariusz zajęć 1:** Siatki graniastosłupów
- **Scenariusz zajęć 2:** Obliczanie pola powierzchni całkowitej i objętości graniastosłupów

Moduł 8: Ostrosłupy

Ten moduł koncentruje się na geometrii ostrosłupów, ze szczególnym uwzględnieniem zrozumienia ich przestrzennego rozmieszczenia w siatkach. Uczniowie będą wykonywać zadania związane z siatkami graniastosłupów i ostrosłupów, wizualizując jak te bryły oddziałują w uporządkowanym układzie. Moduł oferuje interaktywne narzędzia do manipulowania płaszczyznami i przeglądania przekrojów.

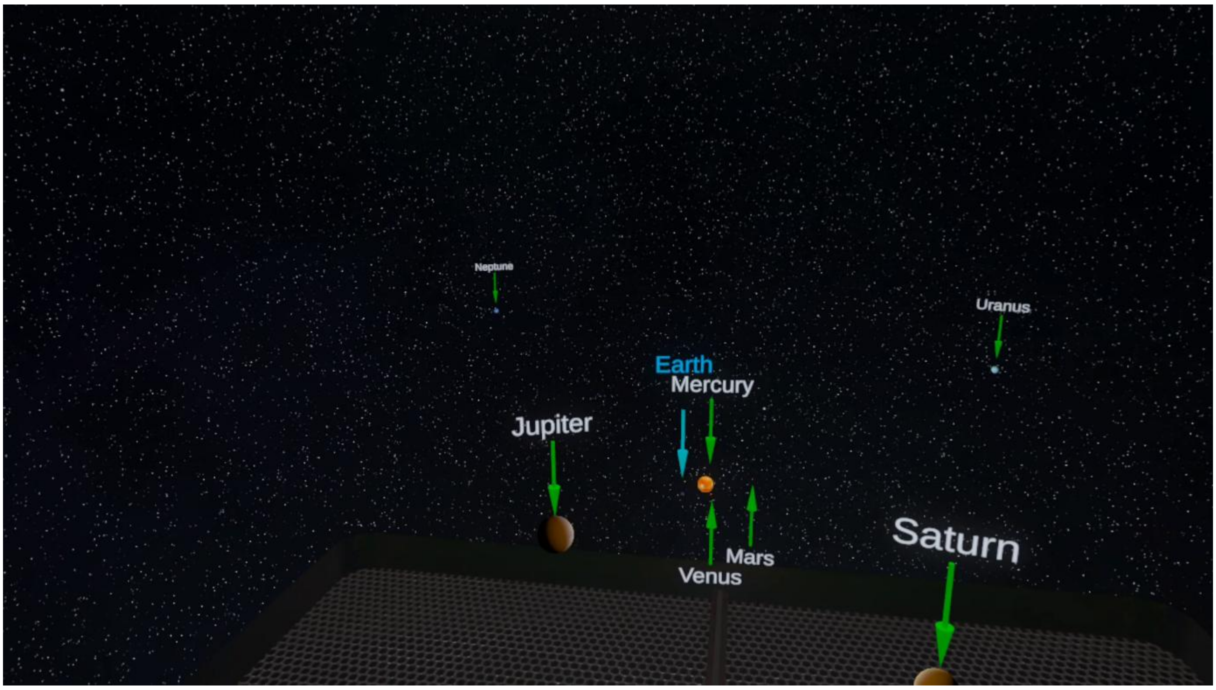
Rysunek przedstawia hologram z ostrosłupem i jego siatką.

- **Scenariusz zajęć 1:** Siatki ostrosłupów
- **Scenariusz zajęć 2:** Objętość ostrosłupa

Moduł 9: Układ planetarny

Ten moduł wprowadza uczniów w mechanikę i geometrię układów planetarnych. Uczniowie będą eksplorować, jak planety krążą wokół centralnej gwiazdy, koncentrując się na wzajemnym oddziaływaniu sił, trajektoriach i kształtach orbit. Dzięki interaktywnym narzędziom będą mogli wizualizować orbity planet w przestrzeni 3D oraz dostosowywać parametry takie jak promień orbity, mimośród i prędkość. Moduł kładzie nacisk na zrozumienie podstawowych praw ruchu planetarnego, takich jak te opisane przez Keplera, unikając przy tym zbyt skomplikowanej matematyki. Uczniowie dowiedzą się, jak orbity mogą być eliptyczne lub kołowe oraz jak grawitacja wpływa na te ruchy.

Rysunek przedstawia wizualizację planet w Układzie Słonecznym.



- **Scenariusz zajęć 1:** Odległości w Układzie Słonecznym
- **Scenariusz zajęć 2:** Porównania wielkości w Układzie Słonecznym

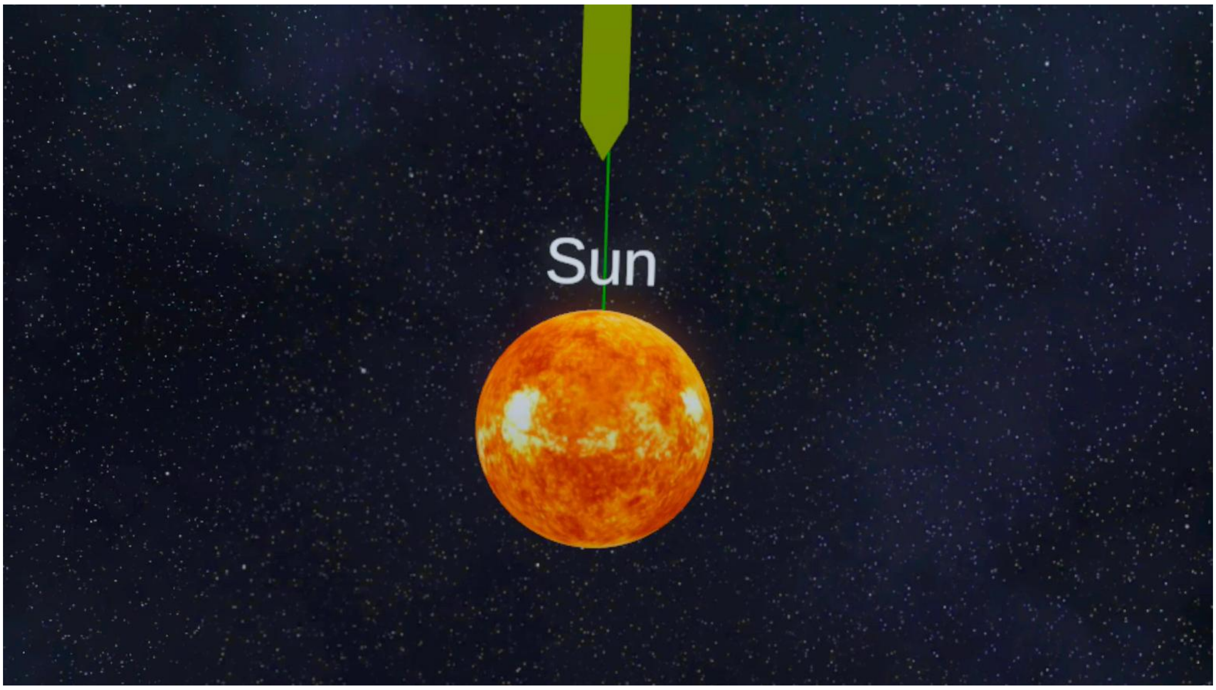
Moduł 10: Misje w Układzie Słonecznym

Ten moduł wprowadza uczniów w tematykę odległości w podróżach kosmicznych. Uczniowie będą eksplorować Układ Słoneczny, poruszając się pomiędzy planetami i wykorzystując znane ludzkości prędkości:

- druga prędkość kosmiczna,
- najwyższa prędkość podczas misji Apollo 11,
- prędkość Parker Solar Probe,
- 1/100 prędkości światła,
- prędkość światła.

Uczniowie dowiedzą się, ile czasu zajmą podróże pomiędzy planetami oraz jak wpływa na nie grawitacja. Podróż ze Słońca na Ziemię z prędkością światła trwa ponad 8 minut, a gdy w końcu dostrzegamy naszą planetę – znika ona w chwilę. Pokazuje to, jak Ziemia jest niewielka w porównaniu do pokonanego dystansu.

Rysunek przedstawia Słońce w Układzie Słonecznym.

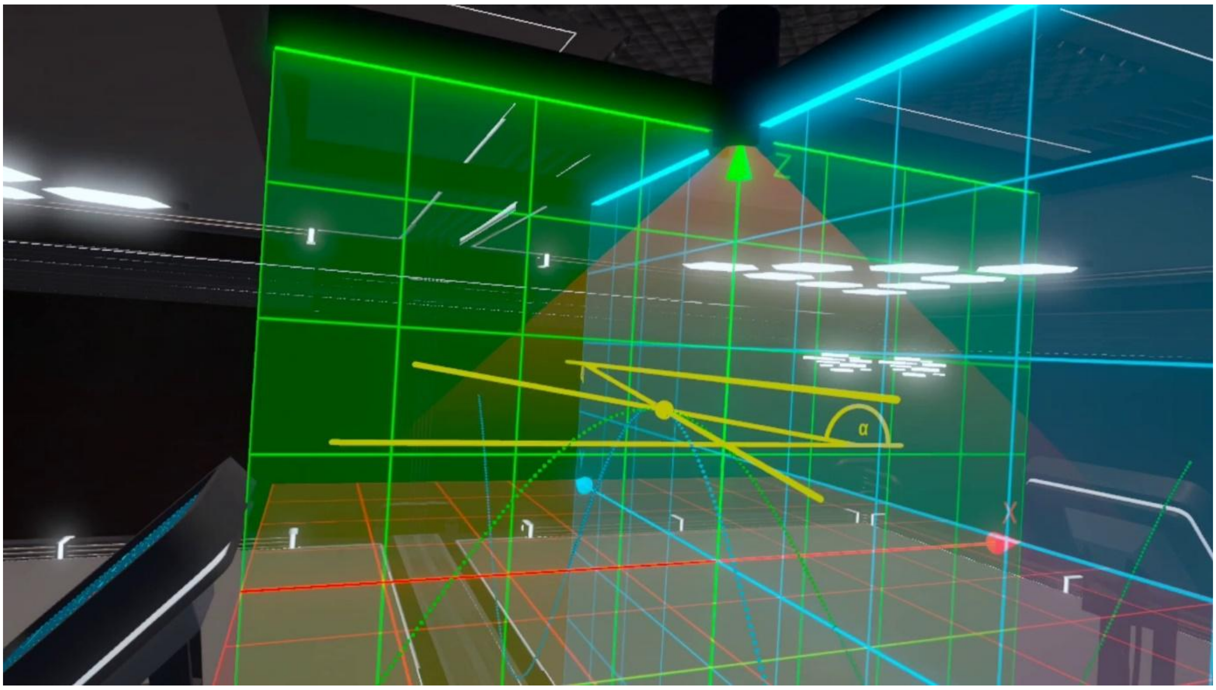


- **Scenariusz zajęć 1:** Eksploracja kosmosu – podstawowe pojęcia
- **Scenariusz zajęć 2:** Podbój kosmosu

Moduł 11: Geometryczna interpretacja pochodnych cząstkowych

W tym module uczniowie zgłębią geometryczne znaczenie pochodnych cząstkowych w rachunku różniczkowym wielu zmiennych. Pochodne kierunkowe reprezentują tempo zmiany funkcji w określonym kierunku, podczas gdy pochodne cząstkowe mierzą zmiany wzdłuż pojedynczej osi. Dzięki interaktywnym wizualizacjom 3D uczniowie będą mogli obserwować, jak nachylenie funkcji zmienia się w zależności od kierunku i pozycji. Moduł pozwala manipulować powierzchniami i wektorami, aby lepiej zrozumieć, w jaki sposób te pochodne są obliczane i stosowane. Takie podejście praktyczne łączy abstrakcyjne formuły matematyczne z ich rzeczywistymi interpretacjami.

Rysunek przedstawia hologram z wykresem funkcji i wizualizacją pochodnej cząstkowej.

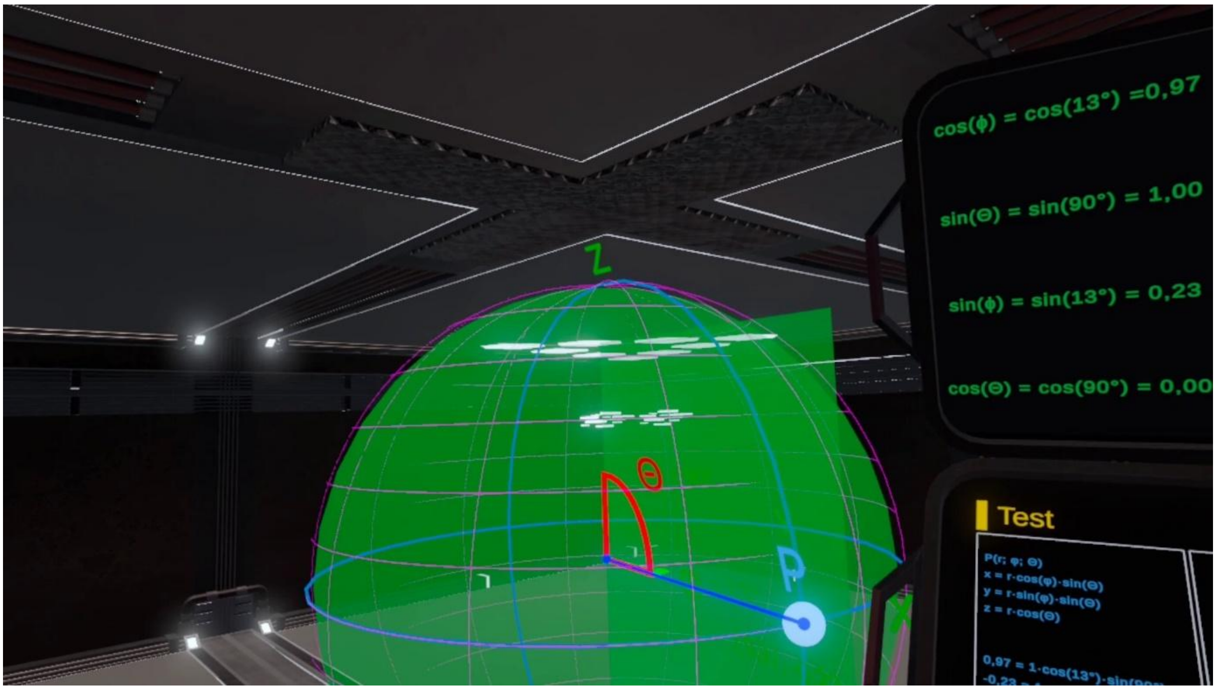


- **Scenariusz zajęć 1:** Interpretacja geometryczna pochodnych cząstkowych
- **Scenariusz zajęć 2:** Obliczanie pochodnych cząstkowych

Moduł 12: Współrzędne sferyczne

W tym module uczniowie zgłębią koncepcję współrzędnych sferycznych, systemu używanego do opisu punktów w przestrzeni trójwymiarowej. W przeciwieństwie do współrzędnych kartezjańskich, współrzędne sferyczne określają położenie punktu za pomocą trzech wartości: odległości radialnej (r), kąta polarnego (θ) oraz kąta azymutalnego (ϕ). Ten system współrzędnych jest szczególnie przydatny w problemach dotyczących symetrii wokół punktu centralnego, takich jak zagadnienia z fizyki czy inżynierii. Moduł zawiera interaktywne wizualizacje, w których uczniowie mogą manipulować tymi parametrami, aby zobaczyć, jak zmienia się pozycja punktu w przestrzeni 3D. Dodatkowo uczniowie będą ćwiczyć konwersję współrzędnych kartezjańskich na sferyczne i odwrotnie, a także rozwiązywanie zadań polegających na całkowaniu funkcji na obszarach sferycznych.

Rysunek przedstawia hologram z wizualizacją współrzędnych sferycznych.

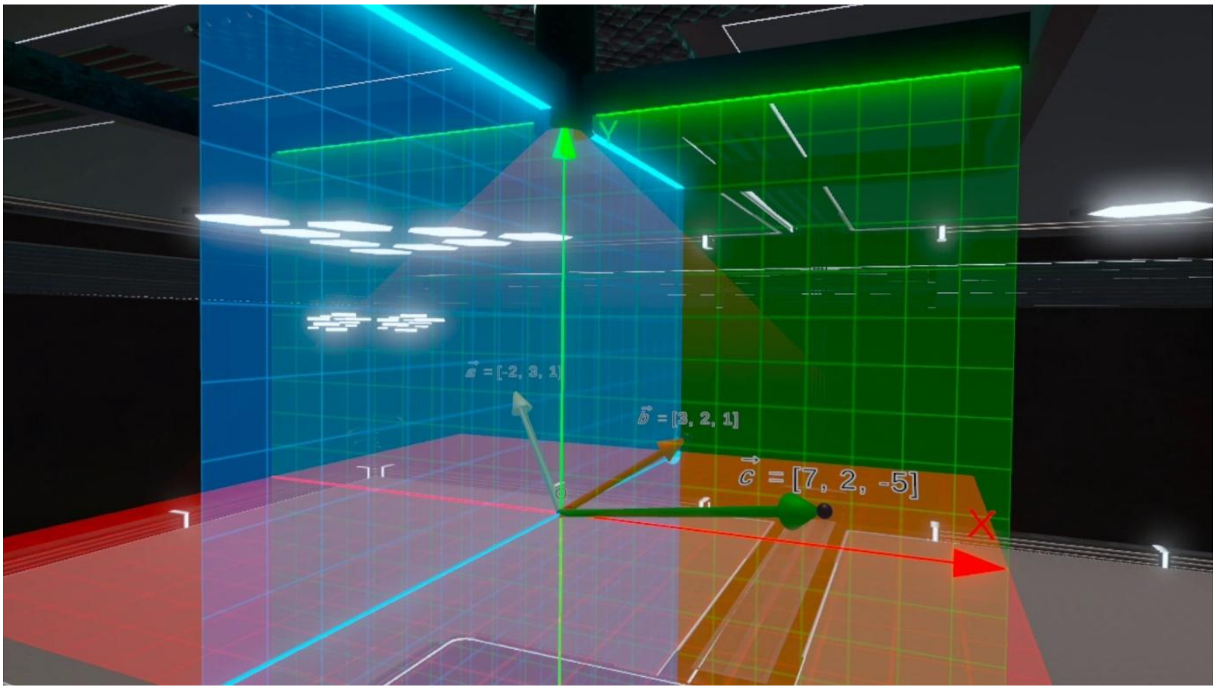


- **Scenariusz zajęć 1:** Współrzędne biegunowe
- **Scenariusz zajęć 2:** Współrzędne sferyczne

Moduł 13: Wektory, działania na wektorach

Ten moduł wprowadza uczniów do pojęcia wektorów oraz podstawowych operacji na nich. Wektory to obiekty matematyczne posiadające zarówno wielkość, jak i kierunek, co czyni je niezbędnym narzędziem do opisu wielkości fizycznych i relacji przestrzennych.
Uczniowie poznają takie operacje jak dodawanie, odejmowanie, mnożenie przez skalar, normalizację oraz obliczanie długości wektora. Moduł oferuje interaktywne wizualizacje, w których uczniowie mogą manipulować wektorami w przestrzeni 2D i 3D, obserwować efekty operacji oraz zrozumieć ich geometryczne interpretacje.

Rysunek przedstawia hologram z wektorami w przestrzeni 3D.



- **Scenariusz zajęć 1:** Interpretacja geometryczna wektorów w przestrzeni trójwymiarowej, działania na wektorach
- **Scenariusz zajęć 2:** Iloczyn skalarny, iloczyn wektorowy w przestrzeni trójwymiarowej

Moduł 1: Trajektoria

Scenariusze zajęć z wykorzystaniem aplikacji VR

Scenariusz zajęć 1

Temat zajęć

Wykresy funkcji trygonometrycznych jednej zmiennej

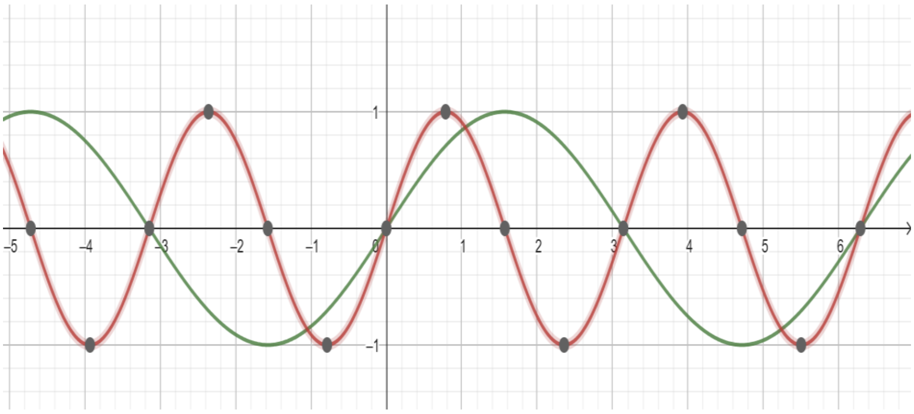
Efekty uczenia się

- Rysuje funkcje $f(x) = a\sin(x - b) + c$.
- Interpretuje parametry a, b, c dla funkcji $f(x) = a\sin(x - b) + c$.

