Co-funded by
the European Union

MATH 3D GEO VR

Materiais de trabalho

para professores e estudantes

„Modelos matemáticos para ensinar geometria
tridimensional usando realidade virtual”

“Mathematical models for teaching
three-dimensional geometry using virtual reality”

VERSÃO PORTUGUESA

Lodz University of Technology

universidade de aveiro
theoria poiesis praxis

UNIVERSITY OF ŽILINA

TARTU ÜLIKOOL · UNIVERSITY OF TARTU · 1632

UNIVERSITY OF SILESIA IN KATOWICE

Materiais de trabalho para professores e estudantes „Modelos matemáticos para ensinar geometria tridimensional usando realidade virtual" ("Mathematical models for teaching three-dimensional geometry using virtual reality")

Desenvolvidos pelo consórcio do projeto Math3DgeoVR.

Co-funded by the European Union

Co-financiado pela União Europeia (Math3DgeoVR, n.º do projeto 2021-1-PL01-KA220-HED-000030365). No entanto, os pontos de vista e as opiniões expressas são as dos autores e não refletem necessariamente a posição da União Europeia ou da Fundacja Rozwoju Systemu Edukacji. Nem a União Europeia nem a autoridade que concede a subvenção podem ser tidos como responsáveis por essas opiniões.

Lodz University of Technology

universidade de aveiro theoria poiesis praxis

UNIVERSITY OF ŽILINA

TARTU ÜLIKOOL UNIVERSITY OF TARTU 1632

UNIVERSITY OF SILESIA IN KATOWICE

Oculus Quest 2

Introdução ao Oculus Quest 2

Introdução ao Oculus Quest 2

O Oculus Quest 2, agora conhecido como Meta Quest 2, é um dispositivo de realidade virtual independente que oferece várias funcionalidades avançadas. Aqui está uma descrição detalhada das suas funcionalidades e instruções sobre como as utilizar.

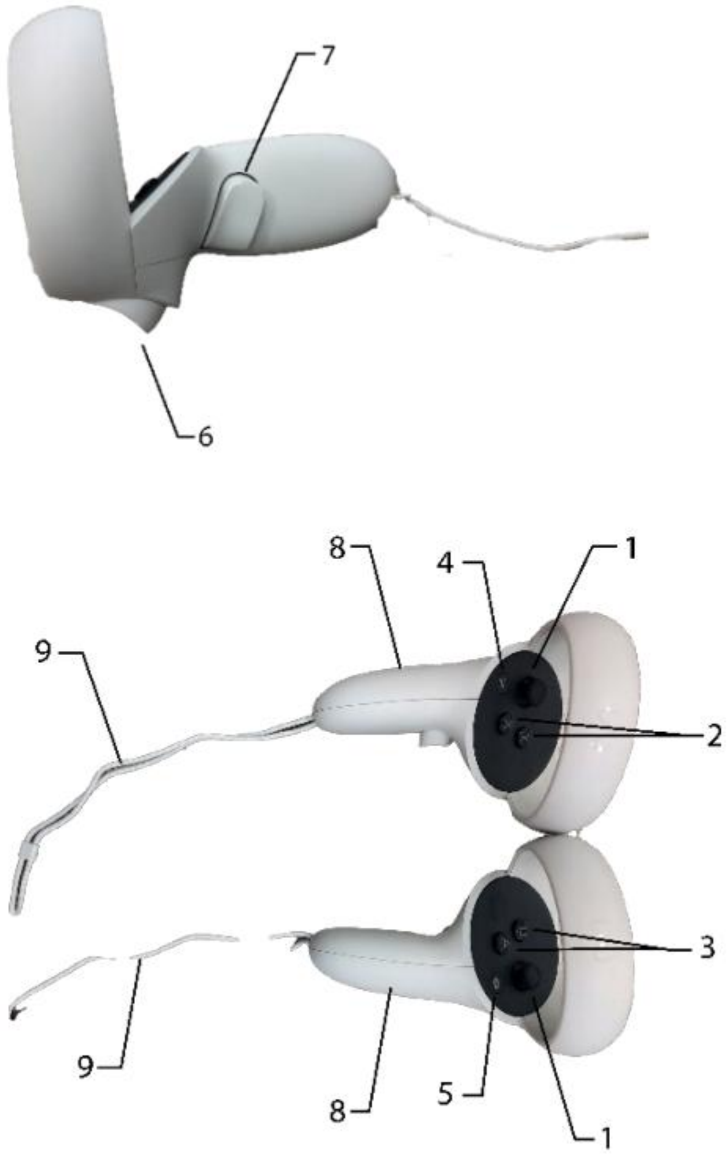
O Oculus Quest 2 é composto por dois itens principais:

1. **Display montado na cabeça (HMD, Figura 1)**
2. **Controladores Touch (Figura 2)**

1. Porta de Carregamento
2. Botão de Energia
3. Controlo de Volume
4. Porta de Áudio
5. Ajuste das Lentes
6. Correias de Ajuste
7. Correias de Ajuste
8. Espaçador para Óculos (opcional)

Figura 1. Display montado na cabeça

(adaptado de Meta Quest 2 New User Guide, University of South Carolina. (n.d.). *[Image depicting the Meta Quest 2 headset]*. Em *Meta Quest 2 New User Guide*. Retirado de https://sc.edu/about/offices_and_divisions/cte/teaching_resources/docs/quest2_user_guide.pdf).



1. Joysticks
2. Botões X/Y (Controlador Esquerdo)
3. Botões A/B (Controlador Direito)
4. Botão de Menu (Controlador Esquerdo)
5. Botão Oculus (Controlador Direito)
6. Botões de Gatilho
7. Botões de Aperto
8. Compartimentos para Bateria
9. Correias para Pulso

Figura 2. Controladores

(adaptado de Meta Quest 2 New User Guide, University of South Carolina. (n.d.). *[Image depicting the Meta Quest 2 headset]*. Em *Meta Quest 2 New User Guide*. Retirado de https://sc.edu/about/offices_and_divisions/cte/teaching_resources/docs/quest2_user_guide.pdf).

Funcionalidades Básicas

Ecrãs: Os óculos estão equipados com dois ecrãs com uma resolução de 2064 x 2208 píxeis por olho, proporcionando uma imagem clara e detalhada.

Processador: O Quest 2 funciona com um processador Qualcomm Snapdragon XR2, que permite uma operação fluida de jogos e aplicações de realidade virtual.

Rastreamento de Movimento: Os óculos oferecem rastreamento de movimento em espaço 3D graças a quatro câmaras colocadas externamente, permitindo-te interagir com o seu ambiente.

Controladores: São incluídos controladores Touch para um controlo preciso no mundo virtual.

Funções Comunitárias: Os utilizadores podem participar em jogos multijogador e eventos ao vivo para enriquecer a experiência de realidade virtual.

Compatibilidade com PC: Os óculos podem ser ligados a computadores, permitindo aos utilizadores usar aplicações de VR mais exigentes.

Como começar com o Oculus Quest 2

Como ligar os óculos

Para ligar o Oculus Quest 2, faça o seguinte:

1. Pressione o botão de energia na parte superior dos óculos.
2. Aguarde que o sistema inicie e exiba o logótipo do Oculus.

Registar uma conta

Para utilizar o Oculus Quest 2, é necessário ter uma conta Meta (anteriormente Facebook). O processo de registo inclui:

1. Descarregar a aplicação Oculus: Pode descarregar a aplicação na App Store ou na Google Play Store.
2. Iniciar sessão: O utilizador deve iniciar sessão na sua conta Meta.
3. Configurar o perfil: O utilizador define preferências, adiciona informações de pagamento e cria um PIN para a loja Oculus.

Reiniciar os óculos

1. Restaurar para as definições de fábrica:

- Desligue os óculos.

- Pressione e mantenha pressionados simultaneamente o botão de energia e o botão de volume para baixo durante cerca de 10 segundos.
- Quando o logótipo do Oculus aparecer, solte os botões.
- Use os botões de volume para navegar e selecione "Restaurar Definições de Fábrica".

2. Restaurar a aplicação: Pode também restaurar a aplicação Oculus no seu dispositivo móvel, o que pode ajudar a resolver problemas de conexão.

O Oculus Quest 2 é um dispositivo avançado que oferece uma vasta gama de opções de realidade virtual para jogadores e entusiastas da experiência.

Requisitos técnicos do Oculus Quest 2

Para tirar pleno proveito do Oculus Quest 2, o seu computador deve cumprir certos requisitos técnicos. Aqui estão os mais importantes:

- **Processador** Intel Core i5-4590 ou AMD Ryzen 5 1500X, ou melhor
- **RAM** Mínimo de 8 GB
- **Sistema operativo** Windows 10
- **Placa gráfica** NVIDIA GeForce GTX 1060 ou melhor. AMD Radeon RX 480 ou melhor
- **Portas** Porta USB disponível

Note que estes requisitos aplicam-se ao uso do Oculus Link, que permite ligar os óculos a um PC e jogar jogos de realidade virtual da biblioteca do Rift ou Steam. Se desejar usar o Quest 2 como um dispositivo autónomo, sem ligá-lo a um PC, os requisitos são ligeiramente inferiores. Também vale a pena notar o comprimento do cabo Oculus Link. Recomenda-se usar o cabo original ou boas alternativas para garantir o comprimento ideal e liberdade de movimento durante o jogo.

Problemas de configuração

Oculus Quest 2, apesar das suas funcionalidades avançadas, pode apresentar diversos problemas durante o uso. Aqui estão os mais comuns e como resolvê-los. Durante a configuração inicial, os utilizadores podem encontrar várias dificuldades.

Paragem durante as atualizações

Os óculos podem falhar ao completar o processo de atualização. Se isso acontecer, tente reiniciar o dispositivo ou restaurá-lo para as definições de fábrica se o problema persistir [1].

Código de emparelhamento

Poderá ser solicitado que insira um código de emparelhamento. Abra a aplicação Oculus no seu dispositivo móvel e siga as instruções para retomar a configuração [1].

Problemas de software

Os utilizadores podem experienciar problemas de software, como:

Fechos inesperados da aplicação

As aplicações podem, por vezes, ficar bloqueadas ou tornar-se não responsivas. Se isso acontecer, reiniciar os óculos ou forçar uma atualização de software nas definições [1,4] pode ajudar.

Ecrã preto

Os utilizadores podem ver um ecrã preto após remover os óculos. Neste caso, basta reiniciar o dispositivo para restaurar a visualização normal [4].

Problemas de desempenho

Durante o uso intensivo, podem ocorrer problemas de desempenho.

Sobreaquecimento

Os óculos podem aquecer, especialmente durante sessões prolongadas de jogo. Se isso acontecer, é uma boa ideia fazer uma pausa para que o dispositivo possa arrefecer [2].

Problemas de qualidade de imagem

Os utilizadores podem notar que a qualidade da imagem não é satisfatória. Isso pode ser devido a definições inadequadas ou à necessidade de atualizar o software [2].

Problemas de saúde

O uso de óculos de realidade virtual pode levar a alguns problemas de saúde.

Doença de Realidade Virtual

Alguns utilizadores podem experienciar sintomas semelhantes ao enjoo de movimento, como tonturas ou náuseas. Para minimizar esses sintomas, é recomendado fazer pausas e evitar o uso prolongado [6].

Problemas de conta

Em caso de problemas com a sua conta Meta (Facebook):

Problemas de Início de Sessão

Os utilizadores podem ter dificuldades ao iniciar sessão na sua conta. Vale a pena verificar se a informação de login está correta e se a aplicação Oculus está atualizada [1].

Em conclusão, o Oculus Quest 2 é um dispositivo avançado que pode apresentar vários problemas durante o uso. Muitos desses problemas podem ser resolvidos atualizando o software, reiniciando o dispositivo ou restaurando as definições de fábrica. Em caso de problemas de saúde, recomenda-se fazer pausas durante o uso.

Referências

[1] https://vrpolska.eu/poradnik-nowego-posiadacza-questa/

[2] https://mobiletrends.pl/sprawdzamy-gogle-oculus-quest-2-od-facebooka-czy-wprowadza-wirtulana-rzeczywistosc-pod-strzechy/

[3] https://www.youtube.com/watch?v=1uSoGOqmVbE

[4] https://business.oculus.com/support/444171669614375/?locale=pl_PL

[5] https://securecdn.oculus.com/sr/oculusquest-warning-polish

[6] https://motionsystems.pl/vr-sickness/

[7] https://www.meta.com/pl-pl/help/quest/articles/getting-started/getting-started-with-quest-2/what-is-meta-quest-2/

[8] https://www.meta.com/pl-pl/help/quest/articles/headsets-and-accessories/using-your-headset/.

Tutorial: Navegação pelos módulos

Controladores e Mãos

Pode realizar a maior parte das interações nesta aplicação utilizando tanto os controladores como as suas próprias mãos (se o rastreio de mãos estiver ativado nas definições dos óculos de realidade virtual). Para ativar o rastreio de mãos, coloque os controladores no chão de forma a que não se movam e, em seguida, coloque as suas mãos dentro da área de visualização dos óculos de realidade virtual. Para ativar o rastreio dos controladores, basta pegar nos controladores com as suas mãos.

Rastreio de mãos - para utilizar o rastreio de mãos, deve primeiro ativá-lo no menu do sistema: menu de sistema -> definições rápidas -> definições -> dispositivo -> mãos e controladores -> rastreio de mãos.

Andar

Ao usar o joystick no controlador esquerdo, pode mover-se para frente, para trás e para os lados. A frente estará sempre na direção para a qual está a olhar. Ao movimentar o joystick do controlador direito para a esquerda ou para a direita, pode rodar em incrementos de 45 graus.