Przebieg zajęć

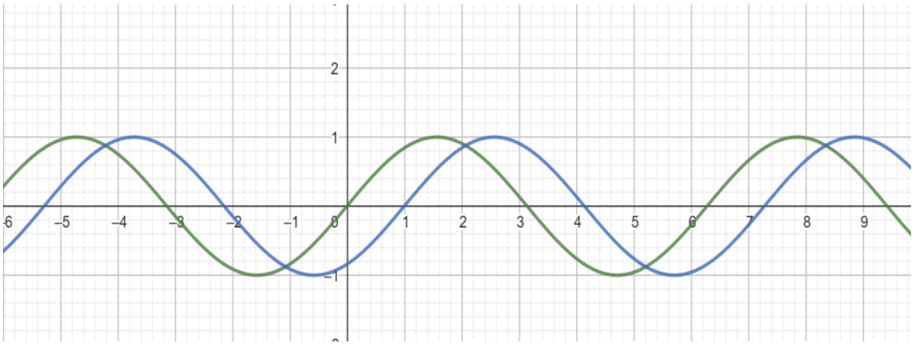
Krok 1.

Narysuj wykresy funkcji $\sin(x)$ i $\sin(2x)$. Omów, w jaki sposób współczynnik a wpływa na wykres funkcji $f(x) = \sin(ax)$.



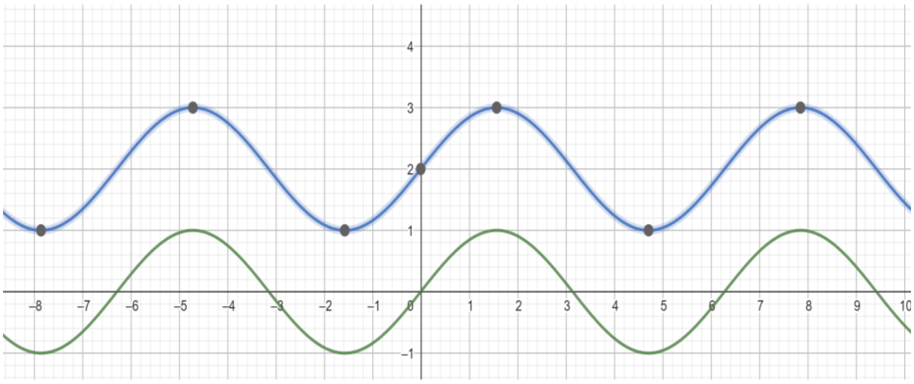
Krok 2.

Narysuj wykresy funkcji $\sin(x)$ i $\sin(x - 1)$. Omów, w jaki sposób współczynnik a wpływa na wykres funkcji $f(x) = \sin(x - a)$.



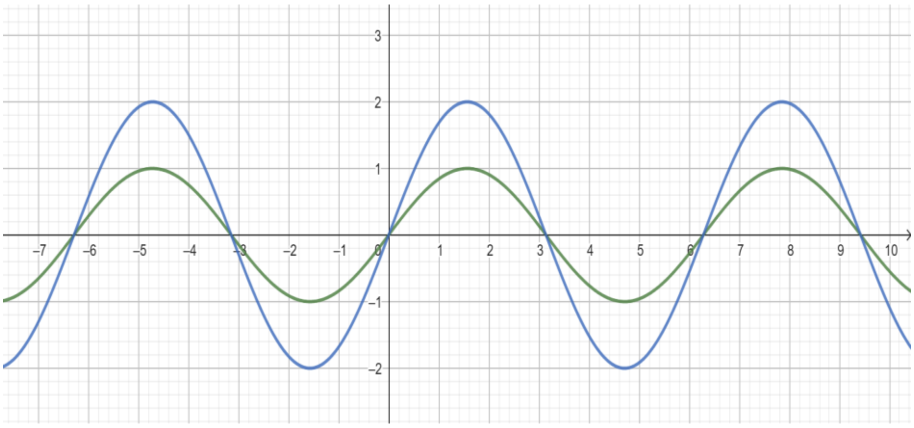
Krok 3.

Narysuj wykresy funkcji $\sin(x)$ i $\sin(x) + 2$. Omów, w jaki sposób współczynnik a wpływa na wykres funkcji $f(x) = \sin(x) + a$.



Krok 4.

Narysuj wykresy funkcji $\sin(x)$ i $2 \cdot \sin(x)$. Omów, w jaki sposób współczynnik a wpływa na wykres funkcji $f(x) = a \cdot \sin(x)$.



Krok 5.

Powtórz kroki 1, 2, 3 i 4 dla funkcji $\cos(x)$.

Krok 6.

Narysuj wykres funkcji $f(x) = 2\sin(x - 1) + 2$.

Jakie pytania zadać, aby studenci mogli podzielić się swoimi przemyśleniami?

Jak zmienia się zbiór wartości funkcji $f(x) = a\sin(x - b) + c$ w zależności od parametrów a, b, c?

Scenariusz zajęć 2

Temat zajęć

Funkcja o wartościach wektorowych

Efekty uczenia się

- Posługuje się funkcją o wartościach wektorowych.
- Analizuje funkcję o wartościach wektorowych.

Przebieg zajęć

Krok 1.

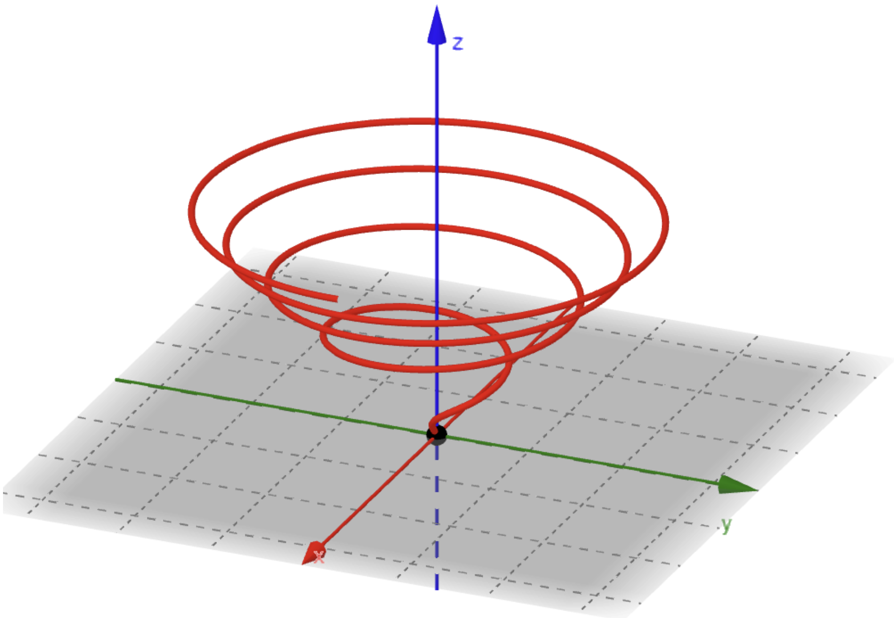
Wprowadzenie definicji funkcji wektorowej o trzech współrzędnych.

Funkcję wektorową o trzech współrzędnych nazywamy funkcję postaci $f(t) = [x(t), y(t), z(t)]$, gdzie $x(t), y(t), z(t)$ są funkcjami skalarnymi zmiennej t.

Przykłady funkcji.

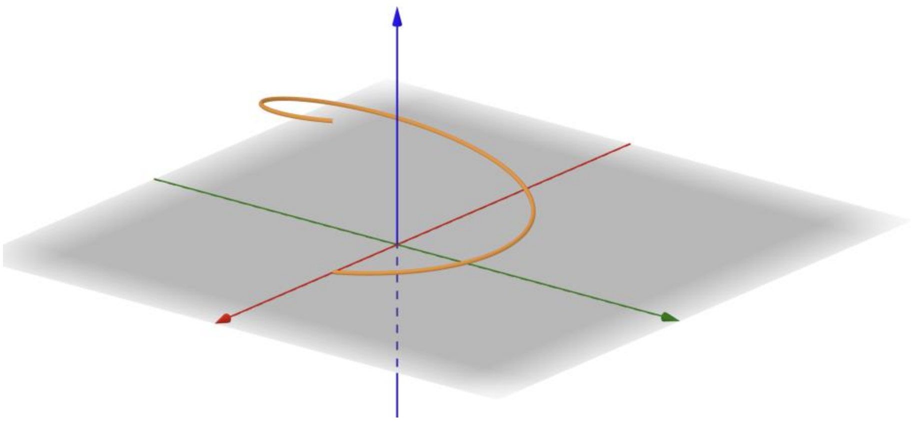
Krok 2.

Funkcja dana parametrycznie $[t, \sqrt{t}\sin(t), \sqrt{t}\cos(t)]$, gdzie t jest dowolną liczbą rzeczywistą.



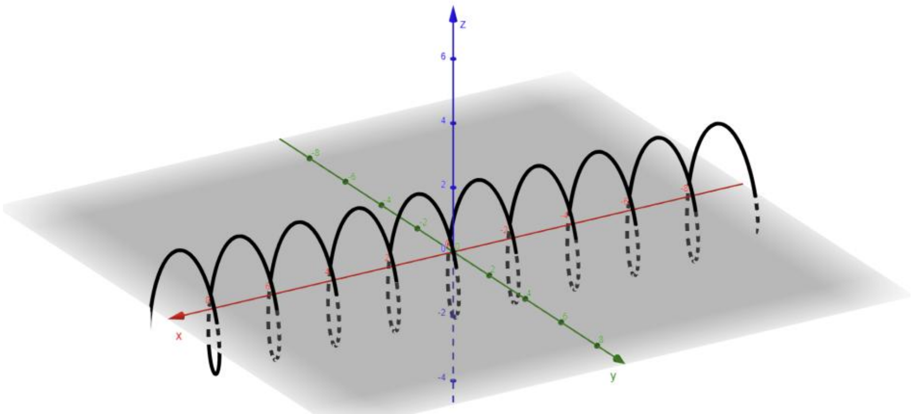
Krok 3.

Funkcja dana parametrycznie $[2\cos(t), 3\sin(t), t]$, gdzie t jest dowolną liczbą rzeczywistą.



Krok 4.

Funkcja dana parametrycznie $[t, \sin(\pi t), \cos(\pi t)]$, gdzie t jest dowolną liczbą rzeczywistą.



Krok 5.

Narysuj wykres funkcji $[t, 0, t^2]$.

Krok 6.

Dokonaj analizy funkcji $[t, a_1\sin(t) + b_1\cos(t), a_2\sin(t) + b_2\cos(t)]$.

Jakie pytania zadać, aby studenci mogli podzielić się swoimi przemyśleniami?

Jak wprowadzić pojęcie funkcji, której wartościami są wektory n-wymiarowe?

Sugestie i wskazówki dla nauczycieli

1. Pytanie dla studentów: Jak wprowadzić pojęcie pochodnej funkcji wektorowej?

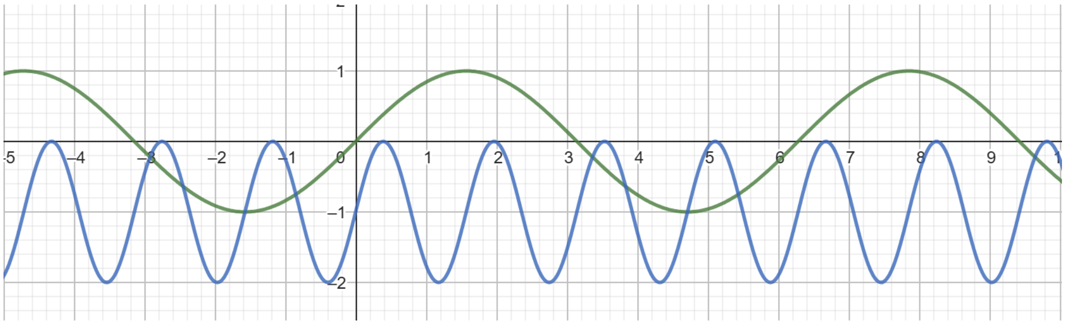
2. Pytanie dla studentów: Jak wprowadzić pojęcie funkcji wektorowej dwóch zmiennych?
3. Wprowadzić pojęcie rotacji funkcji wektorowej i pokazać zastosowania.
4. Do rysowania funkcji wektorowych możesz skorzystać z programu WOLFRAM.

Karty pracy dla studentów

Zadanie 1.

Narysuj wykres funkcji $f(x) = \sin(4x) - 1$.

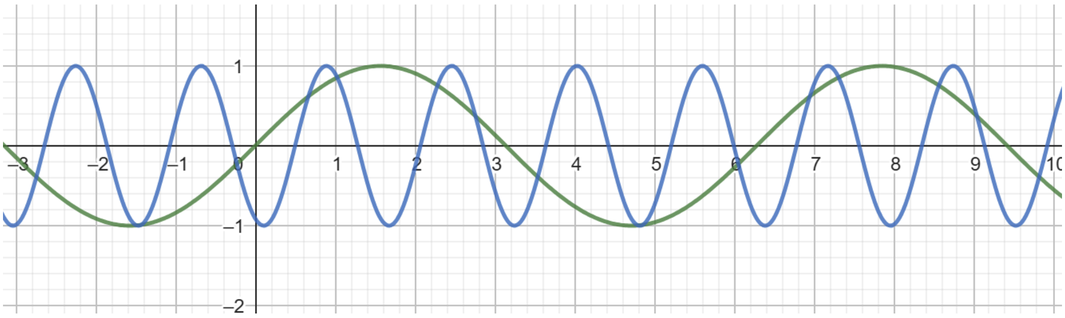
Rozwiązanie



Zadanie 2.

Narysuj wykres funkcji $f(x) = \sin(4x - 2)$.

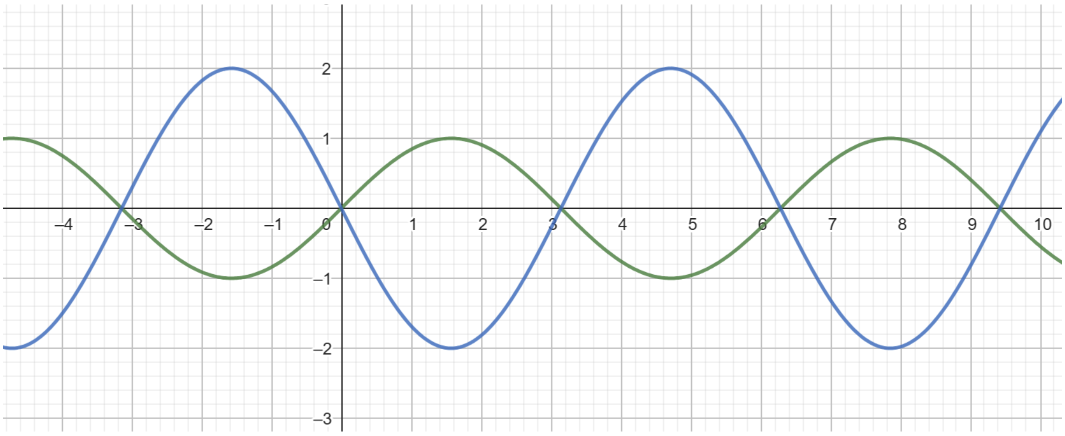
Rozwiązanie



Zadanie 3.

Narysuj wykres funkcji $f(x) = -2\sin(x)$.

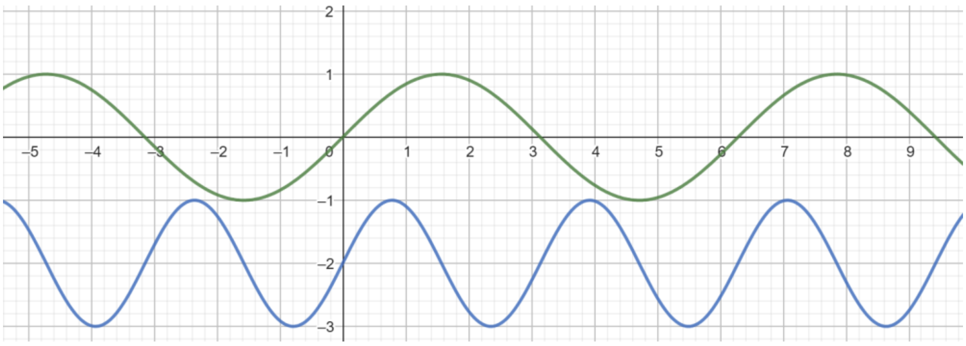
Rozwiązanie



Zadanie 4.

Narysuj wykres funkcji $f(x) = -\sin(2x) + 1$.

Rozwiązanie



Zadanie 5.

Wyznacz dziedzinę funkcji wektorowej $f(t) = [\sqrt{t}, t, \frac{1}{t-2}]$.

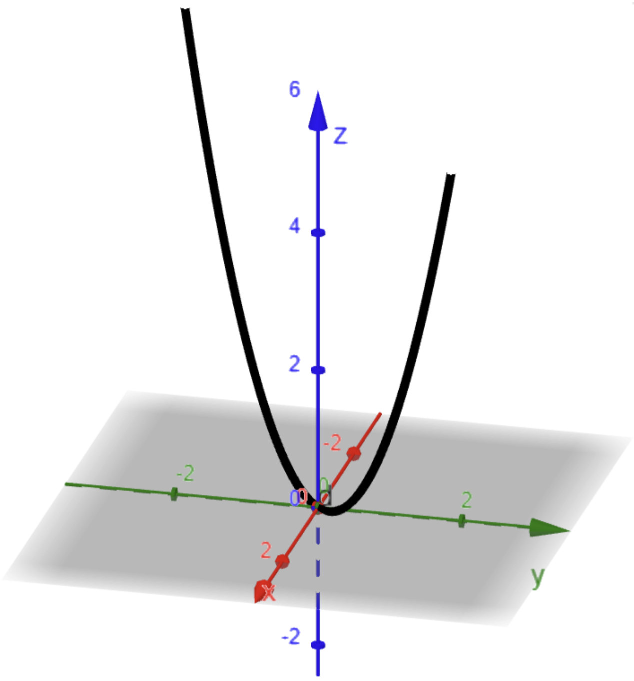
Rozwiązanie

$t \in < 0,2) \cup (2, \infty)$.

Zadanie 6.

Narysuj wykres funkcji wektorowej $f(t) = [t, t, t^2]$ dla $t \in < -3,3 >$.

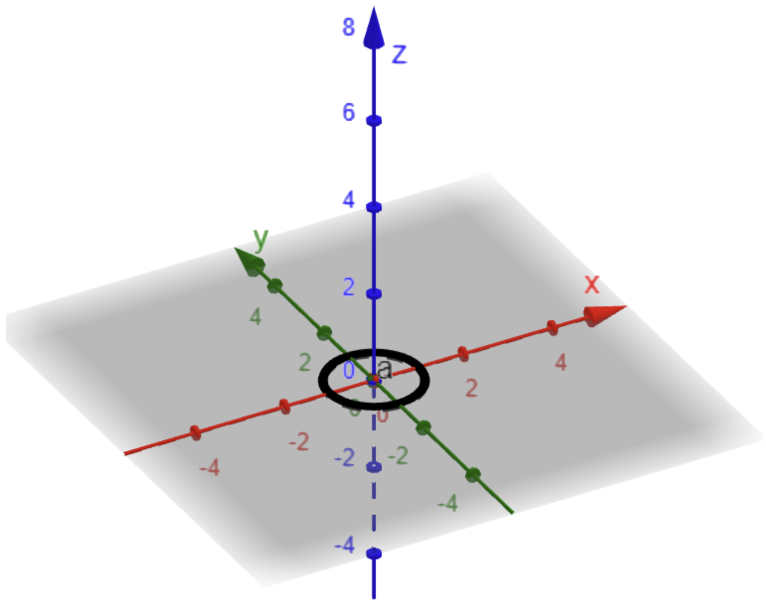
Rozwiązanie



Zadanie 7.