Teletransporte

Ao inclinar o joystick do controlador direito para a frente, ativa o indicador de teletransporte. Aponta-o para qualquer lugar e depois solte o joystick; será transportado para o local indicado. As setas no final do apontador indicam a direção da sua visão após o teletransporte. Pode ajustar a direção inclinando o joystick lateralmente.

Pode chamar o indicador de teletransporte com a mão direita, palmas paralelas ao chão, dedo indicador esticado apontado para a frente, polegar esticado apontado para o lado esquerdo. A aprovação do teletransporte ocorre quando aponta o polegar esticado para a frente.

Agarrar objetos

Mergulhe a ponta do controlador num objeto que possa ser agarrado e utilize o botão de agarrar na pega do controlador para pegar o objeto. Irá segurá-lo até soltar o botão. Também pode agarrar o objeto com a sua mão e apertar todos os dedos sobre ele, ou agarrá-lo apenas com o dedo indicador e o polegar. Esta ação pode ser testada ao agarrar a tabela que está a levitar, agora, no lado esquerdo da porta.

Controlo da interface

Como provavelmente já sabe, pode interagir com os elementos da interface mergulhando o seu dedo ou a ponta do controlador numa pequena bola branca. Isso também se aplica a vários tipos de botões deslizantes.

Menu pop-up

Para abrir o menu pop-up, pressione o botão plano no controlador esquerdo ou faça um gesto de pinça (com o dedo indicador e o polegar da mão esquerda) enquanto mantém a mão levantada e voltada para os óculos VR. Da mesma forma, pode fechar este menu. O menu pop-up permite sair do módulo para o menu principal, ou seja, para a sala atual, a qualquer momento, ou sair da aplicação. Também permite alterar o volume da língua, alternar entre os modos sentado e em pé, e mostrar ou ocultar a tela no prompt.

Trabalhar com os módulos Math3DgeoVR

Os módulos da aplicação são módulos disponíveis que correspondem a diferentes questões matemáticas. Para cada um deles, existe uma parte introdutória, uma parte de teste e também exemplos de aplicação prática. O painel de navegação principal é apresentado na Figura 3.

Para iniciar o módulo, depois de concluir o tutorial, aceda ao menu nesta tela. Selecione os módulos (Figura 4) e, em seguida, pressione o botão correspondente ao módulo.

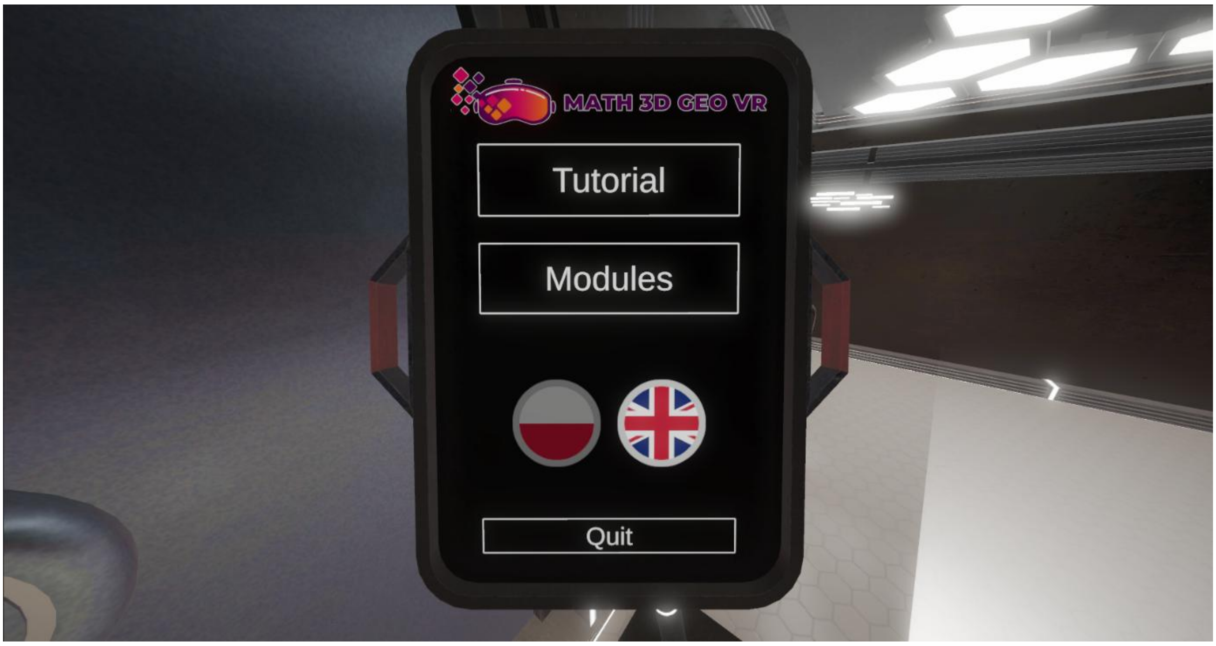


Figura 3. Painel de navegação principal na aplicação Math3DgeoVR.

Figure 4. Seleção de módulos de VR na aplicação Math3DgeoVR

Sair dos módulos

Na maioria dos casos, pode sair do módulo para o menu principal pressionando o botão na porta de saída a qualquer momento. Também pode sair de um módulo pressionando o botão inferior no menu pop-up.

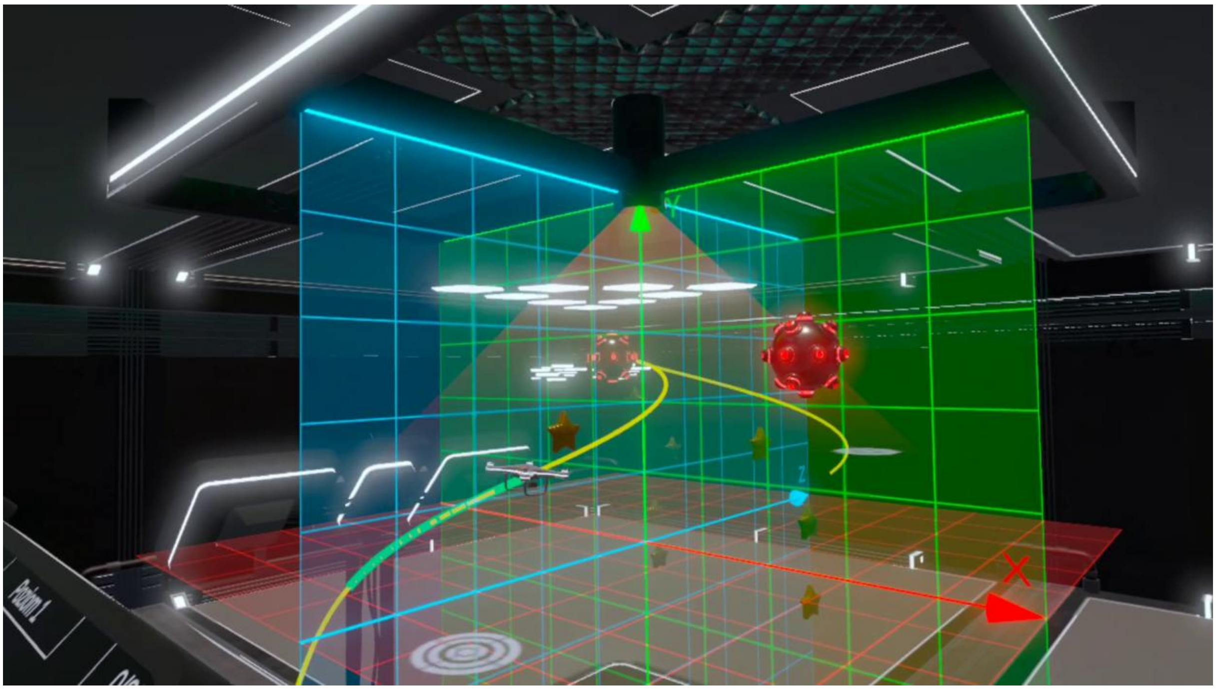
Dicas - os módulos podem conter ecrãs adicionais com dicas sobre, entre outras coisas, os seus controlos específicos. Para mostrar ou esconder estes ecrãs, pressione o botão B no controlador direito. Também pode alterar a visibilidade destas dicas através do botão no menu pop-up.

Módulos na Aplicação de Realidade Virtual (VR)

Módulo 1: Trajetória

Neste módulo, os estudantes irão explorar a relação entre funções matemáticas e as suas representações gráficas, com foco nas curvas espaciais. O objetivo é compreender como função de uma variável pode descrever uma curva tridimensional, como a trajetória de um objeto em movimento, como um drone. Os estudantes irão desenhar o caminho de voo de um drone usando duas funções — uma representando o movimento horizontal e a outra representando o movimento vertical. O desafio é navegar por pontos específicos, evitando obstáculos. Ao manipular as funções, os estudantes poderão visualizar o caminho do drone tanto no espaço 3D como na sua projeção no plano XY

A figura mostra um holograma com a trajetória de voo de um drone.

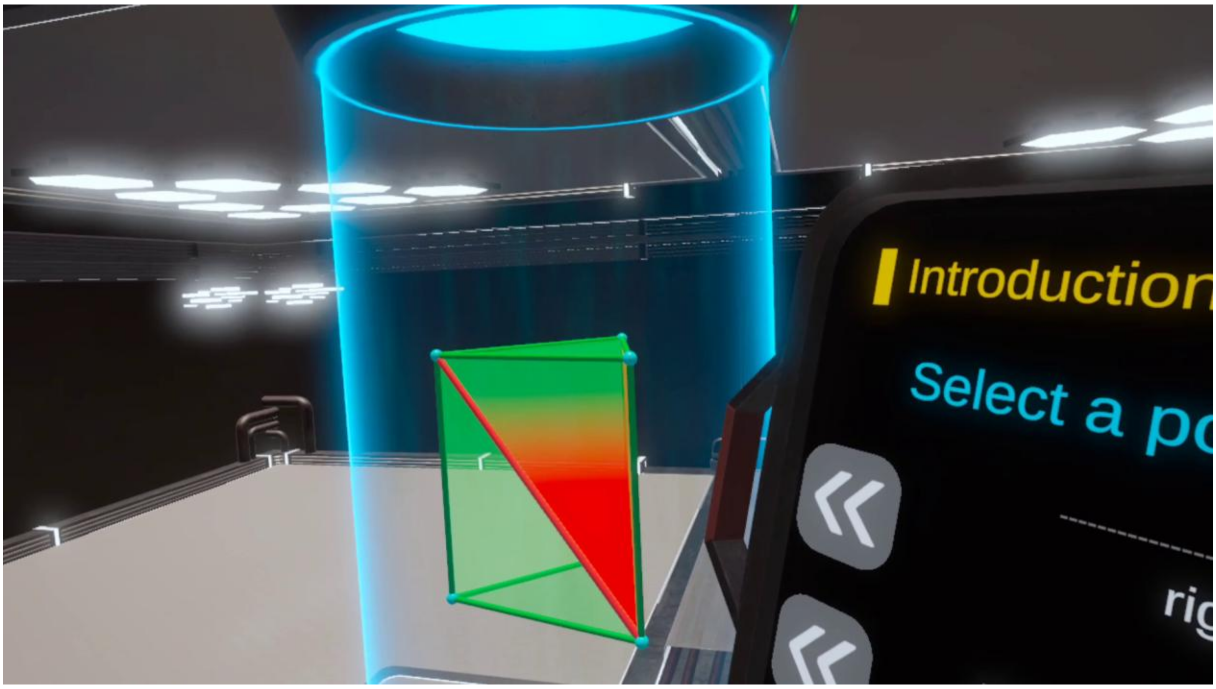


- **Cenário de aula 1:** Gráficos de funções trigonométricas de uma variável
- **Cenário de aula 2:** Uma função vetorial

Módulo 2: Ângulos num prisma

O tópico compreende a análise dos ângulos formados pelas diagonais e arestas de um prisma. Sendo um objeto tridimensional fundamental na geometria espacial, o prisma é amplamente estudado. Compreender os ângulos formados entre os seus diversos elementos é essencial para um conhecimento aprofundado da geometria sólida e das suas aplicações no mundo real. Neste módulo, os estudantes poderão explorar os sólidos e os ângulos.

A figura mostra um holograma com um prisma triangular.