Narysuj wykres funkcji wektorowej $f(t) = [\sin(t), \cos(t), 0]$ dla $t \in < 0, 2\pi >$.

Rozwiązanie



Zadanie 8.

Oblicz wartość funkcji wektorowej $f(t) = [t, 2\sin(t) + \cos(t), \sin(t) - \cos(t)]$ dla $t = 0$.

Rozwiązanie

$f(t) = [0, 1, -1]$.

Moduł 2: Kąty w graniastosłupie

Scenariusze zajęć z wykorzystaniem aplikacji VR

Scenariusz zajęć 1

Temat zajęć

Kąty w prostopadłościanie

Efekty uczenia się

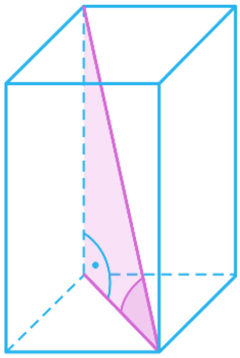
- Rozpoznaje kąty w prostopadłościanie.

Przebieg zajęć

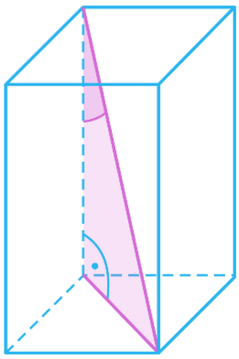
Krok 1.

Wprowadzenie definicji.

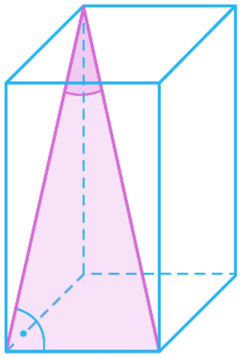
Kąt między przekątną prostopadłościanu a przekątną podstawy.



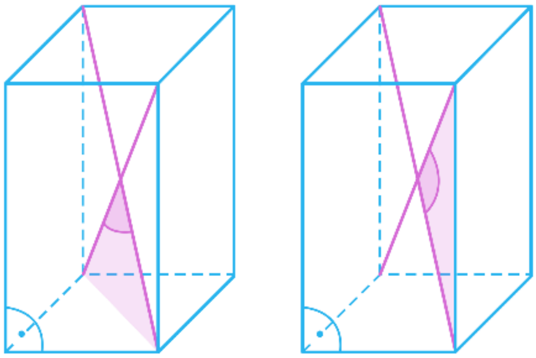
Kąt między przekątną prostopadłościanu a krawędzią boczną.



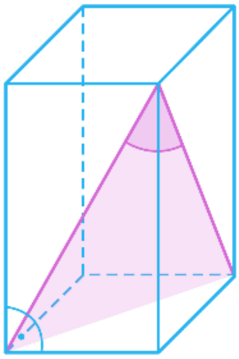
Kąt między przekątną prostopadłościanu a przekątną ściany bocznej.



Kąt między przekątnymi prostopadłościanu.

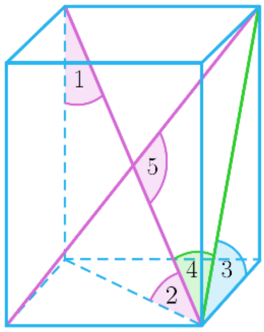


Kąt między przekątnymi sąsiednich ścian bocznych.



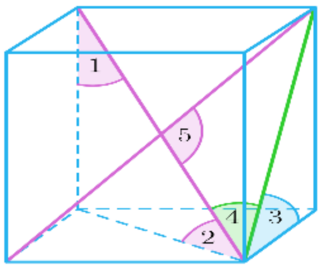
Krok 2.

Podanie nazw wszystkich kątów: 1, 2, 3, 4 i 5.



Krok 3.

Wyznaczanie miar wszystkich kątów dla sześcianu.



Jakie pytania zadać, aby studenci mogli podzielić się swoimi przemyśleniami?

Jaki jest zakres miar kątów: 1, 2, 3, 4 w prostopadłościanie? Jaka jest najmniejsza miara kąta, a jaka największa?

Scenariusz zajęć 2

Temat zajęć

Obliczanie długości krawędzi, pola powierzchni, objętości w prostopadłościanie

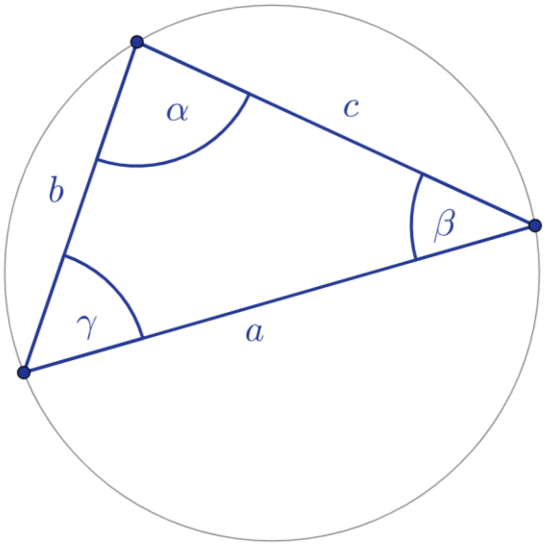
Efekty uczenia się

- Wykorzystuje kąty w prostopadłościanie do obliczeń długości krawędzi, pola powierzchni i objętości.

Przebieg zajęć

Krok 1.

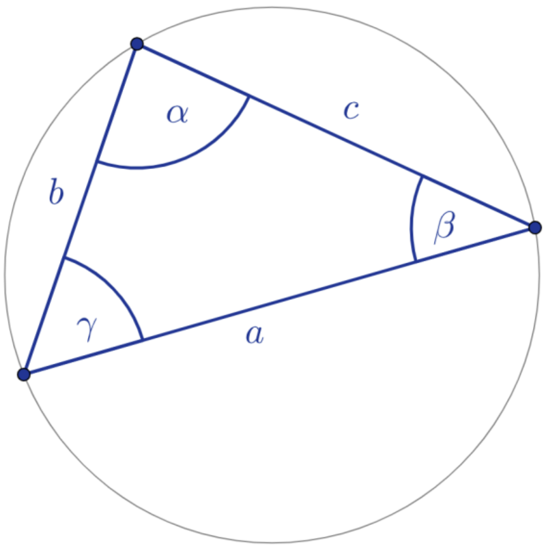
Przypomnienie twierdzenia sinusów.



$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Krok 2.

Przypomnienie twierdzenia kosinusów.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2ab\cos(\alpha)$$

Uzupełnij pozostałe zależności:

$$b^2 = a^2 + \ldots .^2 - 2 \ldots \cos(\ldots)$$

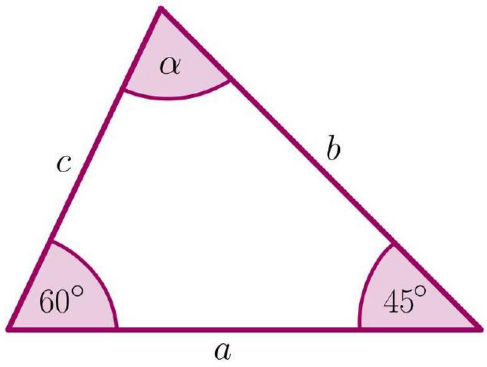
$$c^2 = a^2 + \ldots.^2 - 2 \ldots \cos(\ldots)$$

Krok 3.

Obliczenia z wykorzystaniem twierdzenia sinusów i kosinusów.

Zadanie 1.

Oblicz długość odcinka b, jeśli $c = 5$.

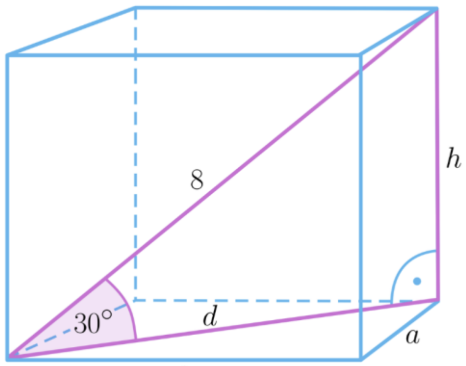


Krok 4.

Obliczenia długości krawędzi, pola powierzchni i objętości w prostopadłościanie.

Zadanie 2.

Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość prostopadłościanu, jeśli w podstawie jest kwadrat.



Jakie pytania zadać, aby studenci mogli podzielić się swoimi przemyśleniami?

W jakich sytuacjach wykorzystuje się twierdzenie sinusów, a w jakich kosinusów?

Sugestie i wskazówki dla nauczycieli

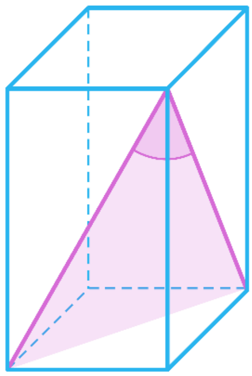
1. Pytanie dla studentów: Czy można udowodnić twierdzenie Pitagorasa, stosując twierdzenie kosinusów?

2. Pytanie dla studentów jako praca własna: Jak kąty w graniastosłupach są wykorzystywane w architekturze?
3. Czy da się skonstruować graniastosłup, w którym wszystkie kąty między krawędziami bocznymi a podstawami są równe? Uzasadnij.
4. Do obliczeń trygonometrycznych możesz skorzystać z programu WOLFRAM.

Karty pracy dla studentów

Zadanie 1.

Podaj nazwę kąta.



Rozwiązanie

Kąt między przekątnymi ścian bocznych prostopadłościanu.

Zadanie 2.

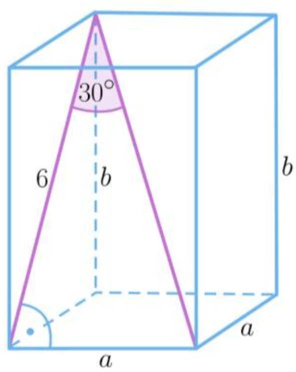
Oblicz objętość prostopadłościanu dla $\alpha = 45°$.

Rozwiązanie

$V = 48\sqrt{2}$.

Zadanie 3.

Objętość prostopadłościanu przedstawionego na rysunku wynosi $48\sqrt{3}$. Oblicz wymiary prostopadłościanu.

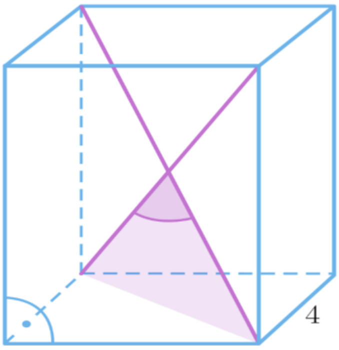


Rozwiązanie

$a = 2\sqrt{6}$, $b = 2\sqrt{3}$.

Zadanie 4.

Dany jest sześcian o długości boku 4. Wyznacz miarę kosinusa kąta zaznaczonego na rysunku.



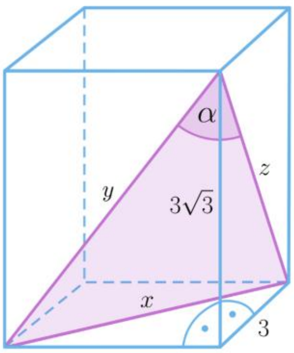
Rozwiązanie

$\cos(\alpha) = \frac{-2}{3}$.

Zadanie 5.

Wyznaczymy miarę kąta między przekątnymi sąsiednich ścian bocznych prostopadłościanu, którego podstawa ma wymiary 3 na 3, a krawędź boczna ma długość $3\sqrt{3}$.

Rozwiązanie

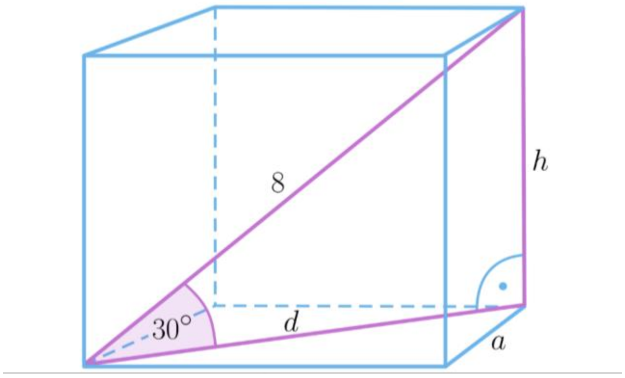


Zauważmy, że $y = x$ oraz $x = 3\sqrt{2}$. Korzystając z twierdzenia kosinusów dla trójkąta o bokach x, y, z dostajemy $\cos(\alpha) = \frac{45}{72}$.

Zadanie 6.

Przekątna prostopadłościanu o podstawie kwadratu ma długość 8 i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30°. Oblicz wymiary krawędzi prostopadłościanu.

Rozwiązanie

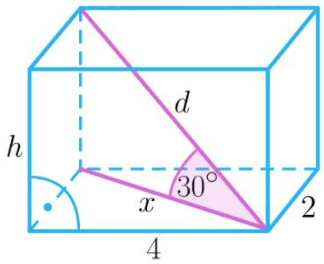


$\frac{h}{8} = \sin(30°) = \frac{1}{2}$, zatem $h = 4$ i $d = 4\sqrt{3}$. Zatem $a = 2\sqrt{6}$.

Zadanie 7.

Długości krawędzi prostopadłościanu wynoszą $4, 2, h$. Wyznacz długość przekątnej prostopadłościanu, jeśli kąt między przekątną prostopadłościanu a przekątną podstawy prostopadłościanu jest równy $30°$.

Rozwiązanie

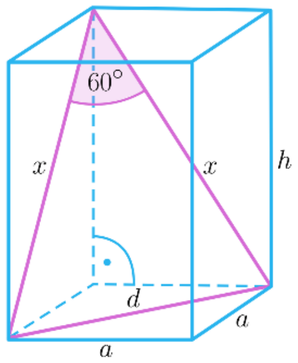


Korzystając z twierdzenia Pitagorasa wyznaczamy $x = 2\sqrt{5}$. Ponieważ $\frac{x}{d} = \cos(30°)$, więc $d = \frac{4}{3}\sqrt{15}$.

Zadanie 8.

Dany jest prostopadłościan, który w podstawie ma kwadrat. Wykaż, że prostopadłościan jest sześcianem, jeśli miara kąta między przekątnymi sąsiednich ścian jest równa $60°$.

Rozwiązanie



Trójkąt x, x, d jest równoboczny, zatem $x = a\sqrt{2}$. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta o bokach x, a, h dostajemy $h = a$.

Moduł 3: Kąty w ostrosłupie

Scenariusze zajęć z wykorzystaniem aplikacji VR

Scenariusz zajęć 1

Temat zajęć

Ostrosłupy i pole powierzchni całkowitej

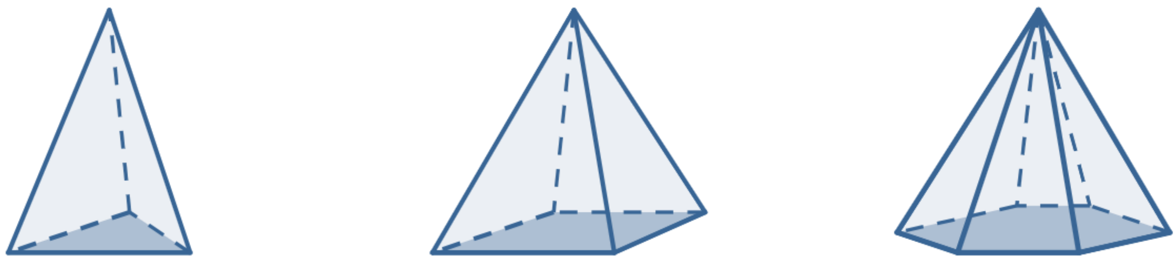
Efekty uczenia się

- Wyznacza objętość i pole powierzchni całkowitej ostrosłupa.

Przebieg zajęć

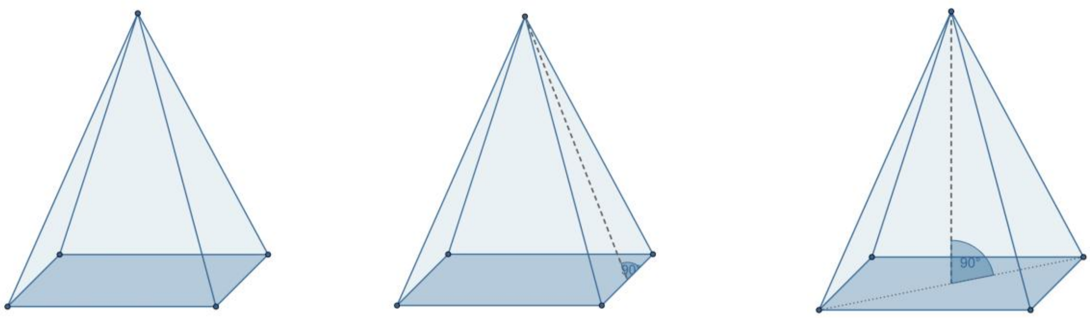
Krok 1.

Wprowadzenie definicji podstawowych ostrosłupów z podziałem ze względu na podstawę.



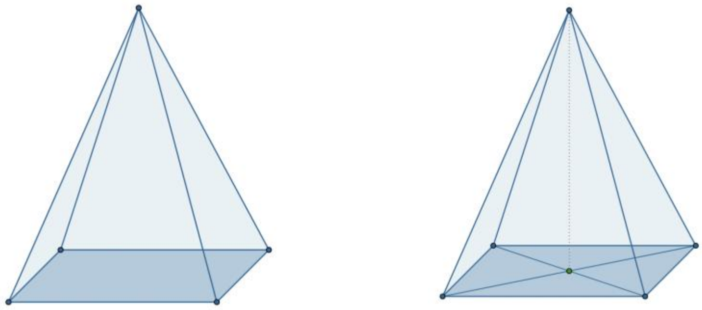
Krok 2.

Rysowanie wysokości ściany bocznej i wysokości ostrosłupa.



Krok 3.

Rysowanie przekątnych podstawy graniastosłupa.



Krok 4.

Omówienie wzorów na pole powierzchni całkowitej ostrosłupa.

Jakie pytania zadać, aby studenci mogli podzielić się swoimi przemyśleniami?

Ile wynosi stosunek objętości graniastosłupa do objętości ostrosłupa o tych samych podstawach i równych wysokościach?

Scenariusz zajęć 2

Temat zajęć

Kąty w ostrosłupie

Efekty uczenia się

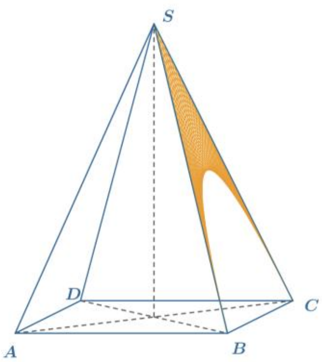
- Rozpoznaje kąty w ostrosłupie.

Przebieg zajęć

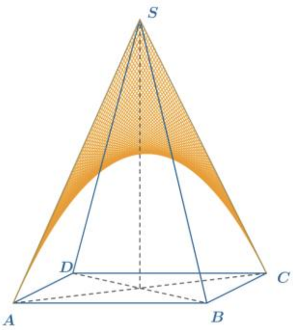
Krok 1.

Wprowadzenie definicji kątów między krawędziami w ostrosłupie.

Kąt między sąsiednimi krawędziami bocznymi.



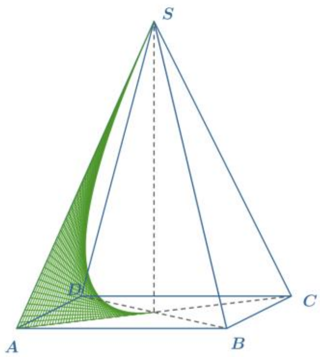
Kąt między przeciwległymi krawędziami bocznymi.



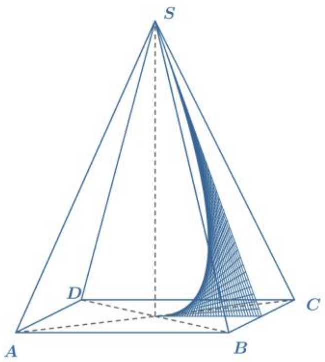
Krok 2.

Wprowadzenie definicji pozostałych kątów w ostrosłupie.