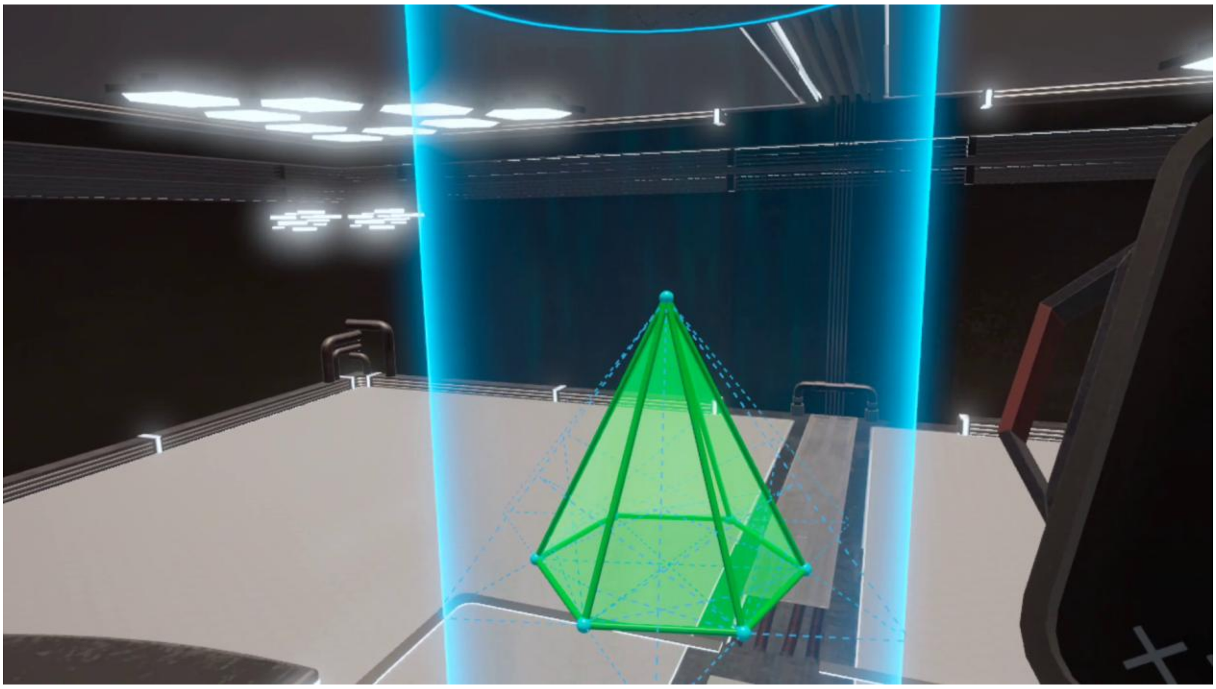


- **Cenário de aula 1**: Ângulos num cuboide
- **Cenário de aula 2**: Cálculo do comprimento das arestas, área da superfície e volume de um cuboide

Módulo 3: Ângulos numa pirâmide

Neste módulo, os estudantes irão aprender a identificar, calcular e compreender os ângulos nas pirâmides aplicando os princípios geométricos. O cenário é semelhante ao módulo anterior sobre curvas espaciais, mas agora o foco muda para a análise e manipulação de formas piramidais. Os estudantes irão trabalhar com várias pirâmides, explorando diferentes tarefas através de funções interativas, como modo de aprendizagem, modo de prática e modo de exemplos. Através deste módulo, os estudantes aprofundarão o seu conhecimento em geometria espacial e desenvolverão a capacidade de calcular os ângulos entre faces, arestas e vértices dos sólidos piramidais.

A figura mostra um holograma com uma pirâmide hexagonal.

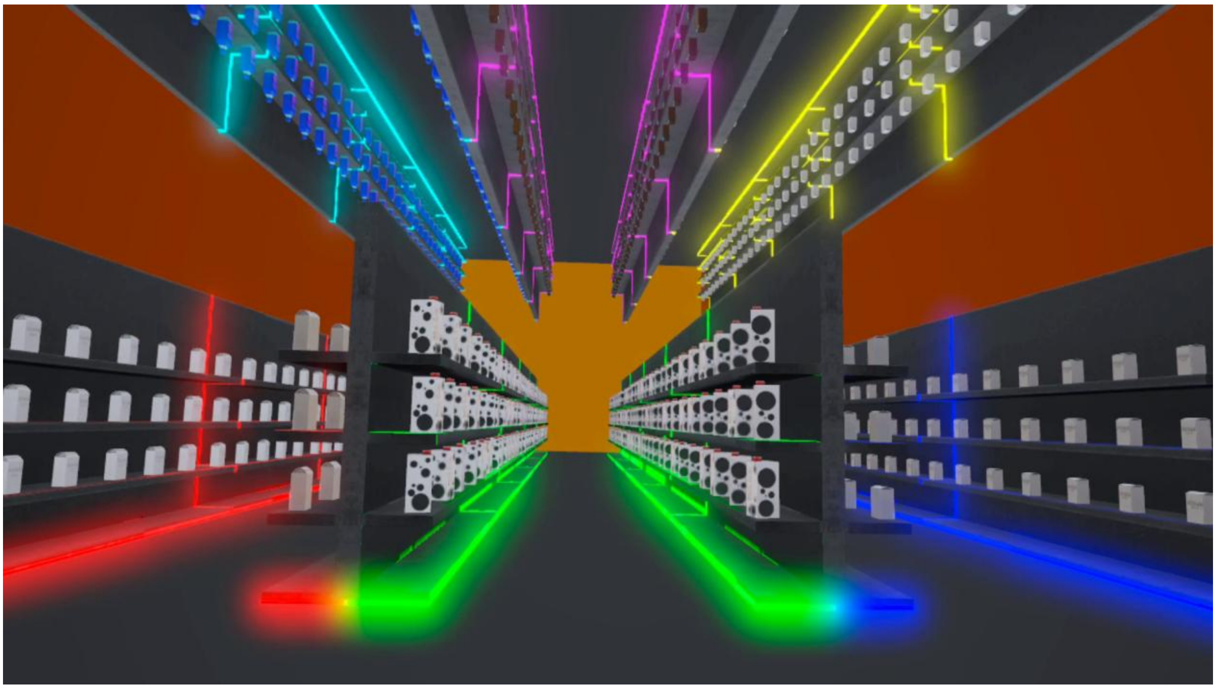


- **Cenário de aula 1**: Pirâmides e área total da superfície
- **Cenário de aula 2**: Ângulos numa pirâmide

Módulo 4: Geometria não euclidiana

Neste módulo, os estudantes irão explorar a geometria elíptica, um ramo da geometria não euclidiana que rejeita o quinto postulado de Euclides, o postulado das paralelas. Na geometria elíptica, qualquer duas linhas se intercetam em algum ponto, ou seja, o conceito de linhas paralelas não existe. Isto tem implicações profundas para a compreensão das formas e distâncias em espaços curvados, como a superfície da Terra. O módulo baseado em realidade virtual permite que os estudantes vivenciem a geometria elíptica na prática, navegando por um edifício onde os caminhos se assemelham a elipses. Esta abordagem prática ajuda os estudantes a visualizar e compreender as propriedades e os princípios da geometria não euclidiana num ambiente imersivo.

A figura mostra um espaço não euclidiano modelado – uma "mercearia não euclidiana".

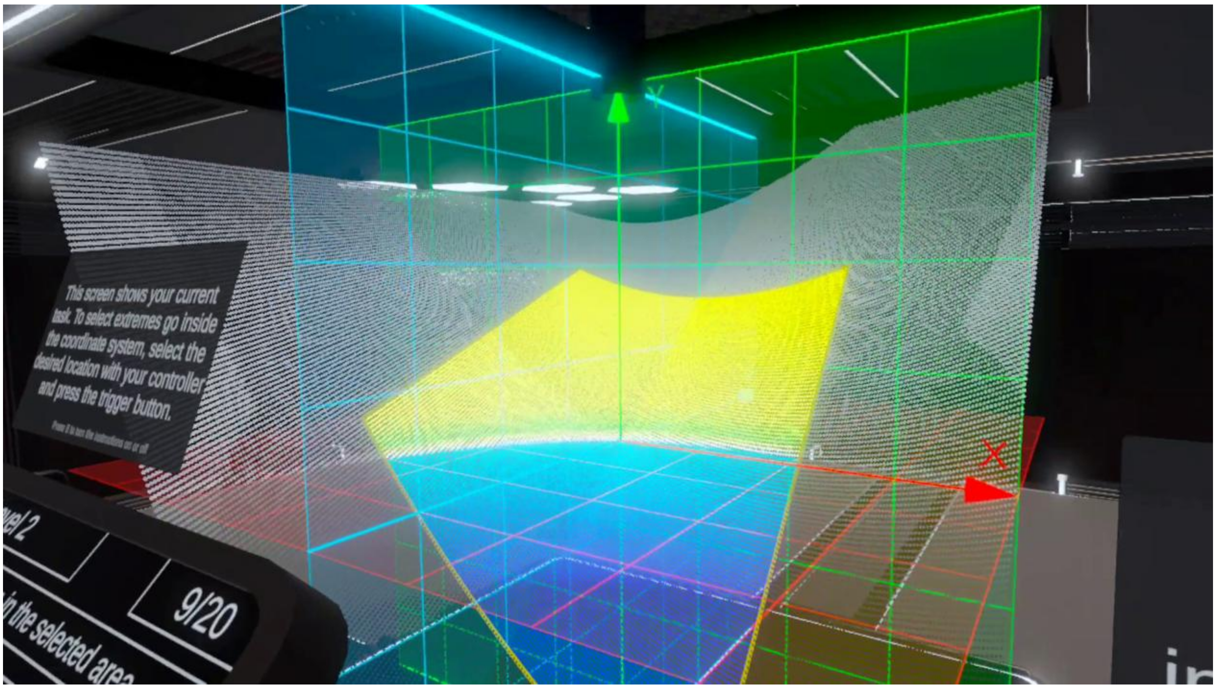


- **Cenário de aula 1**: Geometria euclidiana
- **Cenário de aula 2**: Fundamentos da geometria não euclidiana

Módulo 5: Máximos e mínimos de funções

Neste módulo, os estudantes aprenderão a encontrar os extremos globais (valores máximos e mínimos) de funções de duas ou três variáveis. A tarefa é apresentada de forma interativa, onde um sistema de três equações para os planos xxx, yyy e zzz é exibido na tela central. Os estudantes devem identificar os extremos globais colocando marcadores (representados como esferas) numa visualização 3D da superfície gerada pelas equações. O módulo permite os estudantes compreender como interpretar a geometria das funções e identificar os pontos críticos onde a função atinge os seus valores máximos ou mínimos globalmente, e não apenas localmente.

A figura mostra um holograma com o gráfico de uma função

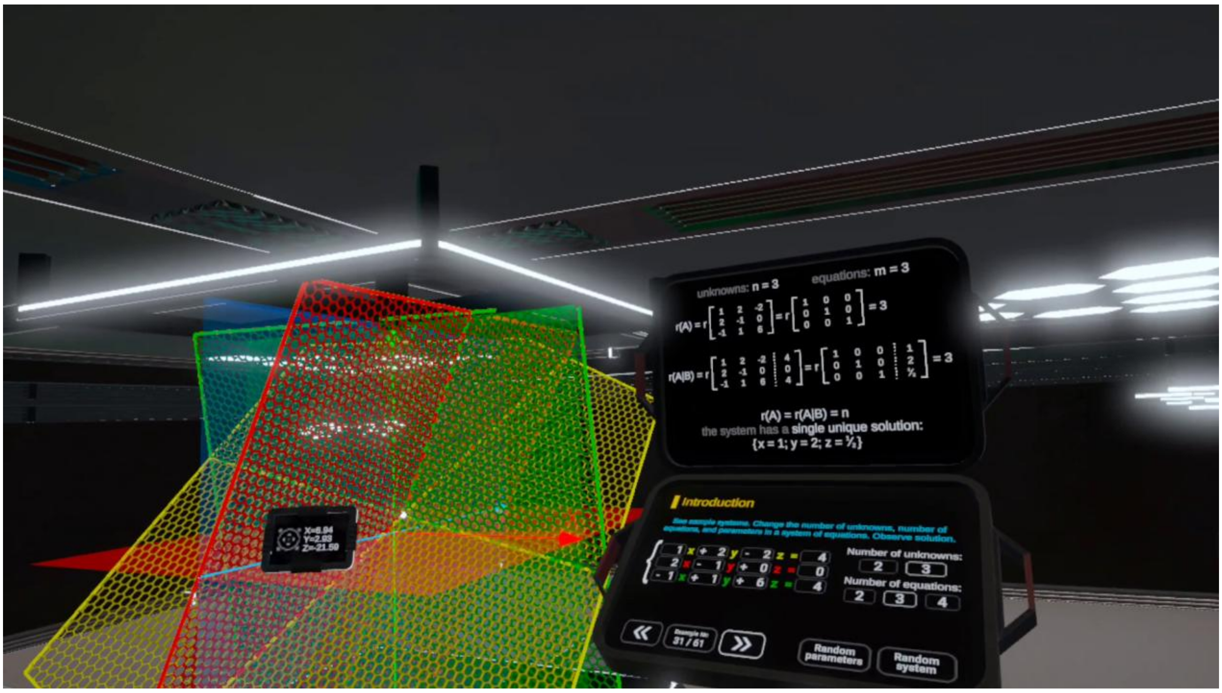


- **Cenário de aula 1**: Mínimo e máximo local: definição, interpretação geométrica
- **Cenário de aula 2**: Condições necessárias e suficientes para um extremo de uma função de duas variáveis

Módulo 6: Sistemas de equações lineares

Neste módulo, os estudantes irão explorar sistemas de equações lineares através de visualizações interativas. A tela principal exibe equações que os estudantes podem inserir usando uma interface em formato de tablet. A partir deste tablet, os estudantes podem escolher entre mais de 60 exemplos predefinidos ou modificar parâmetros, como variáveis, equações e coeficientes. Adicionalmente, têm a opção de aleatorizar o sistema inteiro ou parâmetros específicos, como os valores de xxx, yyy e zzz. Os estudantes podem também ajustar o número de incógnitas ou equações, proporcionando um ambiente flexível para resolução de problemas, tanto para iniciantes como para avançados. Um tablet secundário exibe matrizes, determinantes e as soluções desses sistemas, oferecendo aos estudantes a oportunidade de explorar como os conceitos de álgebra linear se aplicam à resolução de sistemas de equações.

A figura mostra um holograma com um sistema de equações.

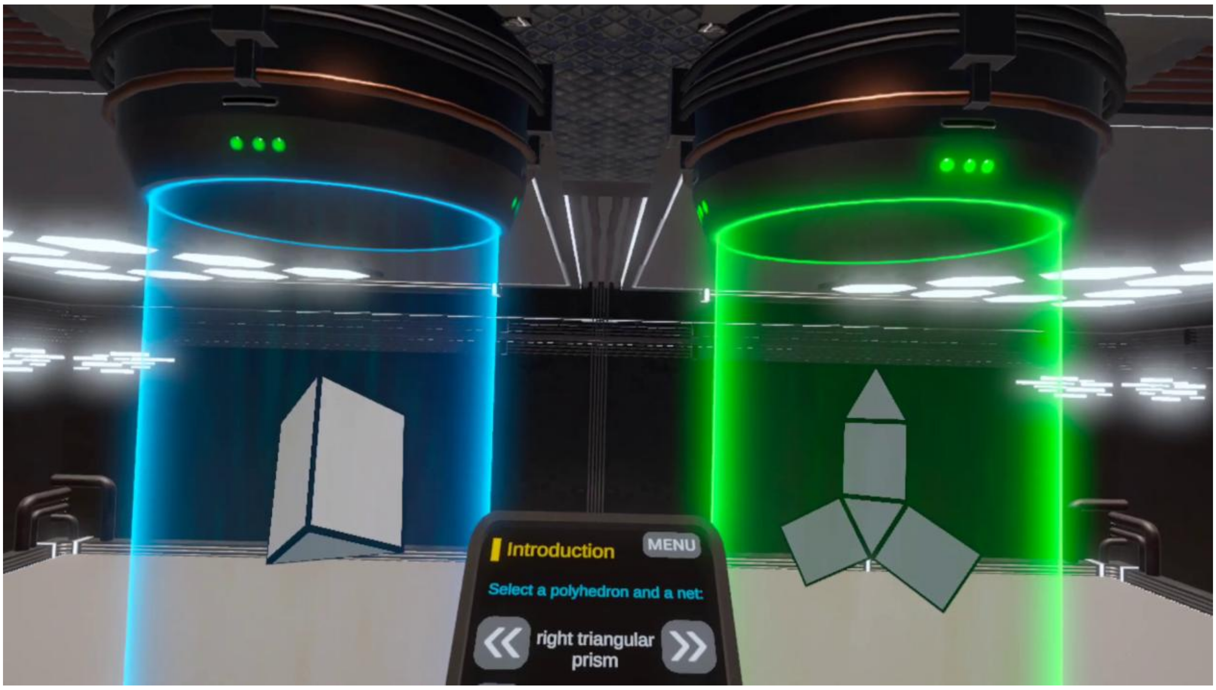


- **Cenário de aula 1**: Interpretação geométrica de equações lineares em espaços
- **Cenário de aula 2**: Resolução de equações lineares

Módulo 7: Os prismas

Este módulo foca-se na geometria dos prismas, com uma ênfase particular na compreensão da sua disposição espacial dentro de grelhas. Os estudantes irão trabalhar com tarefas envolvendo grelhas de prismas e pirâmides, visualizando como estes sólidos interagem numa disposição estruturada.

A figura mostra hologramas com um prisma e a sua grade.



- **Cenário de aula 1**: Grades de prismas
- **Cenário de aula 2**: Cálculo da área total da superfície e volume de prismas

Module 8: Pyramids

Este módulo foca-se na geometria das pirâmides, com uma ênfase particular na compreensão da sua disposição espacial dentro de grelhas. Os estudantes também irão trabalhar em tarefas envolvendo grelhas de pirâmides, visualizando como estes sólidos interagem numa disposição estruturada

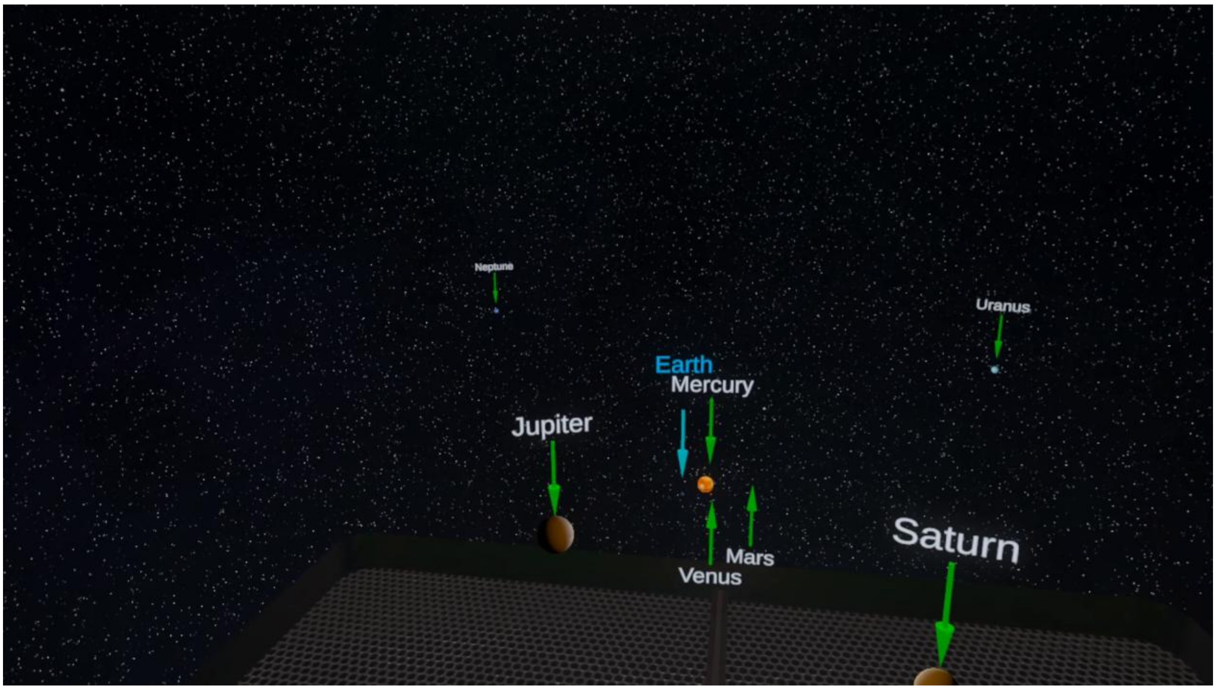
A figura mostra hologramas com uma pirâmide e a sua grade.

- **Cenário de aula 1**: Grades de pirâmides
- **Cenário de aula 2**: Volume de uma pirâmide

Módulo 9: Sistema Planetário

Este módulo introduz os estudantes à mecânica e à geometria dos sistemas planetários. Os estudantes irão explorar como os planetas orbitam uma estrela central, com foco na interação das forças, trajetórias e formas das órbitas. Utilizando ferramentas interativas, poderão visualizar as órbitas dos planetas no espaço 3D e ajustar parâmetros como o raio orbital, excentricidade e velocidade. O módulo enfatiza a compreensão das leis básicas do movimento planetário, como as descritas por Kepler, sem se aprofundar em matemática excessivamente complexa. Os estudantes observarão como as órbitas podem ser elípticas ou circulares e como a gravidade governa esses movimentos.

A figura mostra uma visualização dos planetas no Sistema Solar.

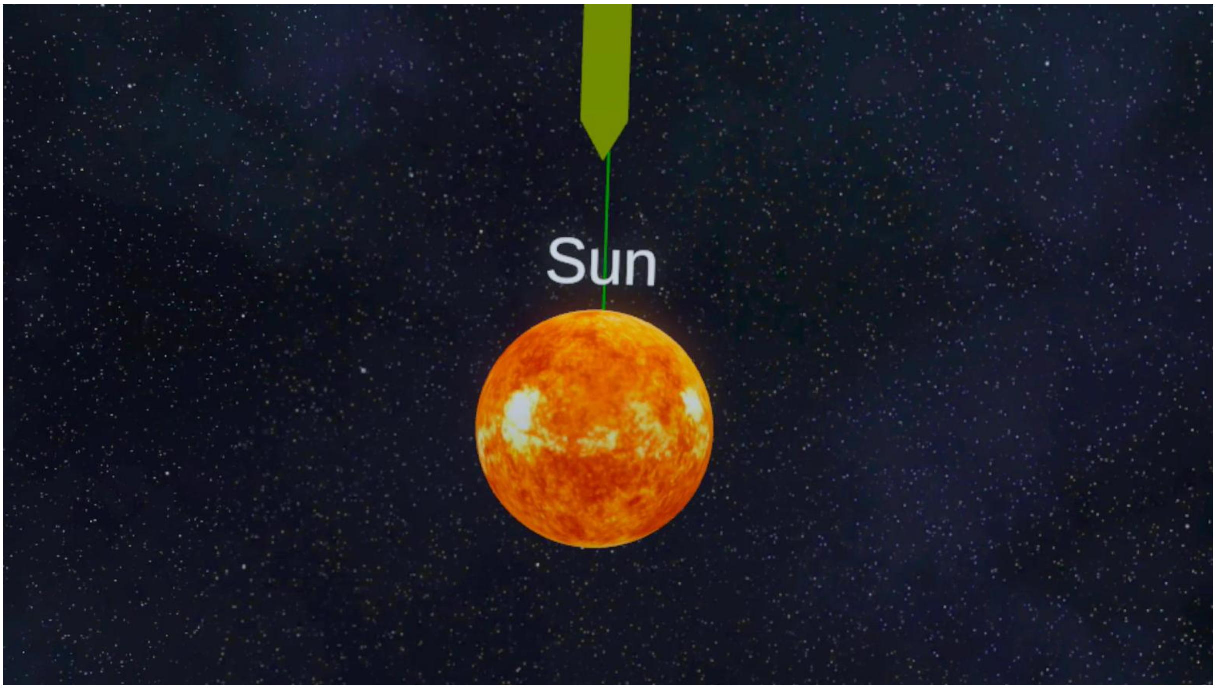


- **Cenário de aula 1**: Distâncias no Sistema Solar
- **Cenário de aula 2**: Comparações de quantidades no Sistema Solar

Módulo 10: Explorando o Sistema Solar

Este módulo introduz os estudantes ao tema da distância nas viagens espaciais. Os estudantes irão explorar o Sistema Solar movendo-se entre planetas utilizando velocidades conhecidas pela humanidade: a segunda velocidade cósmica (ou velocidade de fuga), a maior velocidade durante a missão Apollo 11, a velocidade da Parker Solar Probe, 1/100 da velocidade da luz, a velocidade da luz. Os estudantes aprenderão quanto tempo levará para viajar entre planetas e como isso é afetado pela gravidade. A jornada do Sol à Terra à velocidade da luz leva mais de 8 minutos, e quando finalmente vemos o nosso planeta, ele desaparece num momento. Isso mostra o quão pequena é a Terra em comparação com a distância percorrida.

A figura mostra o Sol no Sistema Solar.

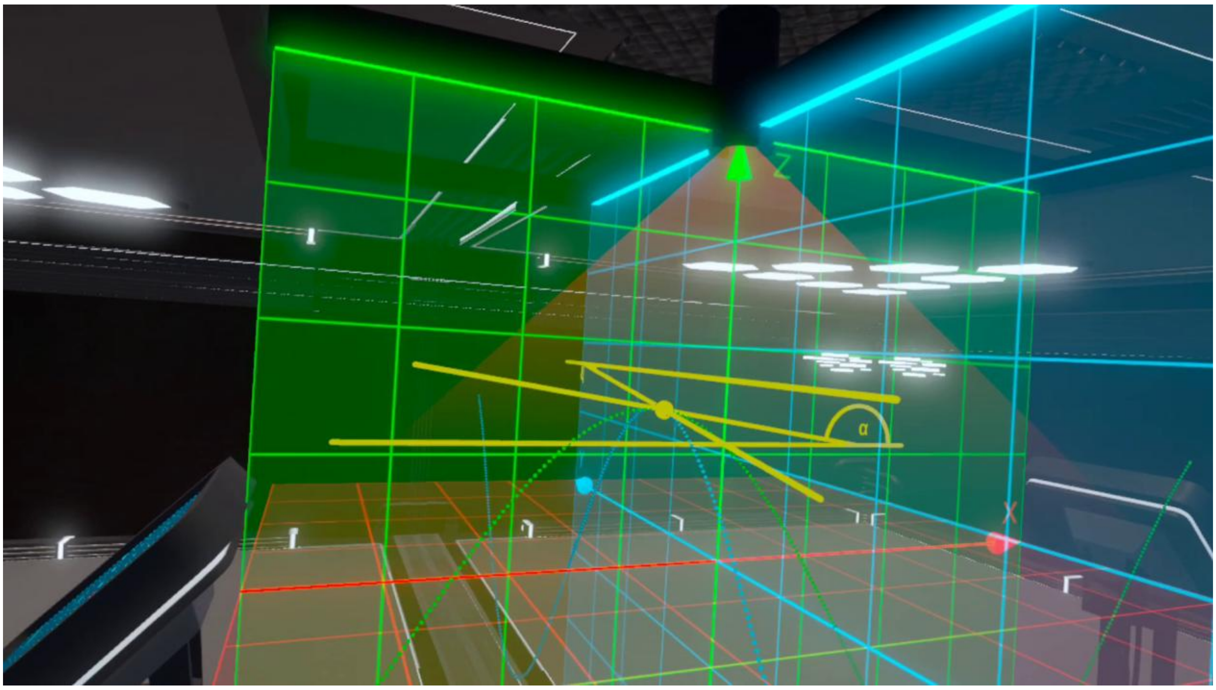


- **Cenário de aula 1**: Exploração espacial – conceitos básicos
- **Cenário de aula 2**: A conquista do espaço

Módulo 11: Interpretação geométrica das derivadas parciais

Neste módulo, os estudantes exploram o significado geométrico das derivadas parciais em cálculo multivariável. As derivadas direcionais representam a taxa de variação de uma função numa direção especificada, enquanto as derivadas parciais medem as variações ao longo de um único eixo. Através de visualizações interativas em 3D, os estudantes observarão como a inclinação de uma função varia dependendo da direção e da posição. O módulo permite que os estudantes manipulem superfícies e vetores para compreender como essas derivadas são calculadas e aplicadas. Esta abordagem prática ajuda a colmatar a lacuna entre as fórmulas matemáticas abstratas e as suas interpretações no mundo real.