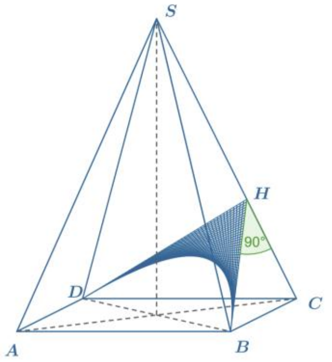
Kąt między krawędzią boczną i przekątną podstawy.



Kąt nachylenia ściany bocznej do podstawy.



Kąt między sąsiednimi ścianami bocznymi.



Krok 3.

Wyznaczenie miar wszystkich kątów w czworościanie.

Jakie pytania zadać, aby studenci mogli podzielić się swoimi przemyśleniami?

Jak wyznaczyć promień kuli opisanej na czworościanie?

Sugestie i wskazówki dla nauczycieli

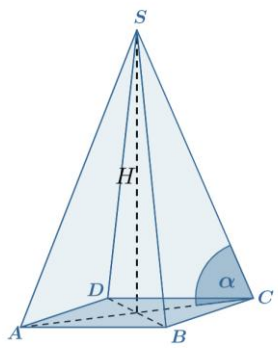
1. Sugestia dla studentów: ostrosłup nazywamy prostym, jeśli krawędzie boczne są równe.
2. Sugestia dla studentów: ostrosłup nazywamy czworościanem, jeśli wszystkie ściany boczne są trójkątami równobocznymi.
3. Pytanie dla studentów: Narysuj siatki ostrosłupów.
4. Do obliczenia objętości ostrosłupów możesz skorzystać z programu WOLFRAM.

Karty pracy dla studentów

Zadanie 1.

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny. Długość krawędzi podstawy wynosi 6, a długość wysokości ostrosłupa $3\sqrt{2}$. Oblicz miarę kąta między krawędzią boczną a płaszczyzną podstawy.

Rozwiązanie

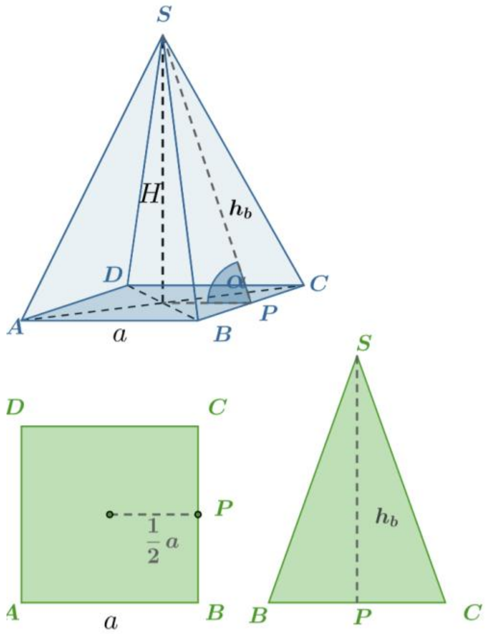


$|\overline{AC}| = 6\sqrt{2}$. $\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{H}{\frac{|\overline{AC}|}{2}} = 1$. Zatem $\alpha = 45°$.

Zadanie 2.

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny. Długość krawędzi podstawy wynosi 6, a długość wysokości $3\sqrt{2}$. Oblicz tangens kąta między ścianą boczną a płaszczyzną podstawy.

Rozwiązanie

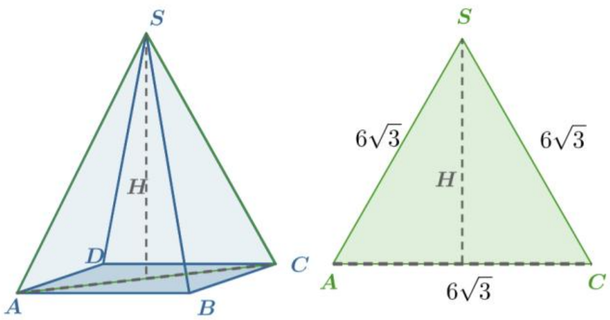


$\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{H}{\frac{1}{2}a} = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$.

Zadanie 3.

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny. Długość krawędzi podstawy jest równa $3\sqrt{6}$, a długości krawędzi bocznych są równe $6\sqrt{3}$. Oblicz długość wysokości ostrosłupa.

Rozwiązanie

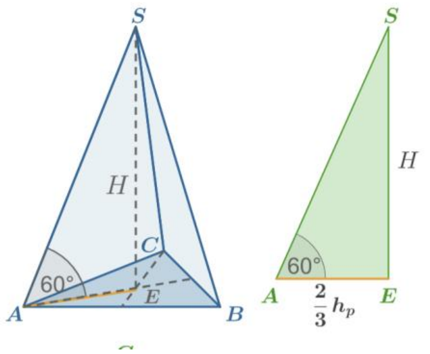


$H = 9$.

Zadanie 4.

Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny. Długość krawędzi podstawy $a = 3\sqrt{3}$, a miara kąta między krawędzią boczna a płaszczyzną podstawy jest równa $60°$. Oblicz długość wysokości ostrosłupa.

Rozwiązanie



$h_p = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{2}$. Zatem $H = \frac{2}{3}h_p\mathrm{tg}(60°) = 3\sqrt{3}$.

Zadanie 5.

Oblicz długość wysokości czworościanu foremnego o długości krawędzi 3.

Rozwiązanie

$\sqrt{6}$.

Zadanie 6.

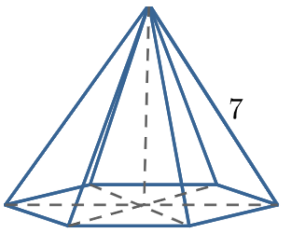
Trzy ściany ostrosłupa są równoramiennymi trójkątami prostokątnymi o długości przyprostokątnej równej 1. Oblicz pole powierzchni czwartej ściany.

Rozwiązanie

$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Zadanie 7.

Oblicz kosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy dla ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego przedstawionego na rysunku, jeśli pole podstawy wynosi $\frac{75\sqrt{3}}{2}$.

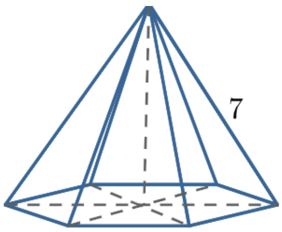


Rozwiązanie

$P = \frac{75\sqrt{3}}{2} = 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Zatem $a = 5$ i $\sin(\alpha) = \frac{5}{7}$.

Zadanie 8.

Oblicz długość wysokości ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego przedstawionego na rysunku, jeśli pole podstawy wynosi $\frac{75\sqrt{3}}{2}$.



Rozwiązanie

$P = \frac{75\sqrt{3}}{2} = 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, zatem $a = 5$. Z twierdzenia Pitagorasa mamy $H^2 = 7^2 - 5^2$, czyli $H = 2\sqrt{6}$.

Moduł 4: Geometria nieeuklidesowa

Scenariusze zajęć z wykorzystaniem aplikacji VR

Scenariusz zajęć 1

Temat zajęć

Geometria euklidesowa

Efekty uczenia się

- Zna aksjomaty geometrii Euklidesowej.

Przebieg zajęć

Krok 1.

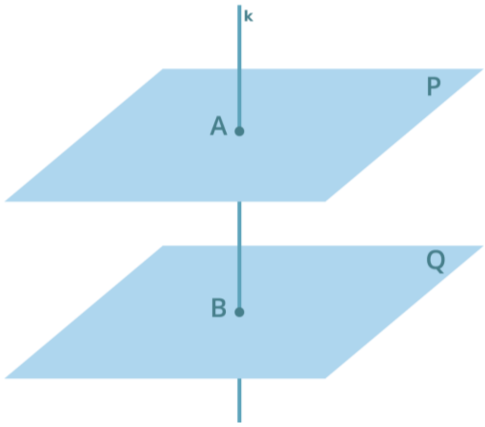
Wprowadzenie pojęć pierwotnych w geometrii: punkt, prosta, płaszczyzna.

Krok 2.

Zapoznanie się z aksjomatami geometrii euklidesowej.

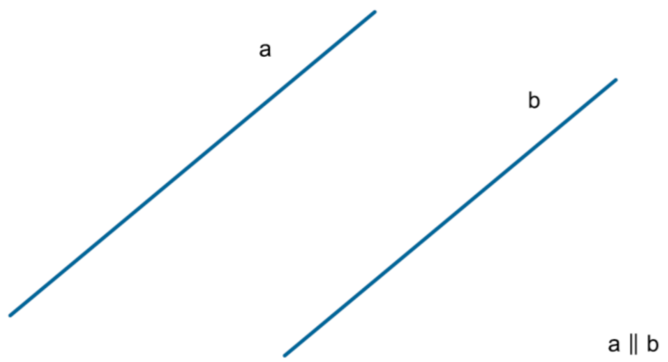
Krok 3.

Omówienie położenia płaszczyzn w przestrzeni trójwymiarowej, np. płaszczyzny równoległe.



Krok 4.

Omówienie położenia dwóch prostych na płaszczyźnie, np. proste równoległe.



Krok 5.

Omówienie położenia prostej i punktu na płaszczyźnie oraz w przestrzeni.

Krok 6.

Omówienie położenia płaszczyzny i punktu w przestrzeni.

Jakie pytania zadać, aby studenci mogli podzielić się swoimi przemyśleniami?

Jakie jest położenie dwóch prostych w przestrzeni trójwymiarowej?

Scenariusz zajęć 2

Temat zajęć

Podstawy geometrii nieeuklidesowej

Efekty uczenia się

- Posługuje się geometrią nieeuklidesową.

Przebieg zajęć

Krok 1.

Wprowadzenie do geometrii nieeuklidesowej, elementy historyczne.

Krok 2.

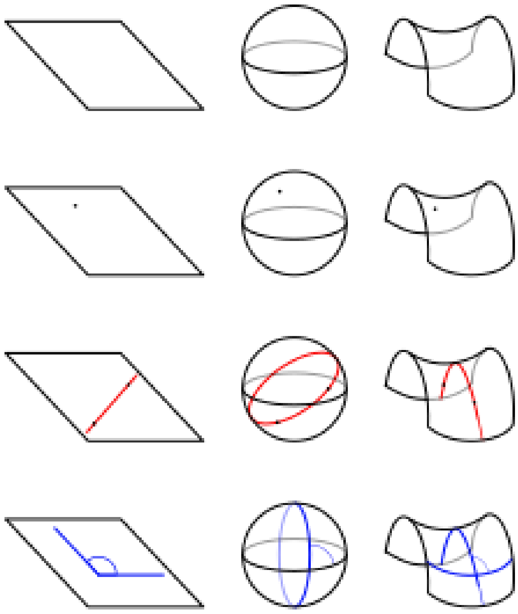
Omówienie założeń geometrii eliptycznej.

Krok 3.

Omówienie założeń geometrii hiperbolicznej.

Krok 4.

Płaszczyzna, punkt, prosta, kąt w ujęciu geometrii euklidesowej, sferycznej i hiperbolicznej.



pl.wikipedia.org/wiki/Geometria_nieeuklidesowa

Jakie pytania zadać, aby studenci mogli podzielić się swoimi przemyśleniami?

Czy w geometrii hiperbolicznej suma kątów w trójkącie może być mniejsza niż 180°?

Sugestie i wskazówki dla nauczycieli

1. Pytanie dla studentów: Czym geometria nieeuklidesowa różni się od geometrii euklidesowej?
2. Pytanie dla studentów: Jak wygląda okrąg w geometrii nieeuklidesowej?
3. Matematycy, którzy przyczynili się do rozwoju geometrii nieeuklidesowej.
4. Rozważania na temat zastosowanie geometrii nieeuklidesowej.

Karty pracy dla studentów

Zadanie 1.

Ile można poprowadzić prostych równoległych do danej prostej przez ustalony punkt?

Rozwiązanie

Przez ustalony punkt można poprowadzić tylko jedną prostą równoległą do danej prostej.

Zadanie 2.

Ile można poprowadzić płaszczyzn równoległych do danej płaszczyzny przez ustalony punkt?

Rozwiązanie

Przez ustalony punkt można poprowadzić tylko jedną płaszczyznę równoległą do danej płaszczyzny.

Zadanie 3.

Ile punktów wyznacza jednoznacznie płaszczyznę?

Rozwiązanie

Trzy punkty niewspółliniowe.

Zadanie 4.

Jak wyznaczyć jednoznacznie płaszczyznę za pomocą dwóch prostych?

Rozwiązanie

Na przykład za pomocą dwóch prostych przecinających się w jednym punkcie.

Zadanie 5.

Co może być częścią wspólną prostej i płaszczyzny?

Rozwiązanie

Częścią wspólna prostej i płaszczyzny może być: zbiór pusty, punkt, prosta.

Moduł 5: Ekstrema funkcji – maksima i minima

Scenariusze zajęć z wykorzystaniem aplikacji VR

Scenariusz zajęć 1

Temat zajęć

Lokalne minima i maksima funkcji: definicja, interpretacja geometryczna

Efekty uczenia się

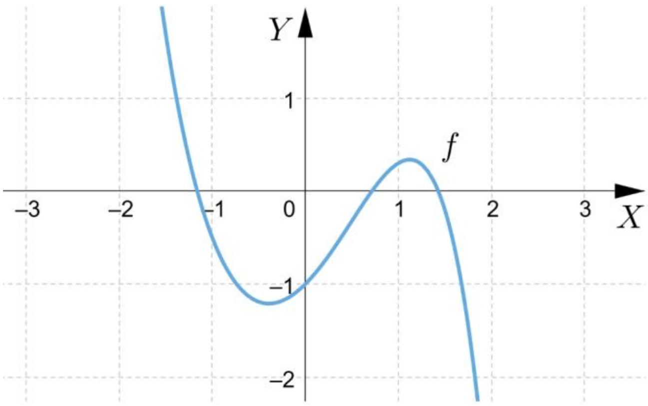
- Odczytuje ekstrema lokalne funkcji dwóch zmiennych.
- Wskazuje różnice między ekstremum a funkcją globalną dwóch zmiennych.

Przebieg zajęć

Krok 1.

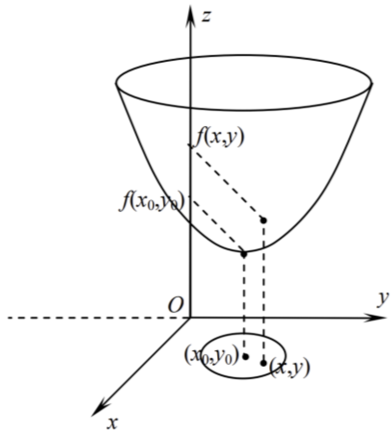
Przypomnienie definicji minimum i maksimum lokalnego funkcji jednej zmiennej.

Wskaż minimum i maksimum lokalne funkcji jednej zmiennej.



Krok 2.

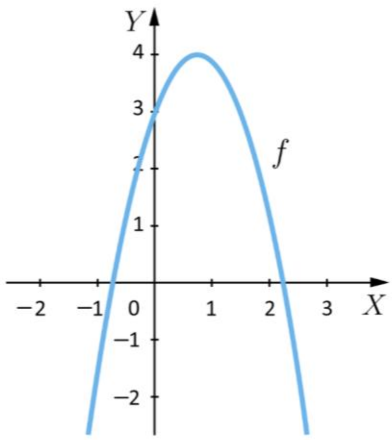
Na podstawie rysunku sformułuj definicje minimum lokalnego funkcji dwóch zmiennych.



Krok 3.

Jaka jest różnica między minimum lokalnym a globalnym?

Podaj przykład. Uzasadnij to na podstawie rysunku dla funkcji f i $x \in [-1,3]$.



Krok 4.

Sformułuj definicje minimum globalnego funkcji dwóch zmiennych.

Jakie pytania zadać, aby studenci mogli podzielić się swoimi przemyśleniami?

Czy funkcja może posiadać w ustalonym punkcie minimum i miejsce zerowe?

Scenariusz zajęć 2

Temat zajęć

Warunek konieczny i dostateczny ekstremum funkcji dwóch zmiennych

Efekty uczenia się

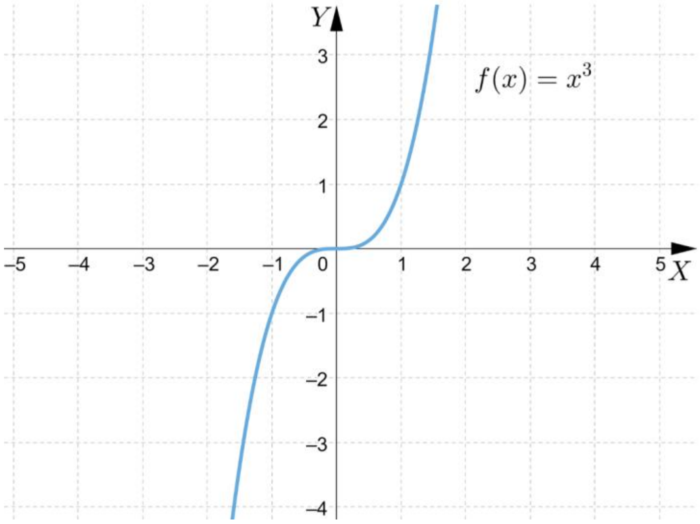
- Posługuje się warunkiem koniecznym i wystarczającym ekstremum funkcji dwóch zmiennych.

Przebieg zajęć

Krok 1.

Przypomnienie warunku koniecznego ekstremum funkcji jednej zmiennej.

Czy funkcja $y = x^3$ dla $x = 0$ spełnia warunek konieczny ekstremum funkcji?



Krok 2.

Przypomnienie warunku wystarczającego ekstremum funkcji jednej zmiennej.

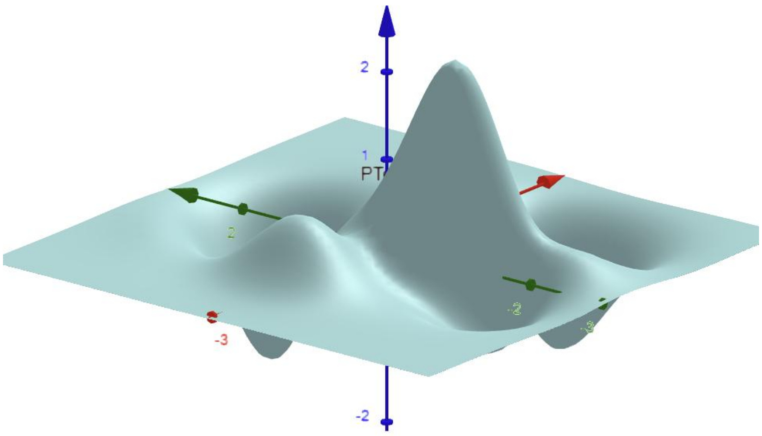
Krok 3.

Sformułowanie warunku koniecznego ekstremum funkcji dwóch zmiennych.

Krok 4.

Sformułowanie warunku wystarczającego ekstremum funkcji dwóch zmiennych.

Wskaż punkty, w których funkcja spełnia warunek konieczny i dostateczny ekstremum funkcji dwóch zmiennych.



Krok 5.

Porównanie warunku koniecznego i wystarczającego ekstremum funkcji jednej i dwóch zmiennych.

Jakie pytania zadać, aby studenci mogli podzielić się swoimi przemyśleniami?

Czy istnieje funkcja, w której pochodne cząstkowe pierwszego rzędu nie istnieją, a funkcja ma w tym punkcie ekstremum lokalne?

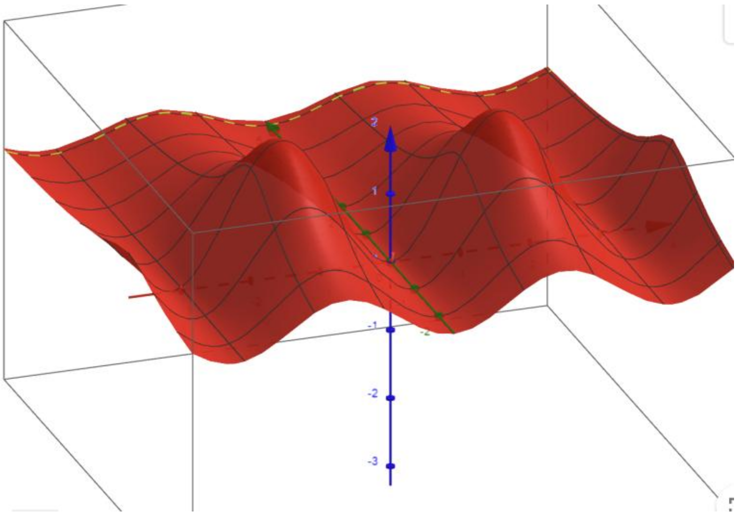
Sugestie i wskazówki dla nauczycieli

1. Pytanie dla studentów: Czy z faktu, że nie istnieją pochodne cząstkowe, funkcja nie posiada ekstremum?
2. Przedstawić studentom przykłady funkcji dwóch zmiennych, dla których warunek konieczny osiągania ekstremum funkcji jest spełniony, a warunek wystarczający nie jest spełniony.
3. Pytanie dla studentów: Sformułuj warunek konieczny ekstremum funkcji dla trzech zmiennych.
4. Do znajdowania maksimum i minimum funkcji dwóch zmiennych możesz skorzystać z programu WOLFRAM.