The figure shows a hologram with a graph of a function and a visualization of the partial derivative.

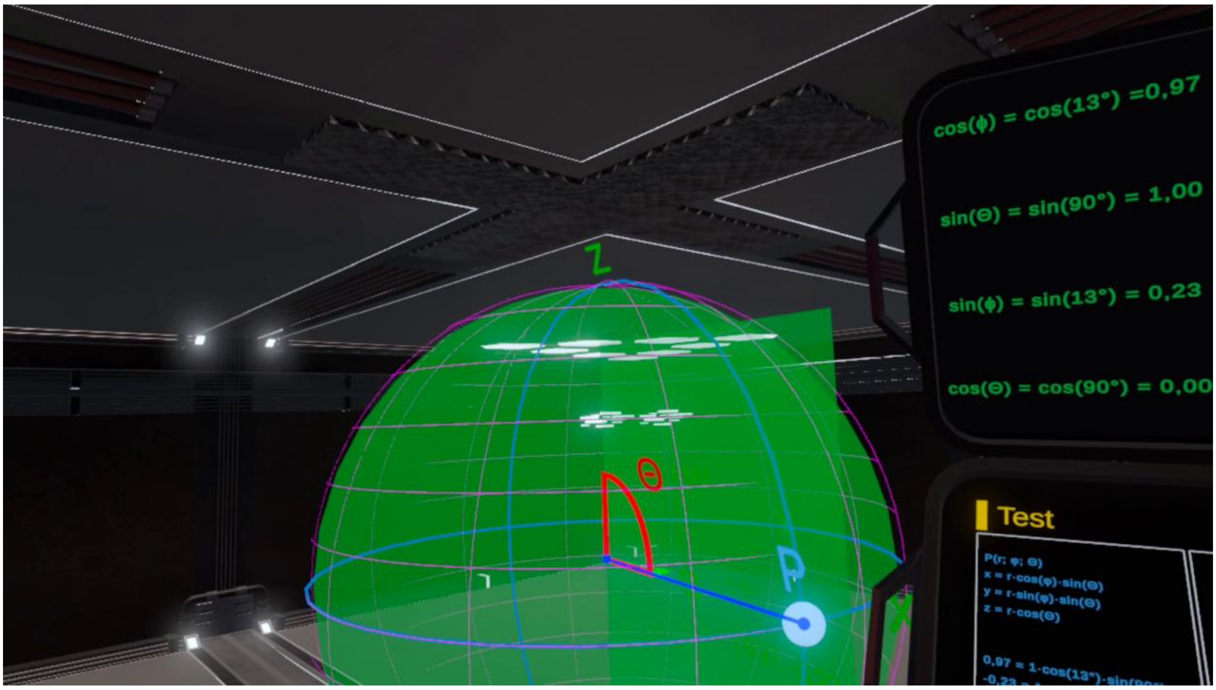


- **Cenário de aula 1**: Interpretação geométrica das derivadas parciais
- **Cenário de aula 2**: Cálculo de derivadas parciais

Módulo 12: Coordenadas esféricas

Neste módulo, os estudantes irão explorar o conceito de coordenadas esféricas, um sistema utilizado para descrever pontos no espaço tridimensional. Ao contrário das coordenadas cartesianas, as coordenadas esféricas especificam a posição de um ponto usando três valores: a distância radial (r), o ângulo polar (θ) e o ângulo azimutal (ϕ). Este sistema de coordenadas é particularmente útil para problemas que envolvem simetria em torno de um ponto central, como ocorre na física ou engenharia. O módulo inclui visualizações interativas onde os estudantes podem manipular estes parâmetros para observar como a posição de um ponto muda no espaço 3D. Além disso, irão praticar a conversão entre coordenadas cartesianas e esféricas e resolver problemas que envolvem a integração de funções sobre regiões esféricas.

The figure shows a hologram with visualization of spherical coordinates.

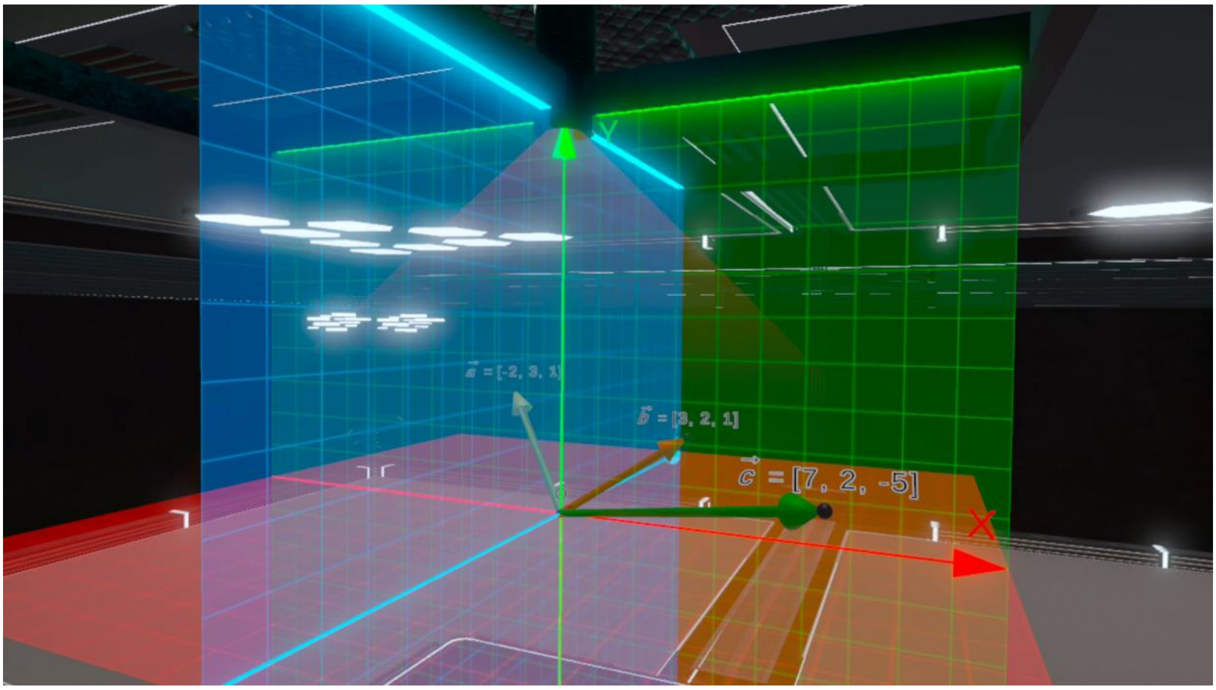


- **Cenário de aula 1**: Coordenadas polares
- **Cenário de aula 2**: Coordenadas esféricas

Módulo 13: Vetores, operações com vetores

Este módulo introduz os estudantes aos vetores e às operações fundamentais com eles realizadas. Os vetores são objetos matemáticos com magnitude e direção, sendo ferramentas essenciais para descrever quantidades físicas e relações espaciais. Os estudantes irão explorar operações básicas com vetores, como adição, subtração, multiplicação por um escalar e normalização, e aprenderão a calcular a magnitude de um vetor. O módulo oferece visualizações interativas onde os estudantes podem manipular vetores em espaços 2D e 3D, observar os efeitos das operações e compreender as suas interpretações geométricas.

A figura mostra um holograma com vetores no espaço 3D.



- **Cenário de aula 1**: Interpretação geométrica de vetores no espaço tridimensional, operações com vetores
- **Cenário de aula 2**: Produto escalar, produto vetorial no espaço tridimensional

Módulo 1: Trajetória

Cenários de aula com aplicações de VR

Cenário de aula 1

Título da aula

Gráficos das funções trigonométricas de uma variável

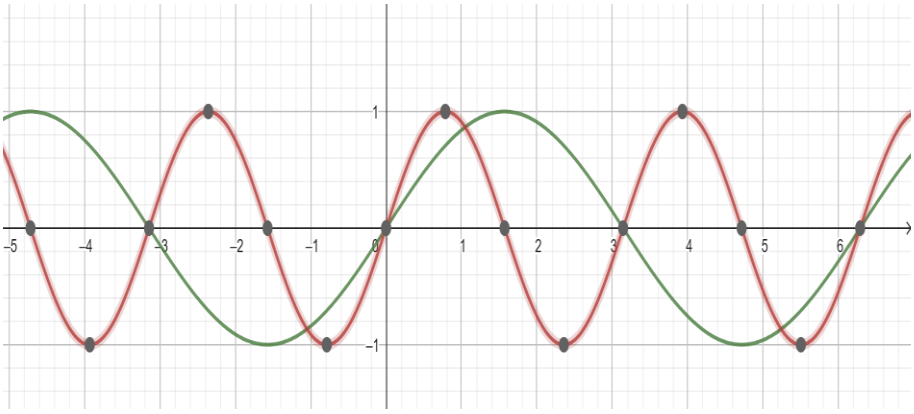
Resultados de aprendizagem

- Desenhar o gráfico da função $f(x) = a\sin(x - b) + c$.
- Interpretar os parâmetros a, b, c para a função $f(x) = a\sin(x - b) + c$.

Plano da aula

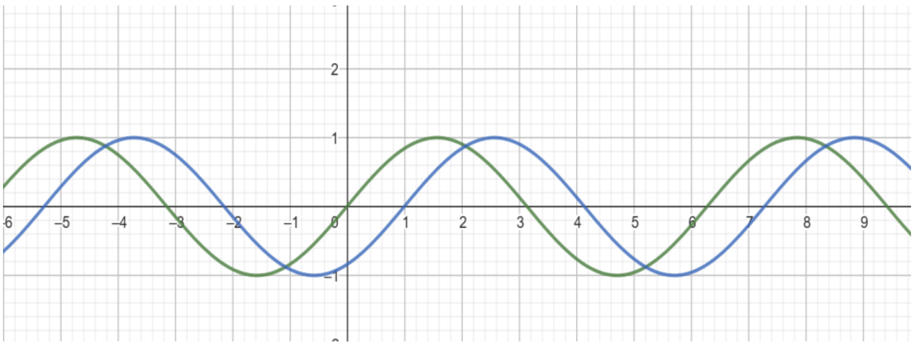
Passo 1.

Desenhar os gráficos das funções $sin(x)$ e $sin(2x)$. Discutir como o coeficiente *a* afeta o gráfico da função $f(x) = sin(ax)$.



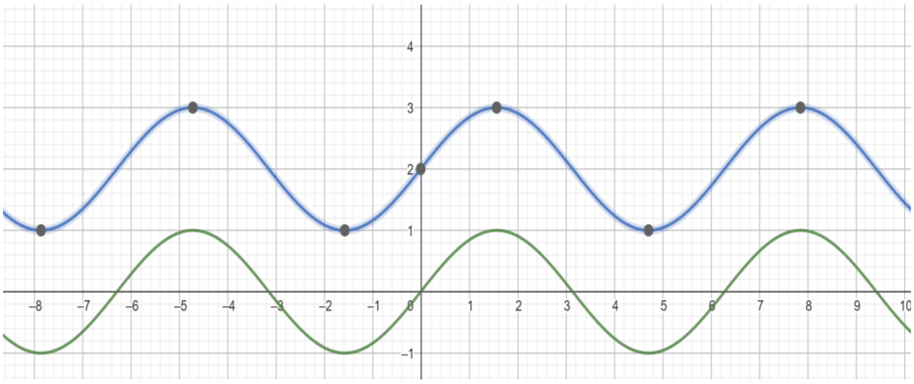
Passo 2.

Desenhar os gráficos das funções $\sin(x)$ e $\sin(x-1)$. Discutir como o coeficiente a afeta o gráfico da função $f(x) = \sin(x - a)$.



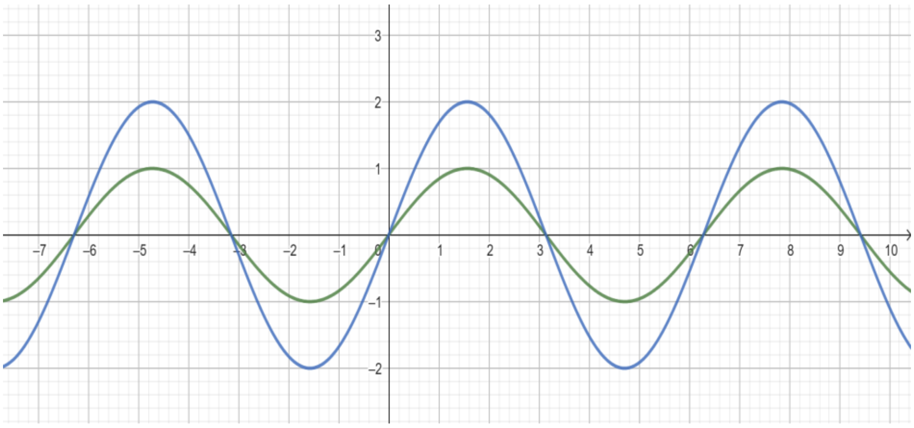
Passo 3.