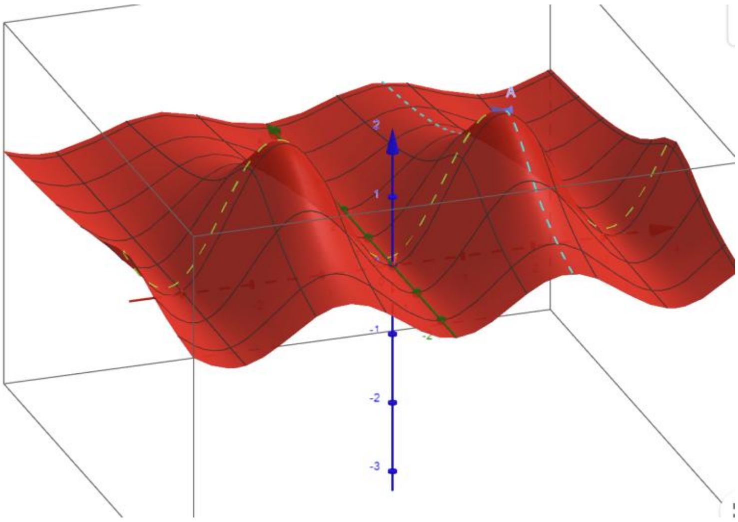
Karty pracy dla studentów

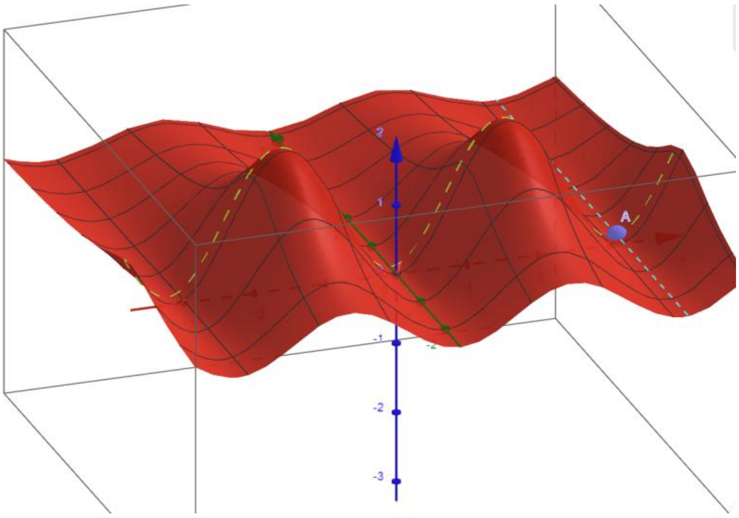
Zadanie 1.

Wskaż przykładowe minimum i maksimum lokalne funkcji przedstawionej na rysunku.



Rozwiązanie





Zadanie 2.

Wyznacz wymiary otwartego zbiornika (od góry) w kształcie prostopadłościanu o objętości 256 tak, aby pole powierzchni prostopadłościanu (otwartego od góry) było najmniejsze.

Rozwiązanie

$a = 8, b = 8, h = 4.$

Zadanie 3.

Podaj przykład funkcji dwóch zmiennych, która ma nieskończenie wiele ekstremów lokalnych.

Rozwiązanie

$f(x, y) = \sin(x) + \sin(y).$

Zadanie 4.

Wyznacz ekstrema lokalne funkcji $f(x, y) = x^2y + y^3 + 6xy$.

Rozwiązanie

$\min = -6\sqrt{3}. \max = 6\sqrt{3}.$

Zadanie 5.

Wyznacz ekstrema lokalne funkcji $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy$.

Rozwiązanie

$\min = -8.$

Zadanie 6.

Czy w punkcie $P(0,0)$ funkcja $f(x, y) = x^2y + y^3 + 6xy$ posiada ekstremum lokalne?

Rozwiązanie

Nie.

Zadanie 7.

Wyznacz ekstrema lokalne funkcji $f(x, y) = e^{x^2+y^2}(x^2 + y^2)$.

Rozwiązanie

$\min = 0.$

Zadanie 8.

Czy w punkcie $P(0,0)$ funkcja $f(x, y) = |x| + |y|$ posiada minimum lokalne?

Rozwiązanie

Tak.

Moduł 6: Układy równań liniowych

Scenariusze zajęć z wykorzystaniem aplikacji VR

Scenariusz zajęć 1

Temat zajęć

Interpretacja geometryczna układów równań liniowych w przestrzeniach

Efekty uczenia się

- Wizualizuje różne możliwości rozwiązania układu równań liniowych.
- Rozpoznaje różne możliwości rozwiązania układu równań liniowych.

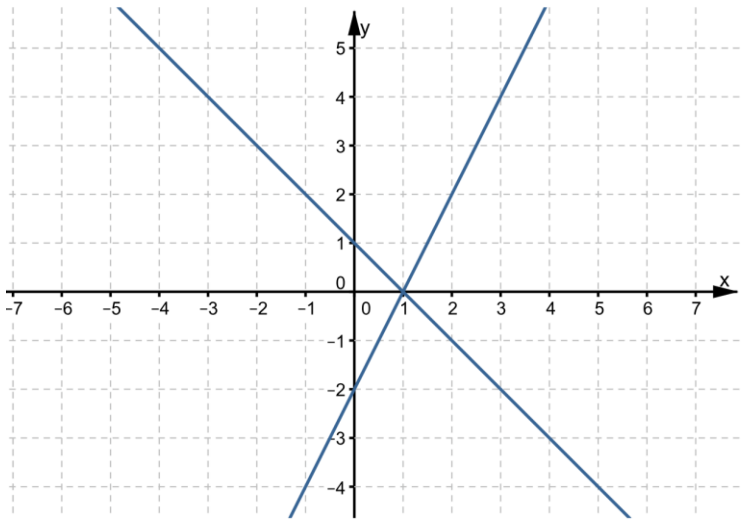
Przebieg zajęć

Krok 1.

Przypomnienie interpretacji geometrycznej układu równań liniowych dla dwóch zmiennych.

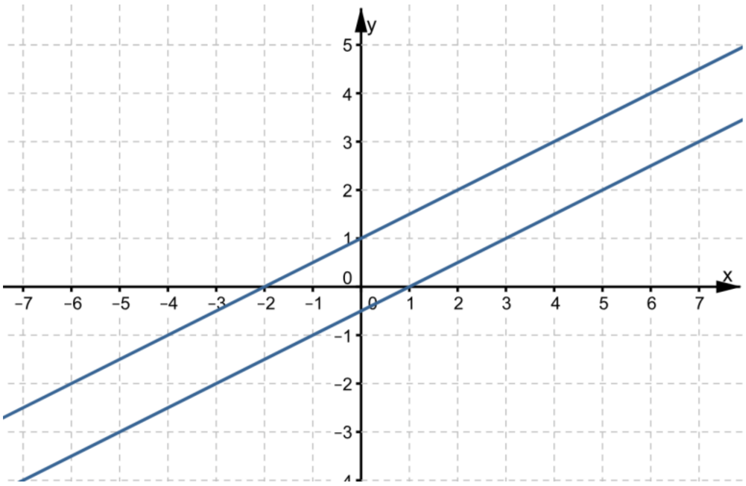
Krok 2.

Przedstaw rozwiązanie układu równań liniowych na podstawie rysunku.



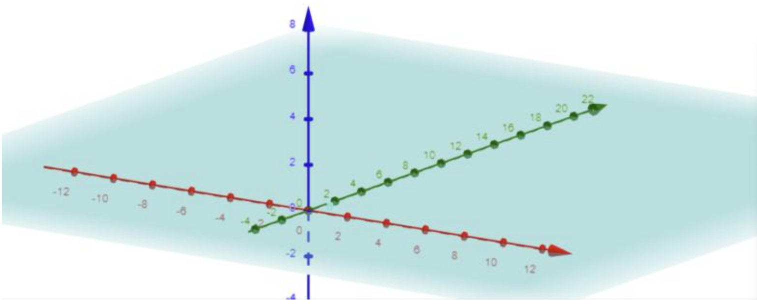
Krok 3.

Przedstaw rozwiązanie układu równań liniowych na podstawie rysunku.



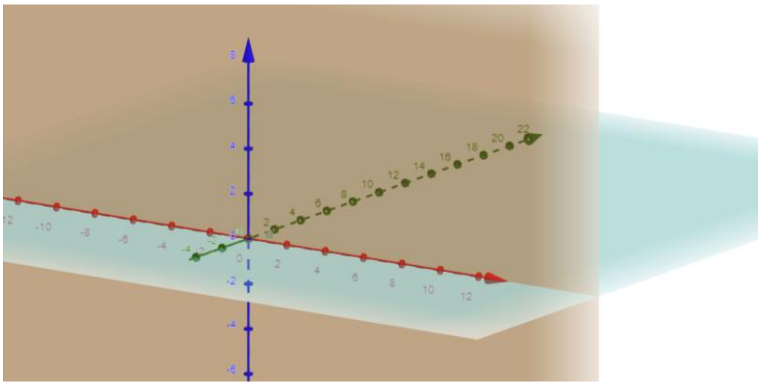
Krok 4.

Narysuj płaszczyznę $x = 0$.



Krok 5.

Narysuj płaszczyzny $x = 0$ i $y = 0$.



Jakie pytania zadać, aby studenci mogli podzielić się swoimi przemyśleniami?

Jakie są możliwe rozwiązania układów równań liniowych w przestrzeni czterowymiarowej?

Scenariusz zajęć 2

Temat zajęć

Rozwiązywanie układów równań liniowych

Efekty uczenia się

- Rozwiązuje układy równań liniowych w przestrzeni trójwymiarowej.

Przebieg zajęć

Krok 1.

Rozwiąż układ równań liniowych:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

Krok 2.

Rozwiąż układ równań liniowych:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$$

Krok 3.

Rozwiąż układ równań liniowych:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

Krok 4.

Rozwiąż układ równań liniowych:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

Jakie pytania zadać, aby studenci mogli podzielić się swoimi przemyśleniami?

Czy rozwiązaniem układu równań liniowych może być cała przestrzeń?

Sugestie i wskazówki dla nauczycieli

1. Zapoznaj się z różnymi metodami rozwiązywania układów równań liniowych.
2. Przed rozpoczęciem rozwiązywania układu równań liniowych warto uporządkować równania, przenosząc wszystkie wyrazy z niewiadomymi na lewą stronę, a wyrazy wolne na prawą.
3. Sprawdź rozwiązanie układu równań liniowych, np. podstawiając znalezione rozwiązanie.
4. Układy równań liniowych wykorzystuje się w sztucznej inteligencji.

5. Do rozwiązywania układów równań liniowych możesz skorzystać z programu WOLFRAM.

Karty pracy dla studentów

Zadanie 1.

Podaj wartości parametrów a, b tak, aby rozwiązaniem układu równań liniowych był zbiór pusty.

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 2 \\ 2x + y + az = b \end{cases}$$

Rozwiązanie

$a = 3, b \neq 2.$

Zadanie 2.

Podaj wartości parametrów a, b tak, aby rozwiązaniem układu równań liniowych była prosta.

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 2 \\ 2x + y + az = b \end{cases}$$

Rozwiązanie

$a \neq 3, b \in R.$

Zadanie 3.

Podaj wartości parametrów a, b tak, aby rozwiązaniem układu równań liniowych był punkt.

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 2 \\ 2x + y + az = b \end{cases}$$

Rozwiązanie

$a = 3, b = 2.$

Zadanie 4.

Podaj wartości parametrów a, b tak, aby rozwiązaniem układu równań liniowych była płaszczyzna.

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 2 \\ 0x + 0y + az = b \\ 0x + y + z = 2 \end{cases}$$

Rozwiązanie

$a \neq 0, b \in R.$

Zadanie 5.

Rozwiąż układ równań liniowych:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 2x + 2y + 4z = 6 \end{cases}$$

Rozwiązanie

$\emptyset$.

Zadanie 6.

Sprawdź, czy układ jest układem Cramera.

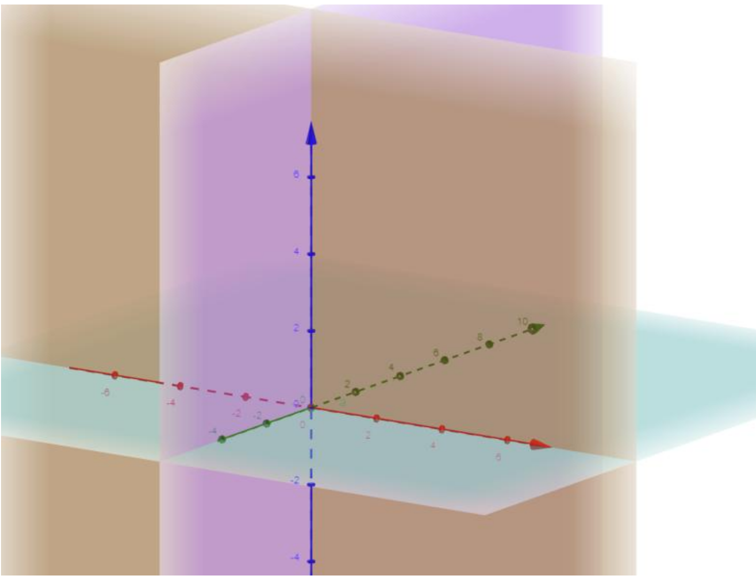
$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + y + 3z = 8 \\ x + 2y + z = 5 \\ 3x + 4y + 5z = 17 \end{cases}$$

Rozwiązanie

Tak.

Zadanie 7.

Na podstawie rysunku napisz układ równań liniowych.



Rozwiązanie

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0. \\ z = 0 \end{cases}$$

Moduł 7: Graniastosłupy

Scenariusze zajęć z wykorzystaniem aplikacji VR

Scenariusz zajęć 1

Temat zajęć

Siatki graniastosłupów

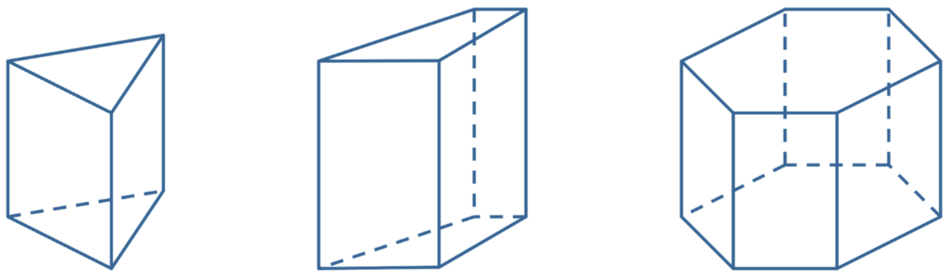
Efekty uczenia się

- Rozpoznaje siatki graniastosłupów.

Przebieg zajęć

Krok 1.

Narysuj siatki graniastosłupów.



Krok 2.

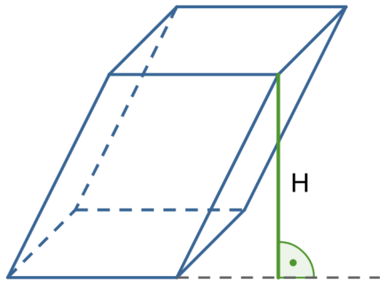
Opisz, z jakich figur składają się siatki graniastosłupów.

Krok 3.

Czy na rysunkach przedstawione są siatki graniastosłupów? Uzasadnij.

Krok 4.

Narysuj siatkę graniastosłupa przedstawionego na rysunku.



Jakie pytania zadać, aby studenci mogli podzielić się swoimi przemyśleniami?

Czy każdy ustalony graniastosłup ma tylko jedną siatkę?

Scenariusz zajęć 2

Temat zajęć

Obliczanie pola powierzchni całkowitej i objętości graniastosłupów

Efekty uczenia się

- Oblicza pole powierzchni całkowitej i objętość graniastosłupów.

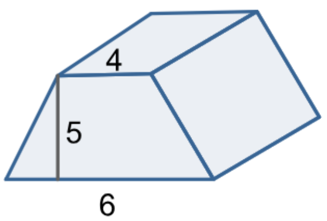
Przebieg zajęć

Krok 1.

Przypomnienie wzorów na pola powierzchni figur płaskich: trójkąt, równoległobok, trapez, sześciokąt foremny.

Krok 2.

Objętość graniastosłupa przedstawionego na rysunku jest równa 500. Oblicz długość wysokości figury.



Krok 3.

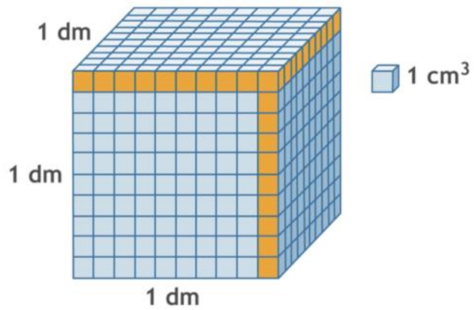
Wyznacz stosunek długości wysokości graniastosłupów przedstawionych na rysunku tak, aby ich objętości były równe.

Jak zmieni się objętość graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego, jeśli

- długość krawędzi podstawy zwiększymy dwukrotnie?
- długość wysokości zwiększymy dwukrotnie?

Krok 4.

Zamiana jednostek objętości. Ile $1\ \mathrm{dm}^3$ ma cm^3?



Krok 5.

Ile $1\ \mathrm{m}^3$ ma dm^3?
Ile $1\ \mathrm{m}^3$ ma cm^3?
Ile $1\ \mathrm{km}^3$ ma cm^3?

Jakie pytania zadać, aby studenci mogli podzielić się swoimi przemyśleniami?

Czy można zbudować różne graniastosłupy prawidłowe czworokątne o takich samych podstawach, równych wysokościach i równych objętościach?

Sugestie i wskazówki dla nauczycieli

1. Pytanie dla studentów: Jak zmieni się objętość graniastosłupa, jeśli długość wysokości zwiększymy trzykrotnie?
2. Pytanie dla studentów: Jak zmieni się objętość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, jeśli długość wysokości zwiększymy trzykrotnie?

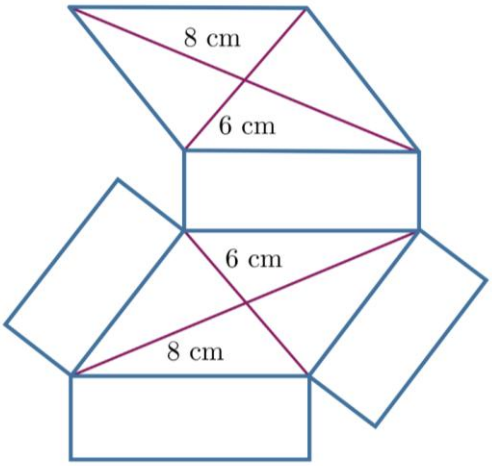
3. Pytanie dla studentów: Jak zmieni się długość przekątnej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, jeśli długość wysokości zwiększymy trzykrotnie?
4. Pytanie dla studentów: Jak zmieni się pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, jeśli długość wysokości zwiększymy trzykrotnie?
5. Do obliczenia objętości i pola powierzchni całkowitej graniastosłupów możesz skorzystać z programu WOLFRAM.

Karty pracy dla studentów

Zadanie 1.

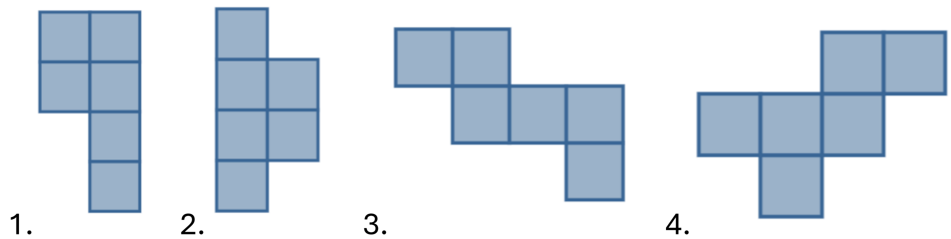
Narysuj siatkę graniastosłupa, którego podstawami są romby o długościach przekątnych $6\ \mathrm{cm}$ i $8\ \mathrm{cm}$.