Desenhar os gráficos das funções $sin(x)$ e $sin(x) + 2$. Discutir como o coeficiente a afeta o gráfico da função $f(x) = sin(x) + a$.



Passo 4.

Desenhar os gráficos das funções $sin(x)$ e $sin(x) + 2$. Discutir como o coeficiente *a* afeta o gráfico da função $f(x) = a \cdot sin(x)$.



Passo 5.

Repetir os passos $1, 2, 3$ e 4 para a função $\cos(x)$.

Passo 6.

Desenhe o gráfico da função $f(x) = 2\sin(x - 1) + 2$.

Que perguntas devo fazer para que os alunos possam partilhar as suas ideias?

Como é que o conjunto de valores da função $f(x) = a\,sin(x - b) + c$ muda dependendo dos parâmetros a, b, c?

Cenário de aula 2

Título da aula

Uma função vetorial.

Resultados de aprendizagem

- Utiliza uma função vetorial.
- Analisa uma função vetorial.

Plano da aula

Passo 1.

Introdução à definição de uma função vetorial com três coordenadas.

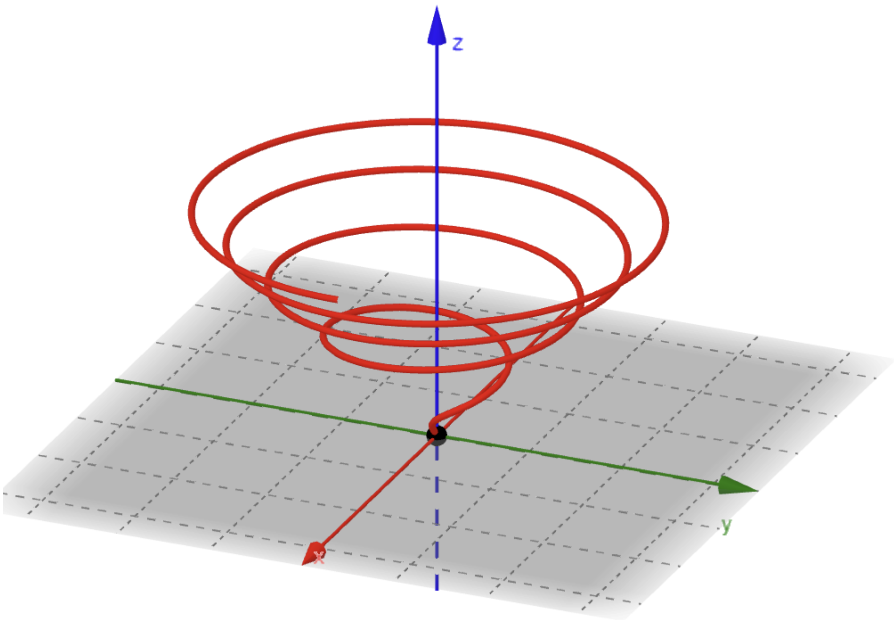
Uma função vetorial com três coordenadas é chamada de função da forma

$f(t) = [x(t), y(t), z(t)]$, onde $x(t), y(t), z(t)$ são funções escalares da variável t.

Exemplos de funções.

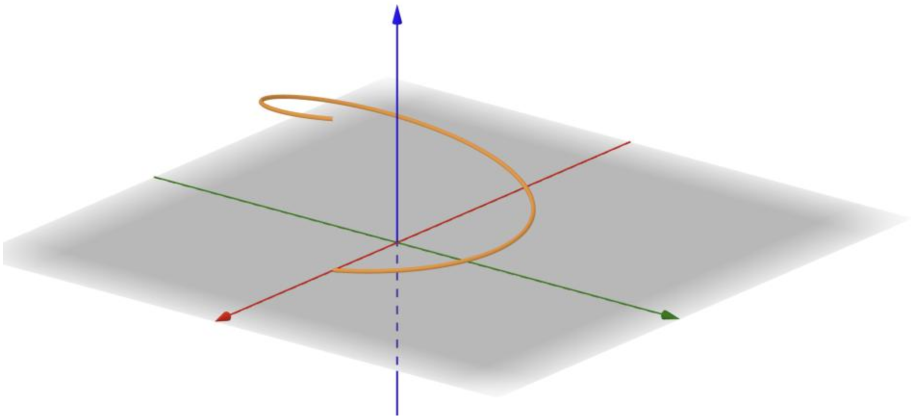
Passo 2.

A função é dada parametricamente por $[t, \sqrt{t}\sin(t), \sqrt{t}\cos(t)]$, onde t é qualquer número real.



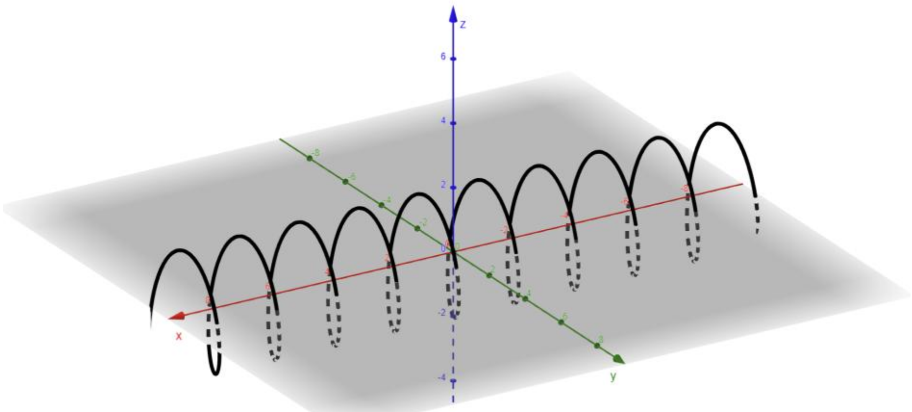
Passo 3.

A função é dada parametricamente por $[2\ cos(t), 3\ sin(t), t]$, onde t é qualquer número real.



Passo 4.

A função é dada parametricamente por $[t, sin(\pi t), cos(\pi t)]$, onde t é qualquer número real.



Passo 5.

Desenhar o gráfico da função $[t, 0, t^2]$.

Passo 6.

Analisar a função $[t, a_1 \sin(t) + b_1 \cos(t), a_2 \sin(t) + b_2 \cos(t)]$.

What questions should I ask so that students can share their thoughts?

Como introduzir o conceito de uma função cujos valores são vetores n-dimensionais?

Sugestões e dicas para professores

1. Pergunta para os estudantes: Como introduzir o conceito da derivada de uma função vetorial?

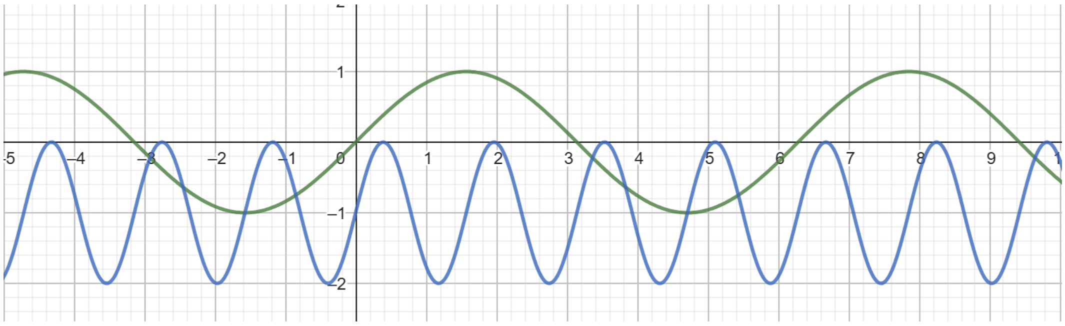
2. Pergunta para os estudantes: Como introduzir o conceito de uma função vetorial de duas variáveis?
3. Introduza o conceito de rotação de uma função vetorial e mostre as suas aplicações.
4. Pode utilizar o programa WOLFRAM para desenhar funções vetoriais.

Exercícios para os estudantes

Exercício 1.

Desenhe o gráfico da função $f(x) = sin(4x) - 1$.

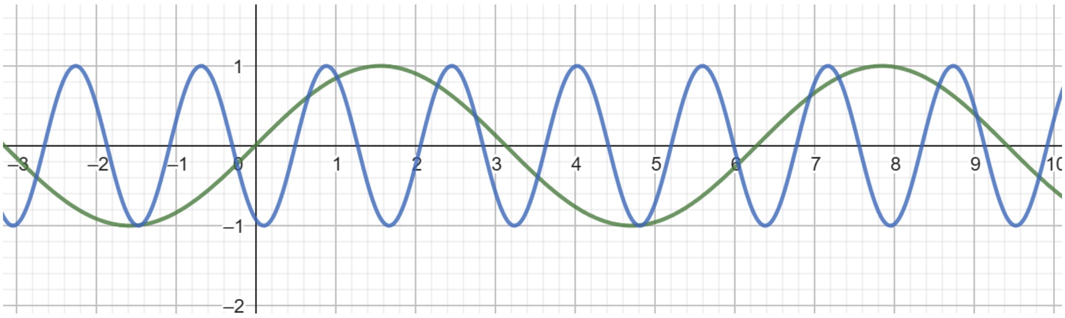
Solução



Exercício 2.

Desenhe o gráfico da função $f(x) = sin(4x - 2)$.

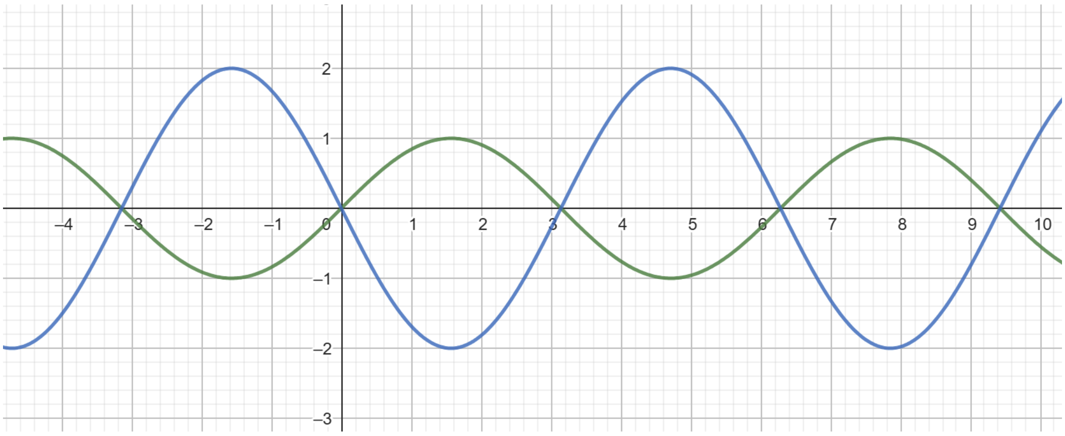
Solução



Exercício 3.

Desenhe o gráfico da função $f(x) = -2\sin(x)$.

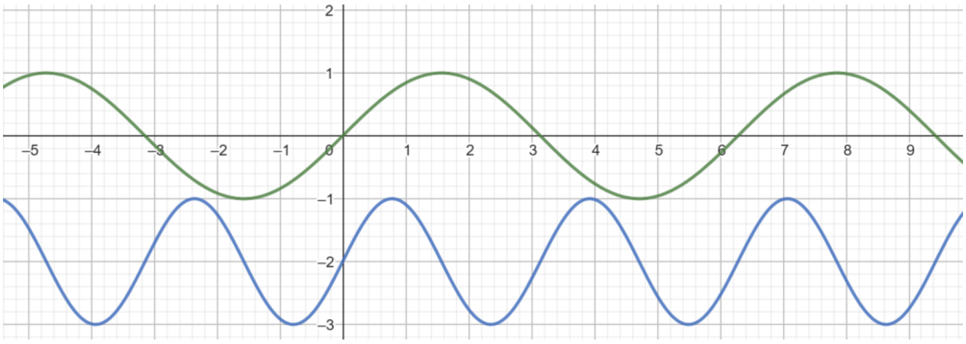
Solução



Exercício 4.

Desenhe o gráfico da função $f(x) = -\sin(2x) + 1$.

Solução



Exercício 5.

Determine o domínio da função vetorial $f(t) = [\sqrt{t}, t, \frac{1}{t-2}]$.

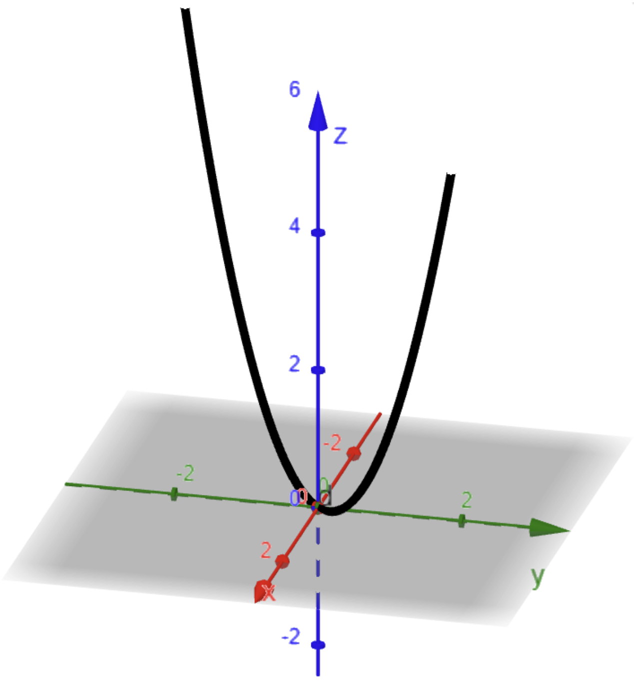
Solução

$t \in < 0,2) \cup (2, \infty)$.

Exercício 6.

Desenhe o gráfico da função vetorial $f(t) = [t, t, t^2]$ para $t \in < -3, 3 >$.

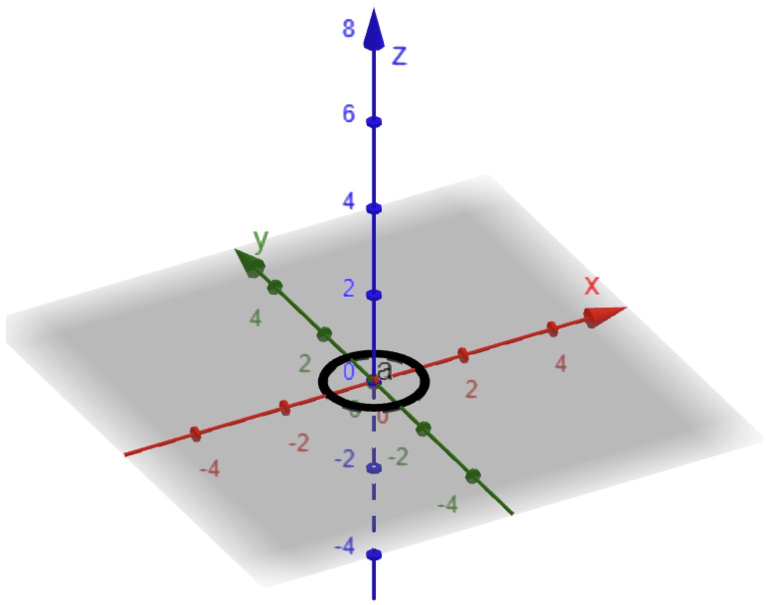
Solução



Exercício 7.

Desenhe o gráfico da função vetorial $f(t) = [\sin(t), \cos(t), 0]$ para $t \in < 0, 2\pi >$.

Solução



Exercício 8.

Calcule o valor da função vetor $f(t) = [t, 2sin(t) + cos(t), sin(t) - cos(t)]$ para $t = 0$.

Solução

$f(t) = [0,1,-1]$.

Módulo 2: Ângulos num cuboide

Cenários de aula com aplicações de VR

Cenário de aula 1

Título da aula

Ângulos num cuboide

Resultados de aprendizagem

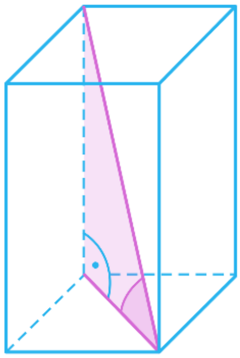
- Reconhece ângulos num cuboide

Plano da aula

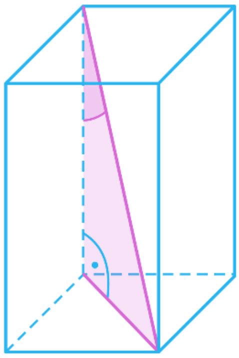
Passo 1.

Introdução de definições.

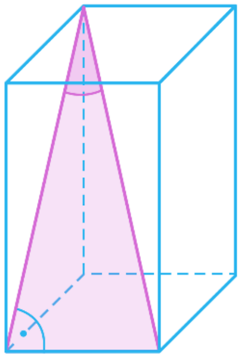
O ângulo entre a diagonal de um cuboide e a diagonal da sua base.



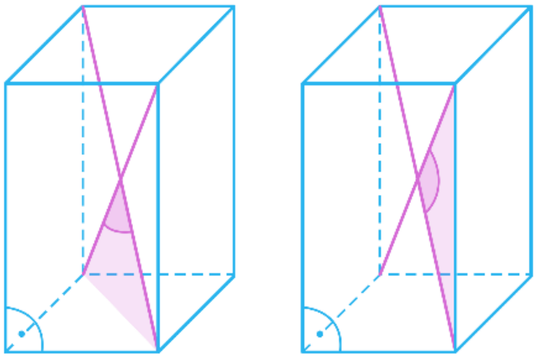
O ângulo entre a diagonal de um cuboide e a sua aresta lateral.



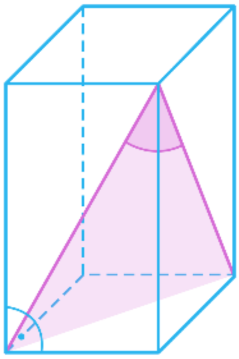
O ângulo entre a diagonal do cuboide e a diagonal da face lateral.



O ângulo entre as diagonais de um cuboide.

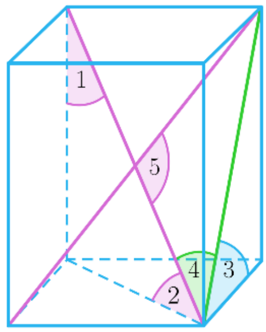


O ângulo entre as diagonais de paredes laterais adjacentes.



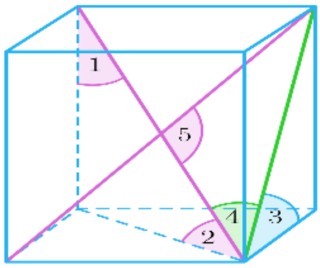
Passo 2.

Nomeie cada ângulo: $1, 2, 3, 4$ e 5.



Passo 3.

Determine as medidas de todos os ângulos para o cubo.



perguntas devo fazer para que os alunos possam partilhar os seus pensamentos?

Qual é o intervalo de valores dos ângulos $1, 2, 3$ e 4 num cuboide? Qual é o menor e o maior valor dos ângulos?

Cenário de aula 2

Título da aula

Cálculo do comprimento da aresta, da área da superfície e do volume de um cuboide.

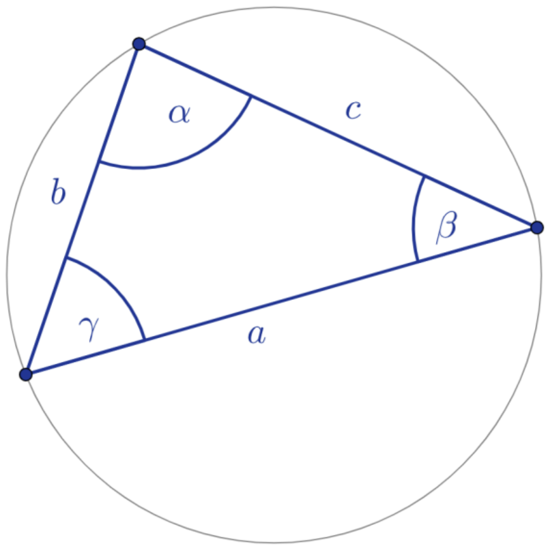
Resultados de aprendizagem

- Utiliza ângulos num cuboide para calcular: comprimento da aresta, área da superfície, volume.

Plano da aula

Passo 1.

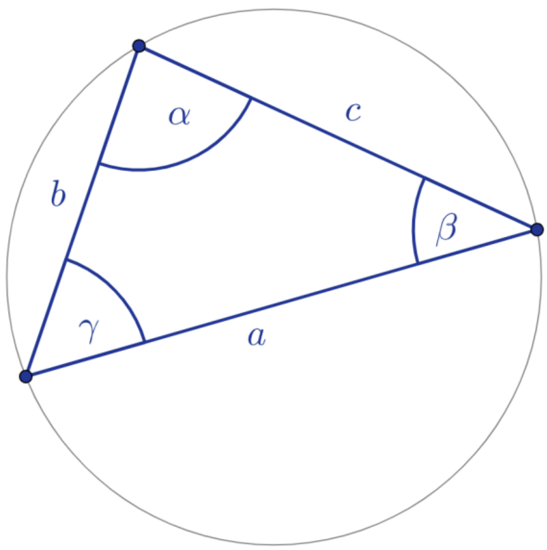
Lembrete da lei dos senos.



$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

Passo 2.

Lembrete da lei dos cossenos.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2ab\cos(\alpha)$$

Complete as restantes dependências:

$$b^2 = a^2 + \dots .^2 - 2 \dots \cos(\dots)$$

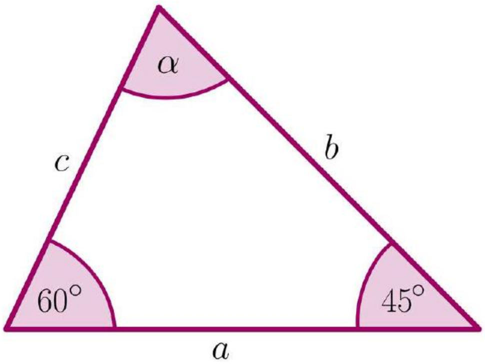
$$c^2 = a^2 + \dots.^2 - 2 \dots \cos(\dots)$$

Passo 3.

Calculations using the sine and cosine theorems. Cálculos utilizando as leis dos senos e dos cossenos.

Exercício 1

Calcule o comprimento do segmento b se $c = 5$.

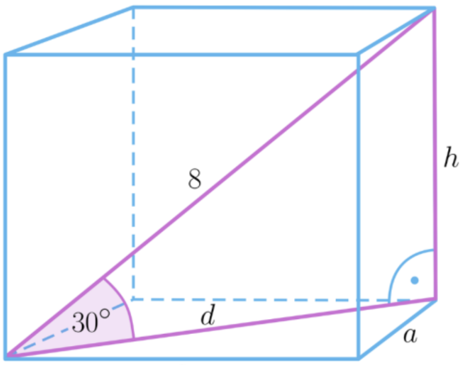


Passo 4.

Cálculos do comprimento da aresta, área da superfície e volume num cuboide.

Exercício 2

Calcule a área total da superfície e o volume do cuboide se a base for quadrada.



Que perguntas devo fazer para que os alunos possam partilhar os seus pensamentos?

Em que situações se usa a lei dos senos e em que situações se usa a lei dos cossenos?

Sugestões e dicas para professores

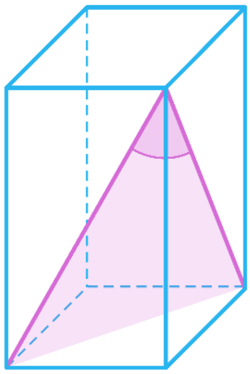
1. Pergunta para os alunos: É possível provar o teorema de Pitágoras utilizando o teorema do cosseno?
2. Pergunta para os alunos como trabalho próprio: Como são utilizados os ângulos em prismas na arquitetura?

3. É possível construir um prisma em que todos os ângulos entre as arestas laterais e as bases sejam iguais? Justifique.
4. Pode utilizar o programa WOLFRAM para cálculos trigonométricos.

Exercícios para os estudantes

Exercício 1.

Dê o nome do ângulo.



Solução

O ângulo entre as diagonais das faces laterais de um cuboide.

Exercício 2.

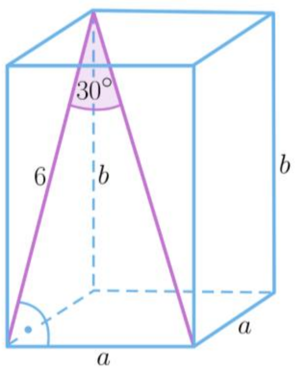
Calcule o volume do cuboide para $\alpha = 45°$.

Solução

$V = 48\sqrt{2}$.

Exercício 3.

O volume do cuboide mostrado na figura é $48\sqrt{3}$. Calcule as dimensões do cuboide.

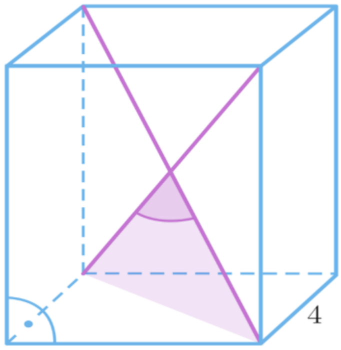


Solução

$a = 2\sqrt{6}$, $b = 2\sqrt{3}$.

Exercício 4.

O comprimento do lado do cubo é 4. Determine a medida do cosseno do ângulo identificado na figura.



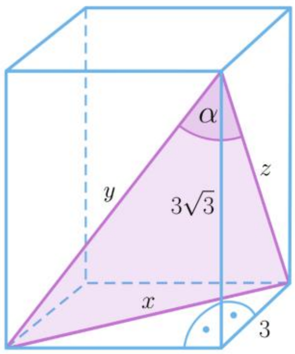
Solução

$\cos(\alpha) = \frac{-2}{3}$.

Exercício 5.

A base do cuboide mostrado na figura tem dimensões 3 por 3 e a aresta lateral é $3\sqrt{3}$. Determine a medida do ângulo entre as diagonais das faces laterais adjacentes do cuboide.

Solução

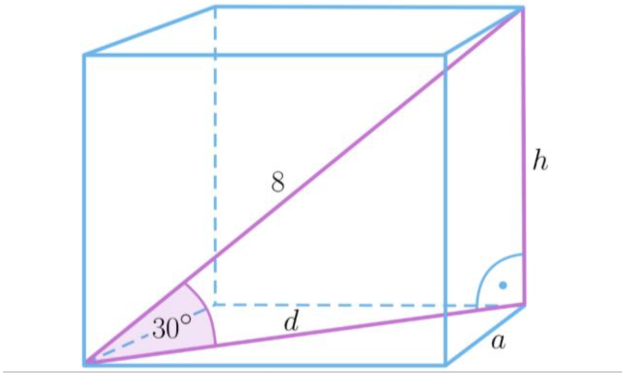


Note que $y = x$ e $x = 3\sqrt{2}$. Usando a lei dos cossenos para um triângulo com lados x, y, z obtemos $\cos(\alpha) = \frac{45}{72}$.