Rozwiązanie



Zadanie 2.

Na których rysunkach przedstawione są siatki graniastosłupa?

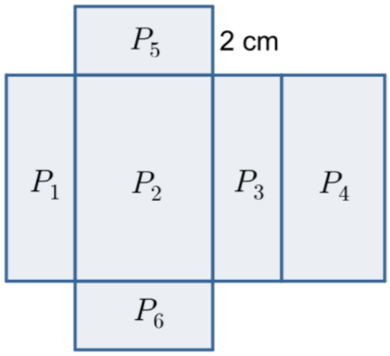


Rozwiązanie

1. Nie.
2. Nie.
3. Tak.
4. Tak.

Zadanie 3.

Objętość graniastosłupa przedstawionego na rysunku wynosi 24, a pole powierzchni całkowitej 52. Wyznacz długości pozostałych krawędzi.

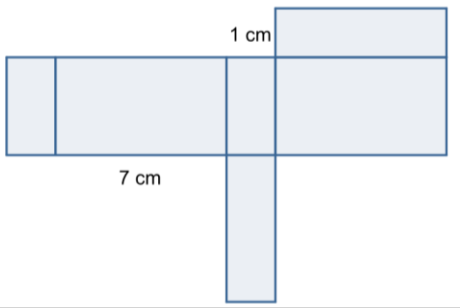


Rozwiązanie

$a = 2, b = 3, c = 4.$

Zadanie 4.

Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa przedstawionego na rysunku wynosi 78. Wyznacz objętość graniastosłupa.

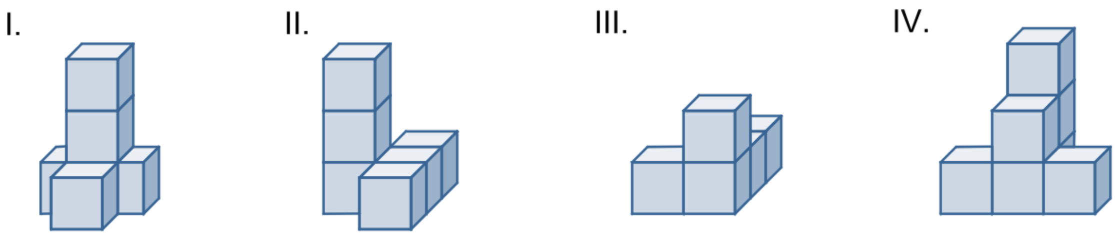


Rozwiązanie

$V = 28.$

Zadanie 5.

Która z figur ma największą objętość?

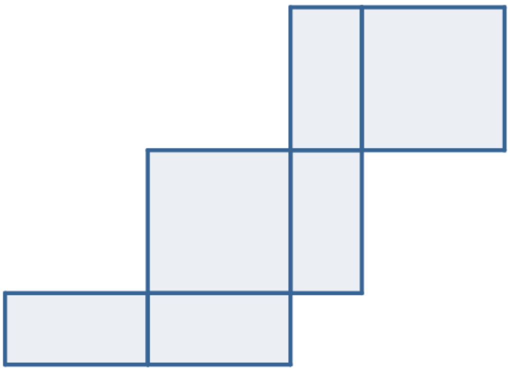


Rozwiązanie

IV.

Zadanie 6.

Czy na rysunku przedstawiono siatkę graniastosłupa?

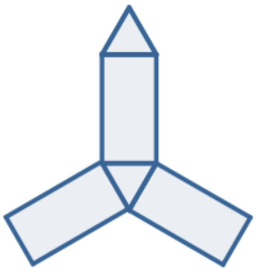


Rozwiązanie

Tak.

Zadanie 7.

Jaki rodzaj graniastosłupa przedstawiono na rysunku?

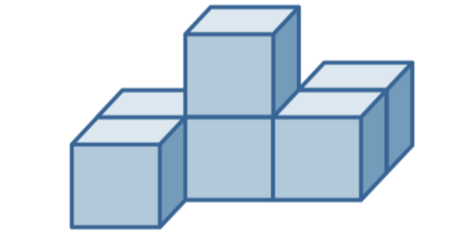


Rozwiązanie

Graniastosłup prawidłowy trójkątny.

Zadanie 8.

Narysuj siatkę figury przedstawionej na rysunku.



Rozwiązanie

Po narysowaniu siatki, wytnij ją i postaraj się złożyć.

Moduł 8: Ostrosłupy

Scenariusze zajęć z wykorzystaniem aplikacji VR

Scenariusz zajęć 1

Temat zajęć

Siatki ostrosłupów

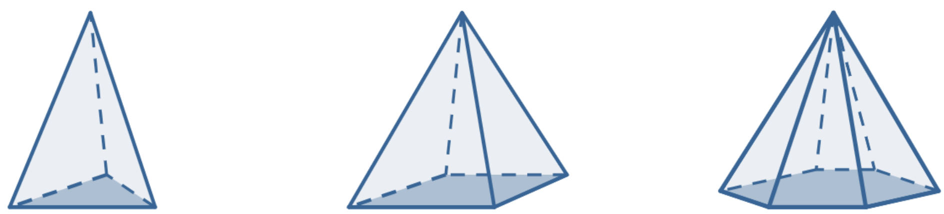
Efekty uczenia się

- Rozpoznaje siatki ostrosłupów.

Przebieg zajęć

Krok 1.

Narysuj siatki ostrosłupów.

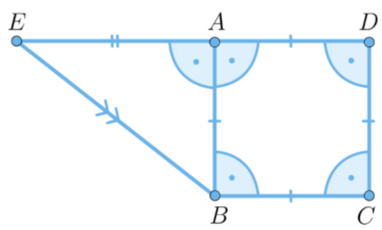


Krok 2.

Opisz, z jakich figur składają się siatki ostrosłupów.

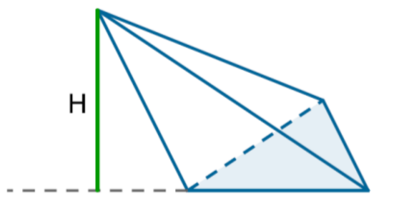
Krok 3.

Dorysuj elementy na rysunku, aby całość utworzyła siatkę ostrosłupa.



Krok 4.

Narysuj siatkę ostrosłupa przedstawionego na rysunku.



Jakie pytania zadać, aby studenci mogli podzielić się swoimi przemyśleniami?

Czy każdy ustalony ostrosłup ma tylko jedną siatkę?

Scenariusz zajęć 2

Temat zajęć

Objętość ostrosłupa

Efekty uczenia się

- Oblicza objętość ostrosłupa.

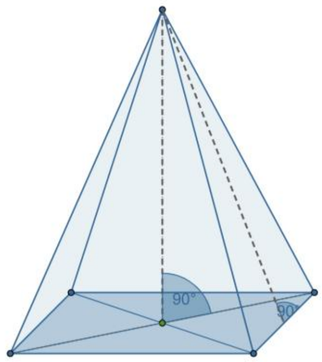
Przebieg zajęć

Krok 1.

Przypomnienie wzorów na pola powierzchni figur płaskich: trójkąt, równoległobok, trapez, sześciokąt foremny.

Krok 2.

Wyprowadzenie wzoru na objętość ostrosłupa prawidłowego V o długości krawędzi a i długości wysokości ściany bocznej h.

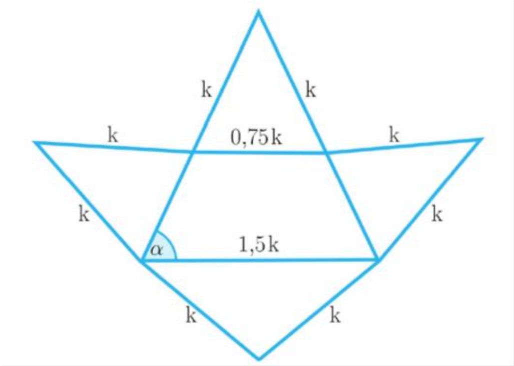


Krok 3.

Wyprowadzenie wzoru na objętość ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego V o długości krawędzi a i długości wysokości h.

Krok 4.

Wyprowadzenie wzoru na objętość ostrosłupa w zależności od a, α.



Jakie pytania zadać, aby studenci mogli podzielić się swoimi przemyśleniami?

Czy można zbudować różne ostrosłupy prawidłowe czworokątne o takich samych podstawach, równych wysokościach i równych objętościach?

Sugestie i wskazówki dla nauczycieli

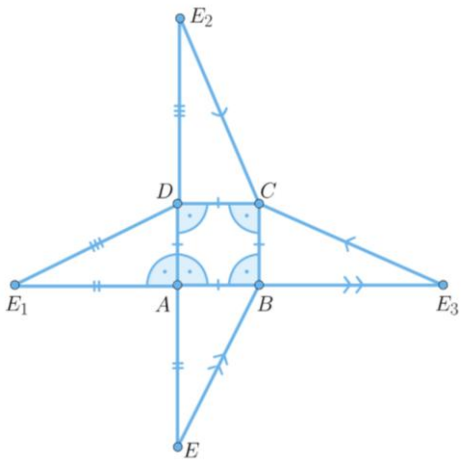
1. Pytanie dla studentów: Jak zmieni się objętość graniastosłupa, jeśli długość wysokości zwiększymy trzykrotnie?
2. Pytanie dla studentów: Jak zmieni się objętość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, jeśli długość wysokości zwiększymy trzykrotnie?
3. Pytanie dla studentów: Jak zmieni się długość przekątnej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, jeśli długość wysokości zwiększymy trzykrotnie?
4. Pytanie dla studentów: Jak zmieni się pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, jeśli długość wysokości zwiększymy trzykrotnie?
5. Do obliczenia objętości i pola powierzchni całkowitej graniastosłupów możesz skorzystać z programu WOLFRAM.

Karty pracy dla studentów

Zadanie 1.

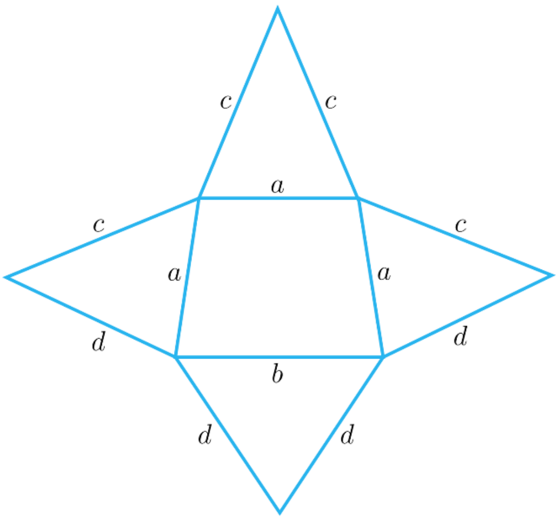
Narysuj siatkę ostrosłupa, który w podstawie ma kwadrat, a ścianami są trójkąty prostokątne.

Rozwiązanie



Zadanie 2.

Podaj nazwę ostrosłupa, którego siatkę przedstawiono na rysunku.

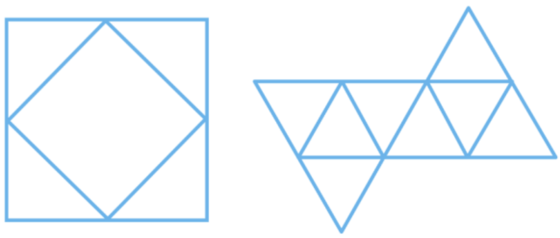


Rozwiązanie

Ostrosłup czworokątny, który w podstawie ma trapez.

Zadanie 3.

Który rysunek przedstawia siatkę ostrosłupa?

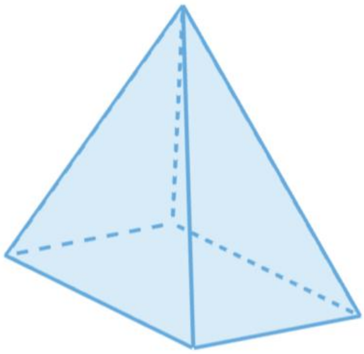


Rozwiązanie

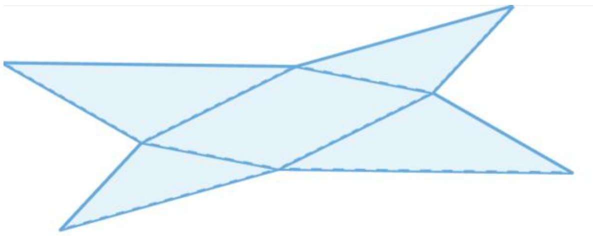
Na rysunkach nie ma siatki ostrosłupa.

Zadanie 4.

Narysuj siatkę ostrosłupa przedstawionego na rysunku.



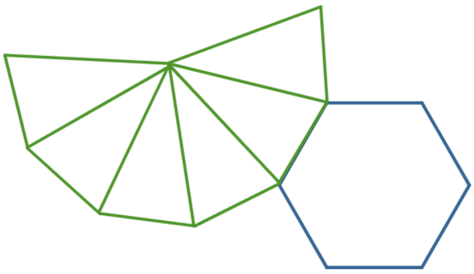
Rozwiązanie



Zadanie 5.

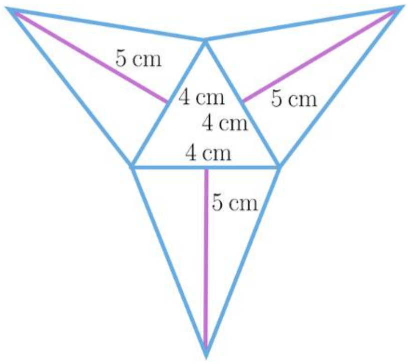
Narysuj siatkę ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego.

Rozwiązanie



Zadanie 6.

Oblicz długość wysokości ostrosłupa przedstawionego na rysunku.

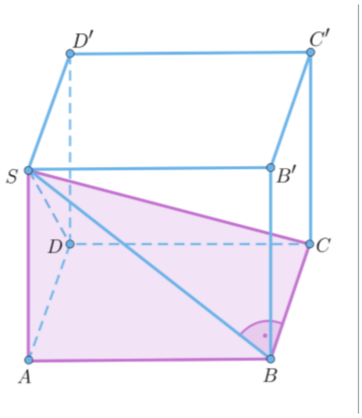


Rozwiązanie

$h = \sqrt{23\frac{2}{3}}.$

Zadanie 7.

Oblicz objętość ostrosłupa $ABCDS$, jeśli graniastosłup jest sześcianem o długości boku równym 3.

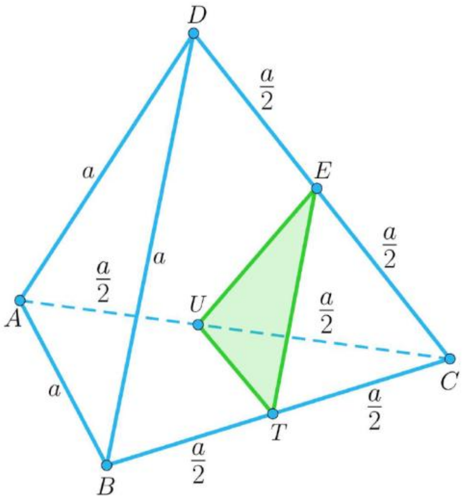


Rozwiązanie

$V = 9.$

Zadanie 8.

Dany jest czworościan $ABCD$ o długości krawędzi 2. Oblicz pole powierzchni trójkąta UTE.

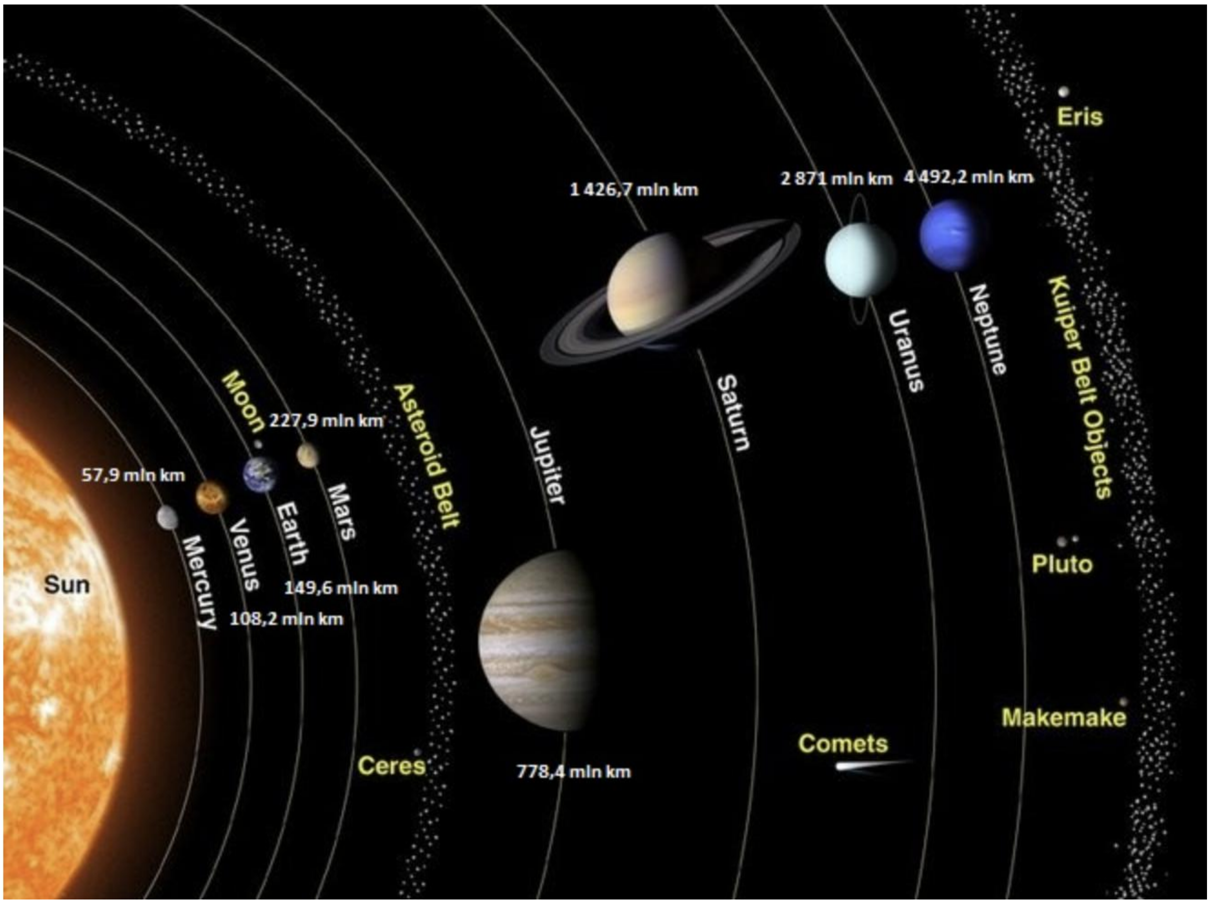


Rozwiązanie

$P = \sqrt{3}$.

Moduł 9: Układ planetarny

Scenariusze zajęć z wykorzystaniem aplikacji VR



Scenariusz zajęć 1

Temat zajęć

Odległości w Układzie Słonecznym

Efekty uczenia się

- Zna odległości w Układzie Słonecznym.

Przebieg zajęć

Krok 1.

Wprowadzenie jednostki astronomicznej (au).

Jedna jednostka astronomiczna, to średnia odległość pomiędzy Ziemią a Słońcem, czyli około 149 598 000 km. Do obliczeń szacunkowych możemy przyjąć 150 000 000 km.

Krok 2.

Wyznacz średnią odległość Księżyca od Ziemi w jednostce au.

Rozwiązanie.

Około $0{,}0026$ au.

Krok 3.

Zdefiniowanie jednostki astronomicznej – rok świetlny (ly).

Rok świetlny, to odległość którą światło przebywa w próżni w ciągu roku. $\text{ly} = 63241$ au.

Krok 4.

Oblicz, ile kilometrów ma rok świetlny.

Rozwiązanie. $\text{ly} = 9{,}5 \cdot 10^{12}$ km.

Jakie pytania zadać, aby studenci mogli podzielić się swoimi przemyśleniami?

Prędkość światła w próżni wynosi $300\,000\ \frac{\text{km}}{\text{s}}$. Ile czasu potrzeba, aby światło w próżni pokonało równik Ziemi?

Scenariusz zajęć 2

Temat zajęć

Porównania wielkości w Układzie Słonecznym

Efekty uczenia się

- Porównuje wielkości w Układzie Słonecznym.

Przebieg zajęć

Krok 1.

Promień Marsa wynosi 3 392 km. Średnica Ziemi wynosi 12 756 km. Oblicz pole powierzchni Marsa.

Rozwiązanie. Około $1{,}5 \cdot 10^{8}\ \text{km}^2$.

Krok 2.

Oblicz objętość Marsa.

Rozwiązanie. Około $1{,}6 \cdot 10^{11}\ \text{km}^3$.

Krok 3.

Oblicz, jaką część objętości Ziemi stanowi objętość Marsa.

Rozwiązanie. Około $0{,}15$.

Krok 4.

Oblicz, jaką część pola powierzchni Ziemi stanowi pole powierzchni Marsa.

Rozwiązanie. Około $0{,}3$.

Jakie pytania zadać, aby studenci mogli podzielić się swoimi przemyśleniami?

Porównaj gęstości Marsa i Ziemi.

Sugestie i wskazówki dla nauczycieli

1. Uwaga dla studentów: Zapoznaj się z jednostką astronomiczną – parsek (pc).
2. Pytanie dla studentów: Która z planet jest najbliżej Słońca?
3. Ile czasu zajmie podróż na Marsa?
4. Do obliczeń w Układzie Słonecznym możesz skorzystać z programu WOLFRAM.

Karty pracy dla studentów

Zadanie 1.

Wyznacz średnią odległość Jowisza od Słońca.

Rozwiązanie

$5{,}203\ \mathrm{au}$.

Zadanie 2.

Wyznacz średnią odległość Ziemi od Słońca w latach świetlnych.

Rozwiązanie

Około 8 minut świetlnych.

Zadanie 3.

Wyznacz średnią odległość Ziemi od Księżyca w latach świetlnych.

Rozwiązanie

Około $1{,}3$ sekundy świetlnej.

Zadanie 4.

Wyznacz przybliżoną wartość pola powierzchni Ziemi (średnica: $12\ 756\ \mathrm{km}$).

Rozwiązanie

Około $510\ 000\ 000\ \mathrm{km}^2$.

Zadanie 5.

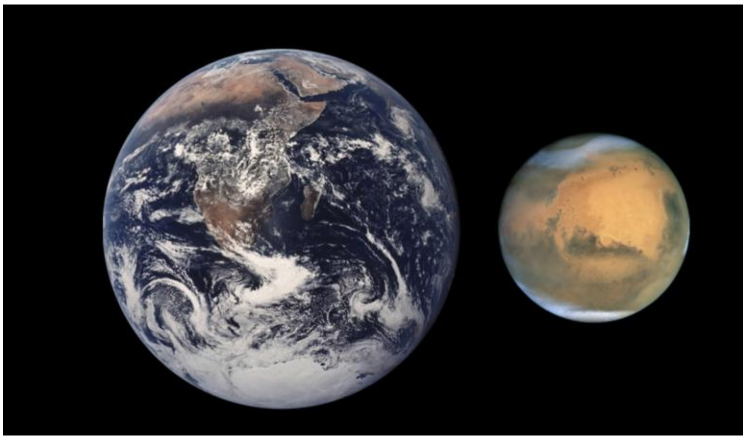
Wyznacz przybliżoną wartość objętości Ziemi (średnica: $12\ 756\ \mathrm{km}$).

Rozwiązanie

Około $10^{12}\ \mathrm{km}^3$.

Zadanie 6.

Na rysunku przedstawiono Ziemię i Marsa w skali. Średnica Ziemi wynosi $12\ 756\ \mathrm{km}$. Oszacuj średnicę Marsa.



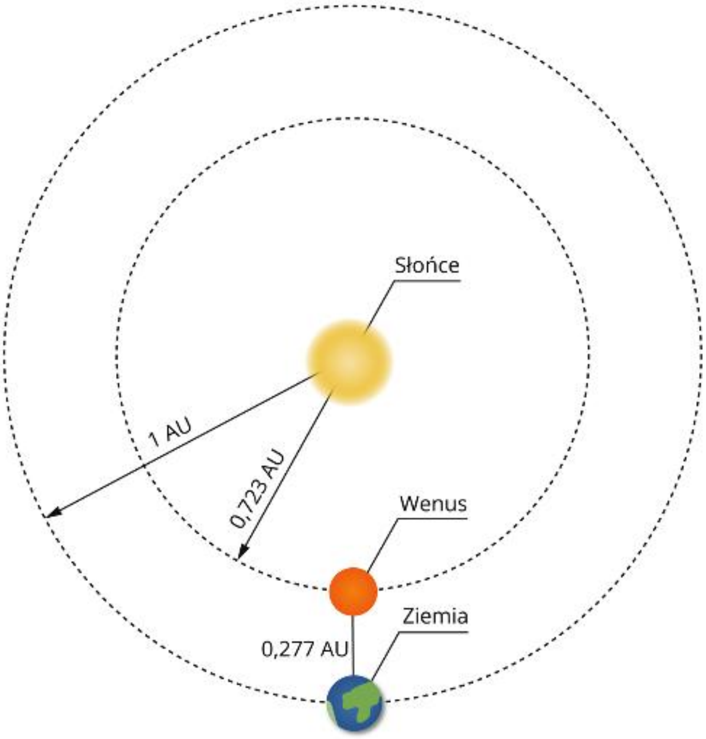
pl.wikipedia.org/wiki/Mars

Rozwiązanie

Około 6 800 km.

Zadanie 7.

Wyznacz odległość w kilometrach Wenus od Słońca.



Moduł 10: Misje w Układzie Słonecznym

Scenariusze zajęć z wykorzystaniem aplikacji VR

Scenariusz zajęć 1

Temat zajęć

Eksploracja kosmosu – podstawowe pojęcia

Efekty uczenia się

- Posługuje się podstawowymi pojęciami o eksploracji kosmosu.

Przebieg zajęć

Krok 1.

Definicja statku kosmicznego. Rodzaje statków kosmicznych.

Krok 2.

Omówienie zagadnienia promieniowania kosmicznego.

Krok 3.

Grawitacja. Grawitacja na Ziemi i innych planetach.

Krok 4.

Omówienie wpływu grawitacji na zdrowie człowieka.

Jakie pytania zadać, aby studenci mogli podzielić się swoimi przemyśleniami?

Jaki jest obecnie stan prawny kosmosu?

Scenariusz zajęć 2

Temat zajęć

Podbój kosmosu

Efekty uczenia się

- Dyskutuje na temat podboju kosmosu.

Przebieg zajęć

Krok 1.

Historia pierwszego człowieka w kosmosie.

Krok 2.

Przyszłość ludzkości w kosmosie. Dyskusja, przegląd artykułów popularno-naukowych.

Krok 3.

Zagadnienia etyczne podboju kosmosu. Dyskusja, przegląd artykułów popularno-naukowych.

Jakie pytania zadać, aby studenci mogli podzielić się swoimi przemyśleniami?

Kiedy było pierwsze lądowania człowieka na Księżycu?

Sugestie i wskazówki dla nauczycieli

1. Pytanie dla studentów: Grawitacja na Ziemi wynosi $9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Czy na Marsie grawitacja jest taka sama jak na Ziemi?
2. Pytanie dla studentów: Gdzie jest największa grawitacja na Ziemi?
3. Jakie są obecnie plany badań kosmicznych NASA?

Karty pracy dla studentów

Zadanie 1.

Przedstaw swoją opinię na temat podboju planet Układu Słonecznego.

Zadanie 2.

Przedstaw swoje pozytywne argumenty na temat podboju planet Układu Słonecznego.

Zadanie 3.

Przedstaw swoje negatywne argumenty na temat podboju planet Układu Słonecznego.

Zadanie 4.

Jakie są ostatnie odkrycia dokonane przez sondy kosmiczne w Układzie Słonecznym?

Zadanie 5.

Jakie zagrożenia niosą kosmiczne śmieci?

Zadanie 6.

Na Ziemi osoba waży $50\ \mathrm{kg}$. Ile kilogramów będzie ważyła ta osoba na Marsie?

Rozwiązanie

Około $18\ \mathrm{kg}$.

Moduł 11: Geometryczna interpretacja pochodnych cząstkowych

Scenariusze zajęć z wykorzystaniem aplikacji VR

Scenariusz zajęć 1

Temat zajęć

Interpretacja geometryczna pochodnych cząstkowych

Efekty uczenia się

- Interpretuje pochodne cząstkowe.

Przebieg zajęć

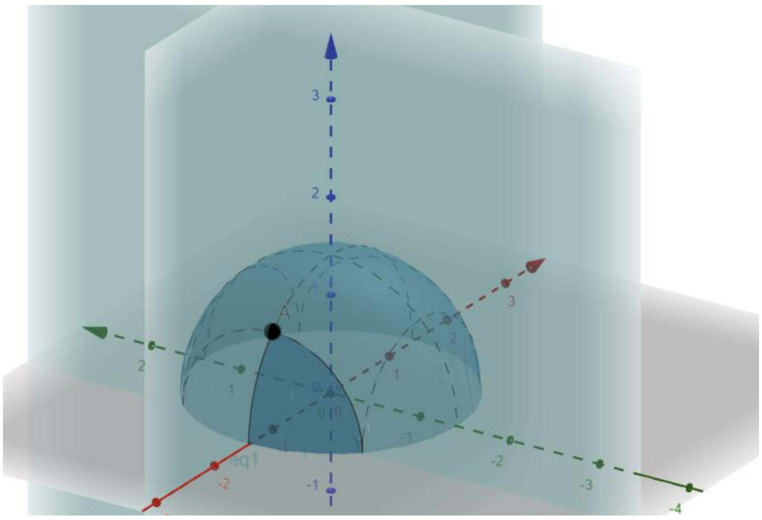
Krok 1.

Przypomnienie interpretacji geometrycznej pochodnej funkcji jednej zmiennej.

Krok 2.

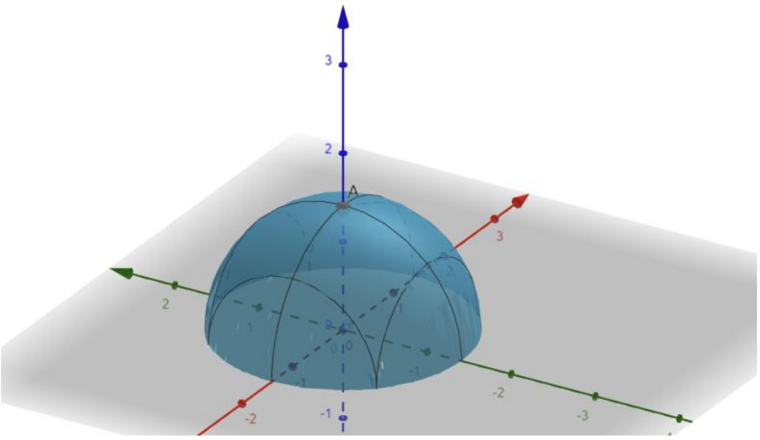
Wprowadzenie definicji pochodnej cząstkowej i jej interpretacji geometrycznej dla funkcji dwóch zmiennych.

Oszacuj pochodne cząstkowe w wybranym punkcie.



Krok 3.

Oszacuj pochodne cząstkowe w wybranym punkcie.



Krok 4.

Postaw hipotezę związku między ekstremum funkcji a pochodnymi cząstkowymi.

Jakie pytania zadać, aby studenci mogli podzielić się swoimi przemyśleniami?

Jak wprowadzić definicje pochodnych cząstkowych dla funkcji n-wymiarowej?

Scenariusz zajęć 2

Temat zajęć

Obliczanie pochodnych cząstkowych

Efekty uczenia się

- Oblicza pochodne cząstkowe.

Przebieg zajęć

Krok 1.

Oblicz z definicji pochodną cząstkową dla funkcji $f(x,y) = y + x^2$ po zmiennej x.

Krok 2.

Oblicz z definicji pochodną cząstkową dla funkcji $f(x,y) = y + x^2$ po zmiennej y.

Krok 3.

Oblicz pochodne cząstkowe dla funkcji $f(x,y) = \sin(x^3 + y^2)$.

Krok 4.

Oblicz pochodne cząstkowe dla funkcji $f(x,y) = x\sin(x^3 + y^2)$.

Krok 5.

Oblicz pochodne cząstkowe dla funkcji $f(x,y) = x\frac{\sin(x^3+y^2)}{x^2+2}$.

Jakie pytania zadać, aby studenci mogli podzielić się swoimi przemyśleniami?

Jak obliczać pochodne wyższych rzędów?

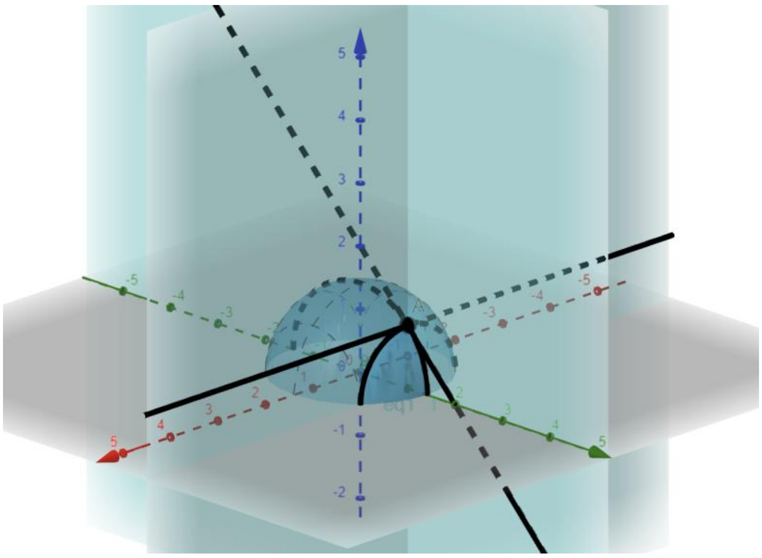
Sugestie i wskazówki dla nauczycieli

1. Uwaga dla studentów: Obliczając pochodną cząstkową względem wybranej zmiennej, obliczamy tak jak dla funkcji jednej zmiennej, pozostałe zmienne traktujemy jako stałe.
2. Pytanie dla studentów: Jak obliczyć pochodną cząstkową po zmiennej x funkcji trzech zmiennych? Zastosuj powyższą zasadę i oblicz $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}$, jeśli $f(x,y,z) = x^2zy + x$.
3. Funkcja dana wzorem $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ nie jest ciągła, a posiada pochodne cząstkowe w punkcie $(0,0)$.
4. Ważne: jeśli istnieją pochodne cząstkowe, to funkcja nie musi być ciągła.
5. Do obliczania pochodnych cząstkowych możesz skorzystać program WOLFRAM.

Karty pracy dla studentów

Zadanie 1.

Podaj pochodne cząstkowe w punkcie A dla funkcji przedstawionej na rysunku.

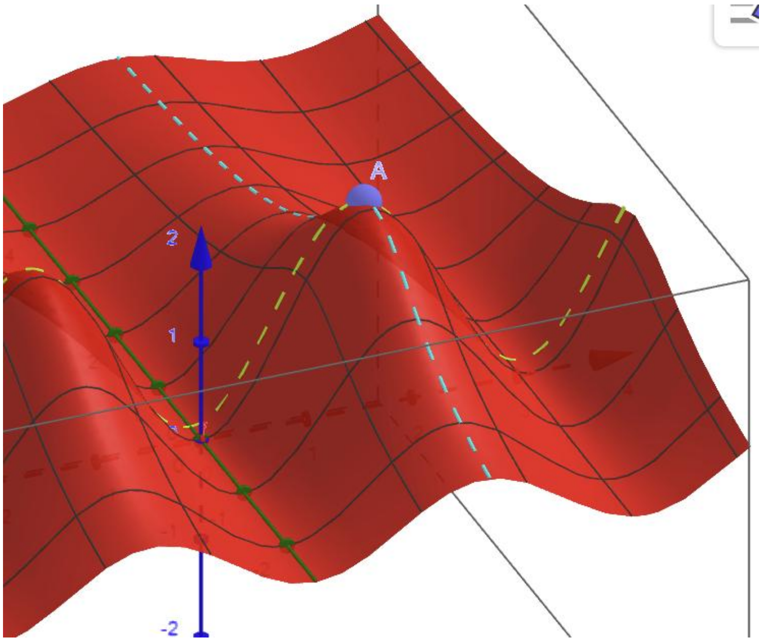


Rozwiązanie

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0$.

Zadanie 2.

Podaj pochodne cząstkowe w punkcie A dla funkcji przedstawionej na rysunku.



Rozwiązanie

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0.$

Zadanie 3.

Oblicz pochodne cząstkowe dla funkcji $f(x, y) = x^3y + y^2 + 4$.

Rozwiązanie

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 3x^2y, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^3 + 2y.$

Zadanie 4.

Oblicz z definicji pochodną cząstkową dla funkcji $f(x, y) = x^2y + x$ po zmiennej x.

Rozwiązanie

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2y+x+h-(x^2y+x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xhy+h^2}{h} = 2xy.$

Zadanie 5.

Oblicz pochodne cząstkowe dla funkcji $f(x, y) = xe^{x^2+y^2}$.

Rozwiązanie

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^{x^2+y^2}(1 + 2x^2), \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2xye^{x^2+y^2}.$

Zadanie 6.

Czy dziedziny funkcji $f(x, y) = \sqrt{x + y}$ i pochodnych cząstkowych są takie same?

Rozwiązanie

Nie.

Zadanie 7.

Dana jest funkcja $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$. Uzasadnij, że

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=(2x+2y)\cdot f(x,y).$$

Rozwiązanie

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=2x\sin(x^2+y^2)+2y\sin(x^2+y^2)=(2x+2y)\cdot f(x,y).$$

Zadanie 8.

Podaj przykład funkcji $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$, która spełnia warunek

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0.$$

Rozwiązanie

$f(x,y)=x-y.$

Moduł 12: Współrzędne sferyczne

Scenariusze zajęć z wykorzystaniem aplikacji VR

Scenariusz zajęć 1

Temat zajęć

Współrzędne biegunowe

Efekty uczenia się

- Posługuje się współrzędnymi biegunowymi.

Przebieg zajęć

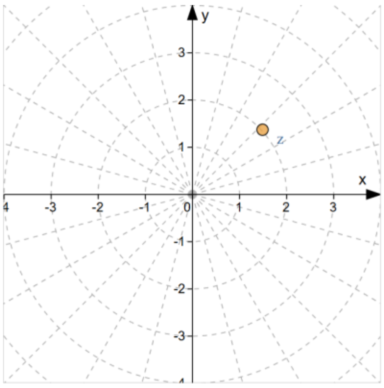
Krok 1.

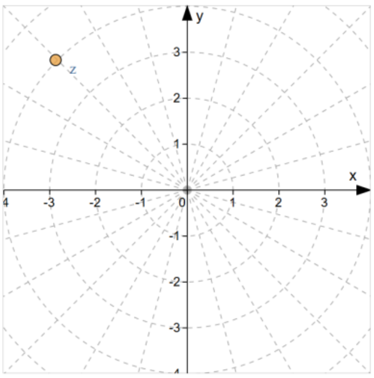
Przypomnienie własności i wykresów funkcji $\sin(x)$ i $\cos(x)$.

Krok 2.

Omówienie zagadnienia współrzędnych biegunowych $\begin{cases} x = r\cos(\alpha) \\ y = r\sin(\alpha) \end{cases}$.

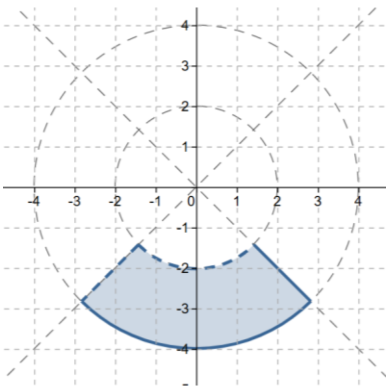
Określ współrzędne biegunowe punktów przedstawionych na rysunku.





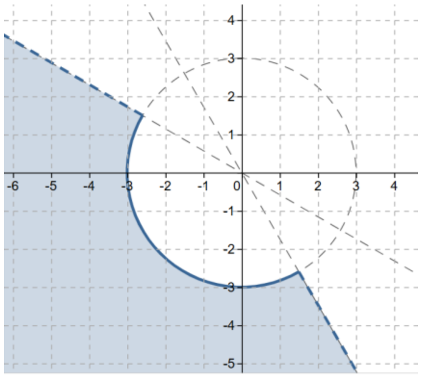
Krok 3.

Opisz obszar za pomocą współrzędnych biegunowych.



Krok 4.

Opisz obszar za pomocą współrzędnych biegunowych.



Jakie pytania zadać, aby studenci mogli podzielić się swoimi przemyśleniami?

Czym różnią się współrzędne biegunowe od współrzędnych kartezjańskich?

Scenariusz zajęć 2

Temat zajęć

Współrzędne sferyczne

Efekty uczenia się

- Posługuje się współrzędnymi sferycznymi.

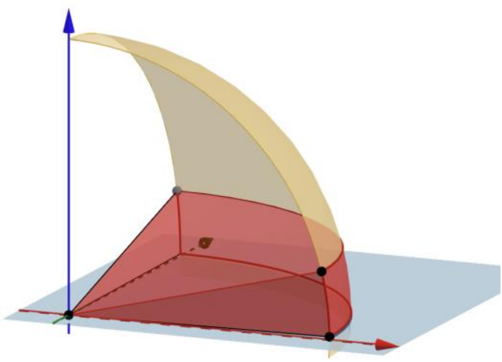
Przebieg zajęć

Krok 1.

Wprowadzenie współrzędnych sferycznych $\begin{cases} x = r\cos(\theta)\cos(\alpha) \\ y = r\cos(\theta)\sin(\alpha). \\ z = r\sin(\theta) \end{cases}$

Krok 2.

Omówienie zbiorów we współrzędnych sferycznych.



$$\begin{cases} 0 \leq r \leq 4 \\ 0° \leq \alpha \leq 90° \\ 0° \leq \theta \leq 20° \end{cases}$$

Krok 3.

Obliczanie odległości między punktami, jeśli dane są za pomocą współrzędnych sferycznych.

Jakie pytania zadać, aby studenci mogli podzielić się swoimi przemyśleniami?

Jakie są ograniczenia wartości współrzędnych sferycznych?

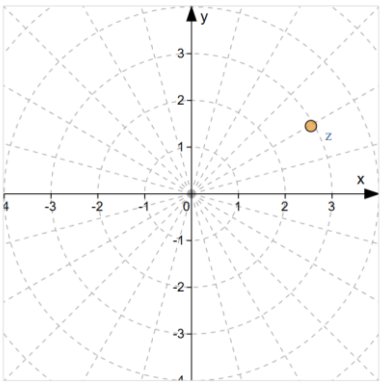
Sugestie i wskazówki dla nauczycieli

1. Pytanie dla studentów: Jak napisać równanie okręgu we współrzędnych biegunowych?
2. Pytanie dla studentów: Jak napisać równanie sfery we współrzędnych sferycznych?
3. Jak przekształcić współrzędne biegunowe na współrzędne kartezjańskie?
4. Jak przekształcić współrzędne sferyczne na współrzędne kartezjańskie?
5. Do obliczeń współrzędnych sferycznych możesz skorzystać z programu WOLFRAM.

Karty pracy dla studentów

Zadanie 1.

Określ współrzędne biegunowe punktu przedstawionego na rysunku.

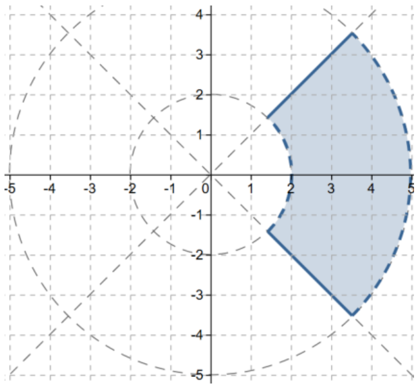


Rozwiązanie

Współrzędne biegunowe: $r = 3, \alpha = 30°$.

Zadanie 2.

Opisz za pomocą współrzędnych biegunowych zbiór przedstawiony na rysunku.



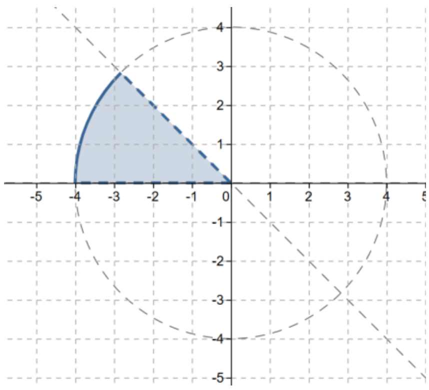
Rozwiązanie

$$\begin{cases} 2 < r < 5 \\ -45^\circ \leq \alpha \leq 45^\circ \end{cases}.$$

Zadanie 3.

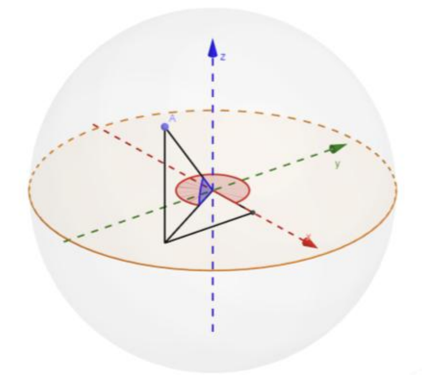
Narysuj zbiór $\begin{cases} 0 \leq r \leq 4 \\ 135^\circ < \alpha < 180^\circ \end{cases}$ dany za pomocą współrzędnych biegunowych.

Rozwiązanie



Zadanie 4.

Na podstawie rysunku oszacuj współrzędne sferyczne.



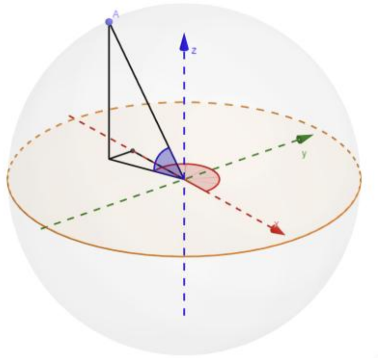
Rozwiązanie

$\alpha = 300^\circ, \theta = 45^\circ, r = 3.$

Zadanie 5.

Narysuj punkt o współrzędnych biegunowych: $\alpha = 200°, \theta = 60°, r = 3.$

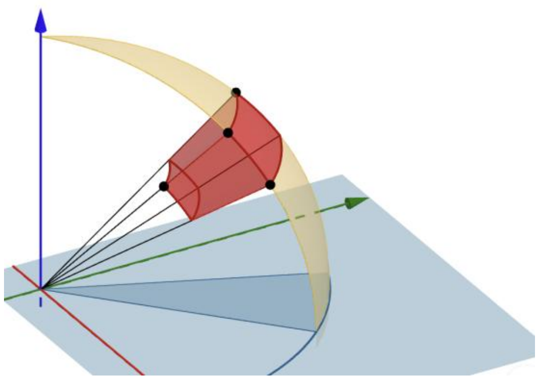
Rozwiązanie



Zadanie 6.

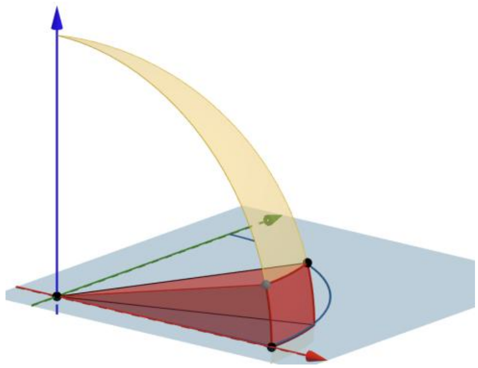
Narysuj zbiór $\begin{cases} 2 \leq r \leq 4 \\ 30° \leq \alpha \leq 60°. \\ 40° \leq \theta \leq 50° \end{cases}$

Rozwiązanie



Zadanie 7.

Opisz zbiór z użyciem współrzędnych sferycznych.



Rozwiązanie

$$\begin{cases} 0 \le r \le 4 \\ 0^\circ \le \alpha \le 20^\circ. \\ 0^\circ \le \theta \le 20^\circ \end{cases}$$

Moduł 13: Wektory, działania na wektorach

Scenariusze zajęć z wykorzystaniem aplikacji VR

Scenariusz zajęć 1

Temat zajęć

Interpretacja geometryczna wektorów w przestrzeni trójwymiarowej, działania na wektorach

Efekty uczenia się

- Interpretuje wektory w przestrzeni trójwymiarowej.

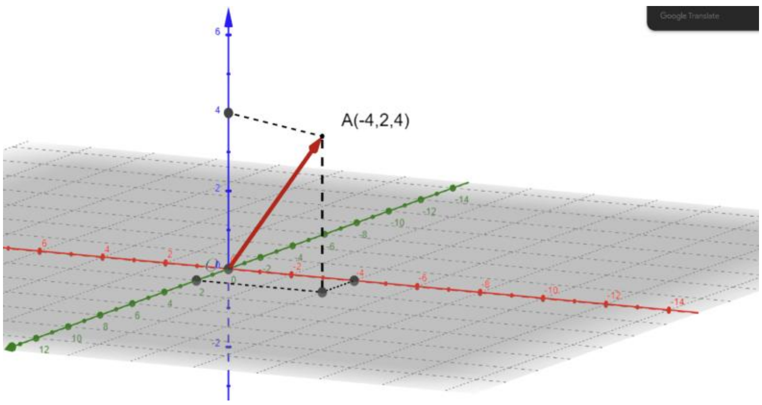
Przebieg zajęć

Krok 1.

Przypomnienie interpretacji geometrycznej wektora na płaszczyźnie, działania na wektorach.

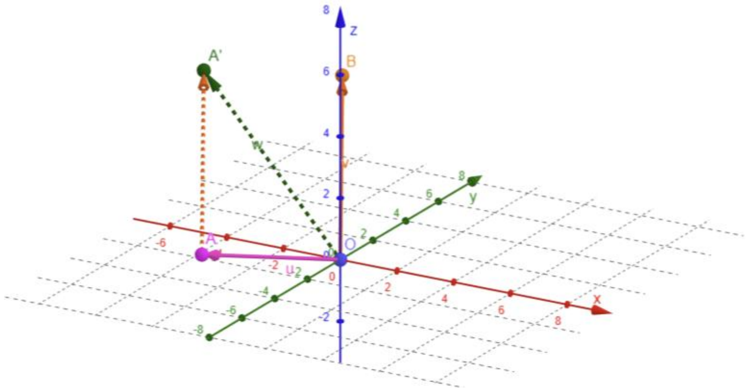
Krok 2.

Narysuj wektor o współrzędnych $\vec{v} = [-4,2,4]$.



Krok 3.

Prezentacja sumy wektorów $\vec{u}, \vec{v}$, jeśli $\vec{u} = [-4, -2{,}0]$, $\vec{v} = [0{,}0{,}6]$.



Krok 4.

Wykonaj działanie $\vec{u} + 3\vec{v} - 2\vec{s}$ na wektorach: $\vec{u} = [1{,}3{,}0]$, $\vec{v} = [-1{,}1{,}2]$, $\vec{s} = [1{,}0{,}0]$.

Rozwiązanie: $\vec{u} + 3\vec{v} - 2\vec{s} = [-4{,}6{,}6]$.

Jakie pytania zadać, aby studenci mogli podzielić się swoimi przemyśleniami?

Jak definiować wektory, działania na wektorach w przestrzeni n-wymiarowej?

Scenariusz zajęć 2

Temat zajęć

Iloczyn skalarny, iloczyn wektorowy w przestrzeni trójwymiarowej

Efekty uczenia się

- Oblicza iloczyn skalarny i wektorowy w przestrzeni trójwymiarowej.

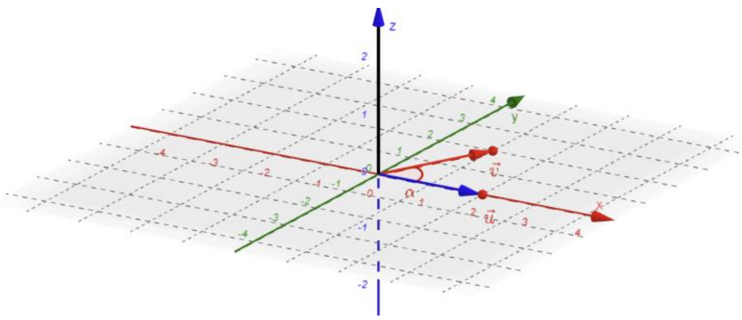
Przebieg zajęć

Krok 1.

Przypomnienie interpretacji geometrycznej iloczynu skalarnego na płaszczyźnie.

Krok 2.

Przedstaw graficznie interpretacje iloczynu wektorowego dla wektorów $\vec{u}, \vec{v}$ w przestrzeni.



Krok 3.

Obliczanie iloczynu skalarnego dla wektorów $\vec{u} = [1,4,0]$, $\vec{v} = [3,1,1]$ w przestrzeni.

Krok 4.

Wprowadzenie definicji i interpretacji iloczynu wektorowego.

Jakie pytania zadać, aby studenci mogli podzielić się swoimi przemyśleniami?

Jak definiować iloczyn skalarny i iloczyn wektorowy w przestrzeni n-wymiarowej?

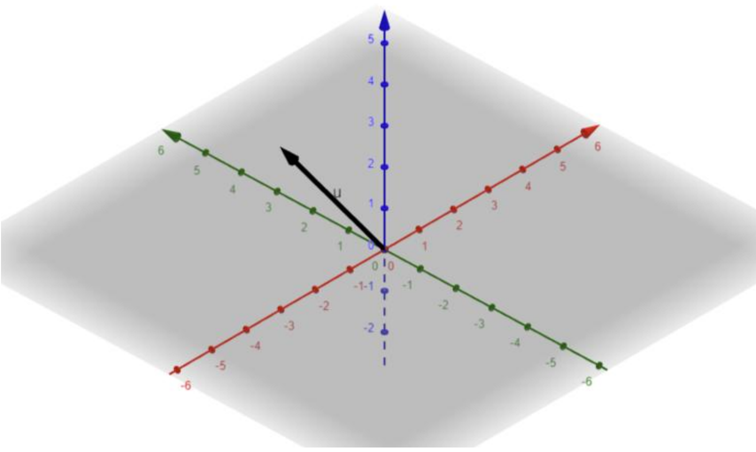
Sugestie i wskazówki dla nauczycieli

1. Jakie są praktyczne zastosowania iloczynu skalarnego?
2. Jakie są praktyczne zastosowania iloczynu wektorowego, np. w grafice komputerowej?
3. Omówić podstawowe własności iloczynu skalarnego.
4. Omówić podstawowe własności iloczynu wektorowego.
5. Jak sprawdzić, że wektory są równoległe, prostopadłe?
6. Do obliczenia iloczynu skalarnego i wektorowego możesz skorzystać z programu WOLFRAM.

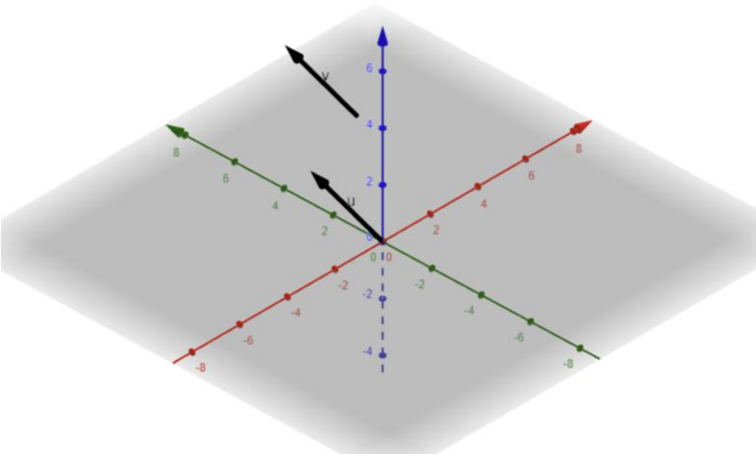
Karty pracy dla studentów

Zadanie 1.

Wektory $\vec{u}, \vec{v}$ są równe. Narysuj wektor $\vec{v}$, wiedząc że $\vec{u} = [-2,1,3]$.

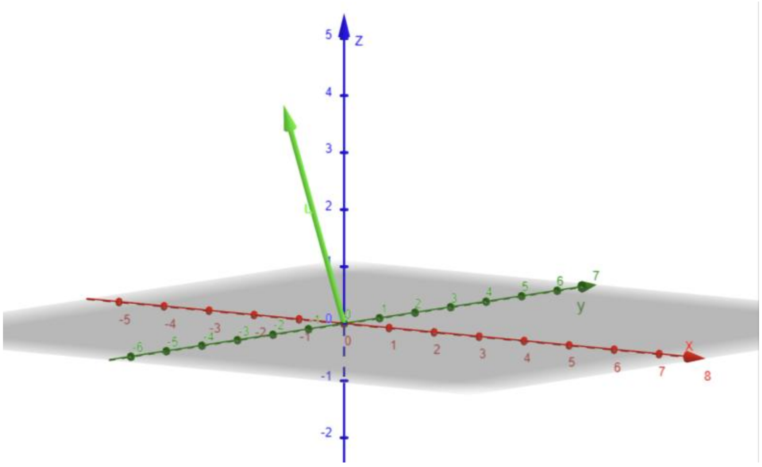


Rozwiązanie

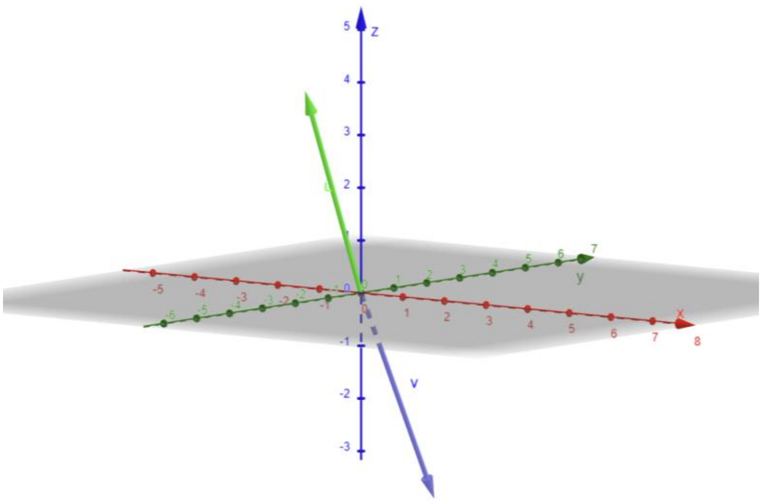


Zadanie 2.

Wektory $\vec{u}, \vec{v}$ są przeciwne. Narysuj wektor $\vec{v}$, wiedząc że $\vec{u} = [0,2,4]$.



Rozwiązanie



Zadanie 3.

Oblicz współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$, jeśli $A = (2,5,-1)$, $B = (0,2,4)$.

Rozwiązanie

$\overrightarrow{AB} = [-2,-3,5]$.

Zadanie 4.

Oblicz długość wektora $\vec{u} = [3,4,0]$.

Rozwiązanie

$|\vec{u}| = 5$.

Zadanie 5.

Wyznacz parametry a, b, c, aby wektory $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$ były równe $A = (2,5,-1)$, $B = (0,2,4)$, $C = (a, 0, c)$, $D = (0, b, 4)$.

Rozwiązanie

$a = 2$, $b = -3$, $c = -1$.

Zadanie 6.

Oblicz iloczyn skalarny wektorów $\vec{u} = [1,4,0]$, $\vec{v} = [3,1,1]$.

Rozwiązanie

$\vec{u} \times \vec{v} = [4,-1,-11]$.

Zadanie 7.

Oblicz iloczyn skalarny wektorów $\vec{u} = [3,4,0]$, $\vec{v} = [2,4,1]$.

Rozwiązanie

22.

Zadanie 8.

Sprawdź, czy trójkąt jest prostokątny $A = (2,5,-1)$, $B = (0,2,10)$, $C = (0,0,0)$.

Rozwiązanie

Tak.

Zadanie 9.

Wykaż, że $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$.

Rozwiązanie

Załóżmy, że $\vec{u} = [a, b, c]$. Wtedy $\vec{u} \cdot \vec{u} = [a, b, c] \cdot [a, b, c] = a^2 + b^2 + c^2 = |\vec{u}|^2$.

Zadanie 10.

Wykaż, że $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$.

Rozwiązanie

Załóżmy, że $\vec{u} = [a, b, c]$. Wtedy $\vec{u} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} = \vec{0}$.

Zadanie 11.

Oblicz objętość bryły wyznaczonej przez wektory $\vec{u} = [1,4,0]$, $\vec{v} = [3,1,1]$, $\vec{s} = [1,1,0]$.

Rozwiązanie

$\vec{u} \times \vec{v} = [4, -1, -11]$. $V = \vec{s} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 3$.