Exercício 6.

A diagonal de um cuboide com uma base quadrada tem comprimento 8 e está inclinada ao plano da base a um ângulo de 30°. Calcule as dimensões das arestas do cuboide.

Solução

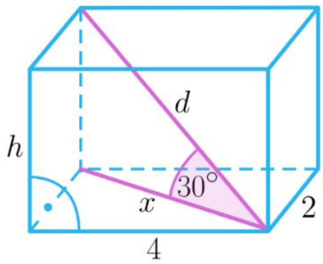


$\frac{h}{8} = \sin(30°) = \frac{1}{2}$, portanto $h = 4$ and $d = 4\sqrt{3}$. Logo, $a = 2\sqrt{6}$.

Exercício 7.

As arestas do cuboide têm comprimentos $4, 2, h$. Determine o comprimento da diagonal do cuboide se o ângulo entre a diagonal do cuboide e a diagonal da base do cuboide for de $30°$.

Solução

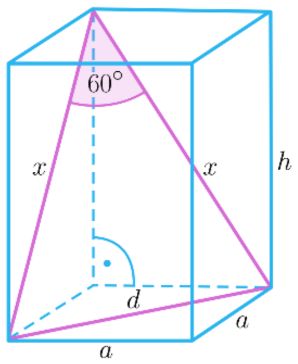


Usando o teorema de Pitágoras, determine $x = 2\sqrt{5}$. Como $\frac{x}{d} = \cos(30°)$, então $d = \frac{4}{3}\sqrt{15}$.

Exercício 8.

Um cuboide com uma base quadrada é dado. Prove que um cuboide é um cubo se o ângulo entre as diagonais das faces adjacentes for de $60°$.

Solução



O triângulo x, x, d é equilátero, então $x = a\sqrt{2}$. Usando o teorema de Pitágoras para um triângulo com lados x, a, h, obtemos que $h = a$.

Módulo 3: Ângulos numa pirâmide

Cenários de aula com aplicações de VR

Cenário de aula 1

Título da aula

Pirâmides e área total da superfície

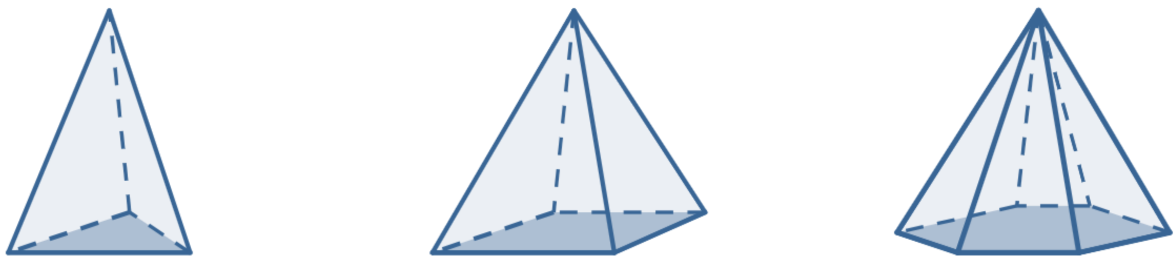
Resultados de aprendizagem

- o volume e a área total da superfície da pirâmide.

Plano da aula

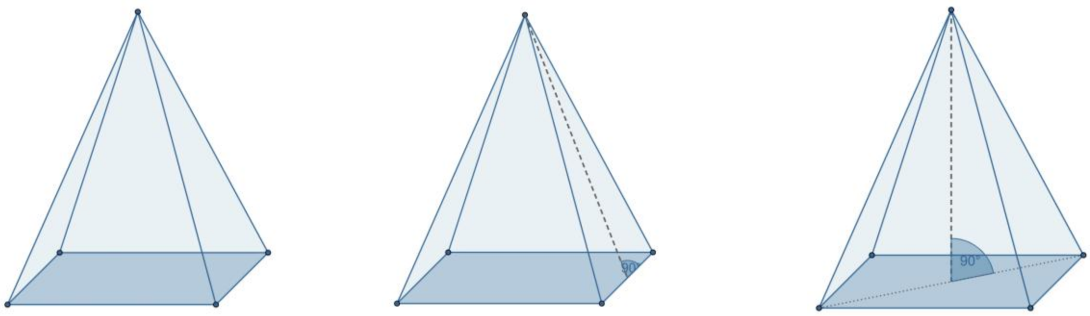
Passo 1.

Introdução à definição de pirâmides básicas divididas de acordo com a base.



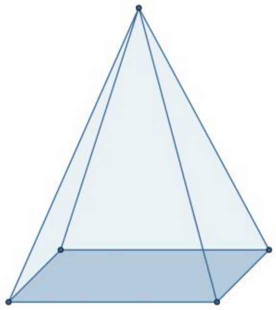
Passo 2.

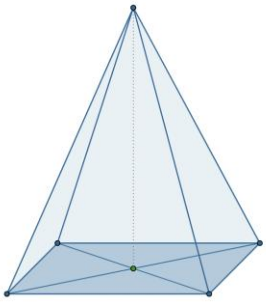
Desenho da altura da parede lateral e da altura da pirâmide.



Passo 3.

Desenho das diagonais da base de uma pirâmide.





Passo 4.

Discussão das fórmulas para a área total de uma pirâmide.

Que perguntas devo fazer para que os alunos possam partilhar as suas opiniões?

Qual é a razão entre o volume de um prisma e o volume de uma pirâmide com as mesmas bases e alturas iguais?

Cenário de aula 2

Título da aula

Ângulos numa pirâmide

Resultados de aprendizagem

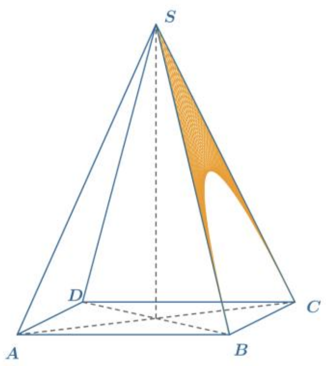
- Reconhece ângulos numa pirâmide.

Plano da aula

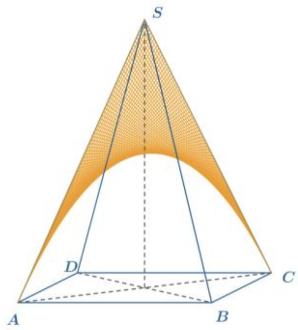
Passo 1.

Introdução da definição dos ângulos entre as arestas numa pirâmide.

O ângulo entre as arestas laterais.



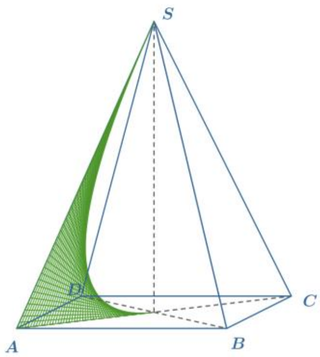
O ângulo entre as arestas laterais opostas.



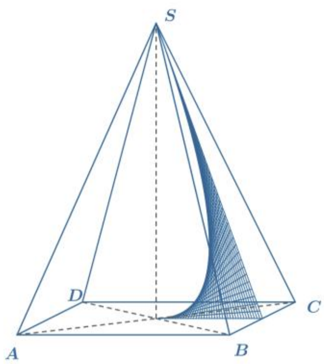
Passo 2.

Introdução da definição dos restantes ângulos na pirâmide.

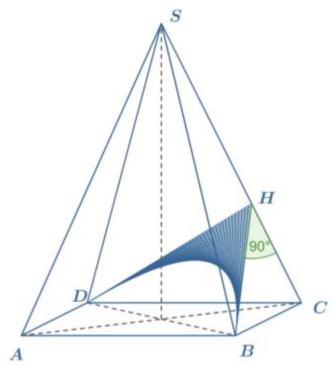
O ângulo entre a aresta lateral e a diagonal da base.



O ângulo de inclinação da face lateral em relação à base.



O ângulo entre as faces laterais adjacentes.



Passo 3.

Determinar os valores de todos os ângulos num tetraedro.

Que perguntas devo fazer para que os alunos possam partilhar as suas opiniões?

Como determinar o raio de uma esfera circunscrita por um tetraedro?

Sugestões e dicas para professores

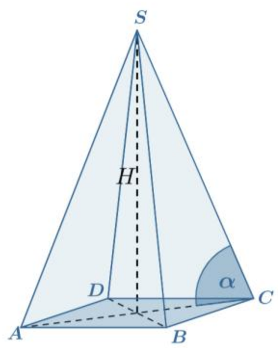
1. Sugestão para os alunos: Uma pirâmide é chamada de reta se as suas arestas laterais forem iguais.
2. Sugestão para os alunos: Uma pirâmide é chamada de tetraedro se todas as suas faces laterais forem triângulos equiláteros.
3. Pergunta para os alunos: Desenhem as redes dos prismas.
4. Podem usar o programa WOLFRAM para calcular o volume das pirâmides.

Exercícios para os estudantes

Exercício 1.

Uma pirâmide quadrangular regular é dada. O comprimento da aresta da base é 6 e a altura é $3\sqrt{2}$. Calcule o ângulo entre a aresta lateral e o plano da base.

Solução

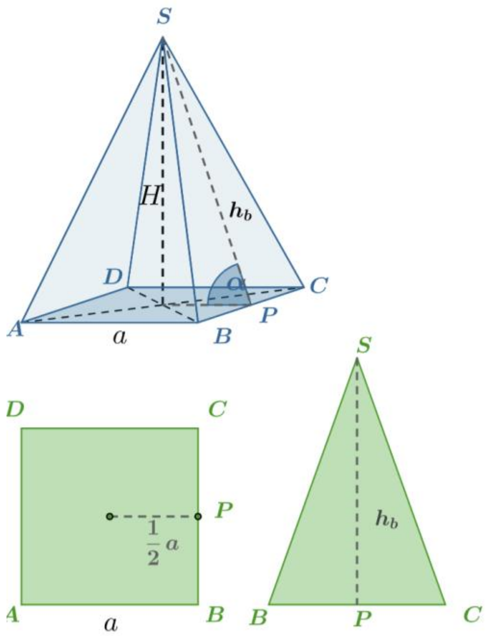


$|\overline{AC}| = 6\sqrt{2}$. $\text{tg}(\alpha) = \frac{H}{\frac{|AC|}{2}} = 1$. Portanto $\alpha = 45°$.

Exercício 2.

Uma pirâmide quadrangular regular é dada. O comprimento da aresta da base é 6 e a altura é $3\sqrt{2}$. Calcule a tangente do ângulo entre a parede lateral e o plano da base.

Solução

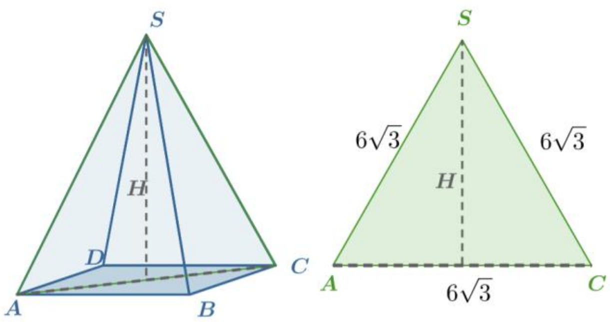


$\text{tg}(\alpha) = \frac{H}{\frac{1}{2}a} = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$.

Exercício 3.

Uma pirâmide quadrangular regular é dada. O comprimento da aresta da base é $3\sqrt{6}$ e o comprimento das arestas laterais é $6\sqrt{3}$. Calcule a altura da pirâmide.

Solução

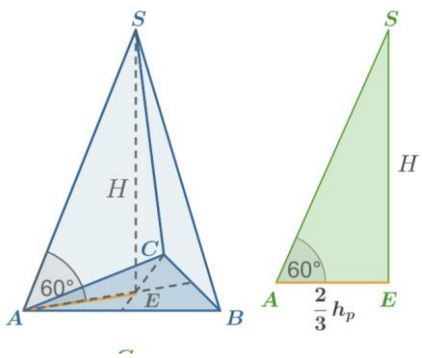


$H = 9$.

Exercício 4.

Uma pirâmide triangular regular é dada. O comprimento da aresta da base é $a = 3\sqrt{3}$ e o ângulo entre a aresta lateral e o plano da base é de $60°$. Calcule a altura da pirâmide.

Solução



$h_p = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{2}$. Portanto $H = \frac{2}{3}h_p \mathrm{tg}(60°) = 3\sqrt{3}$.

Exercício 5.

Calcule a altura de um tetraedro regular com comprimento de aresta 3.

Solução

$\sqrt{6}$.

Exercício 6.

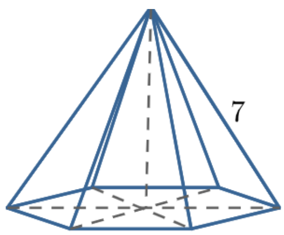
As três faces da pirâmide são triângulos isósceles retângulos com um comprimento de lado igual a 1. Calcule a área da quarta face.

Solução

$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercício 7.

A área da base da pirâmide hexagonal reta apresentada na figura é $\frac{75\sqrt{3}}{2}$. Calcule o cosseno do ângulo de inclinação da aresta lateral ao plano da base.

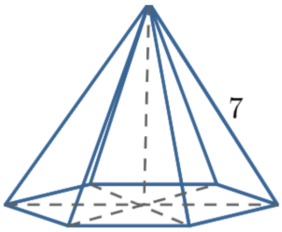


Solução

$P = \frac{75\sqrt{3}}{2} = 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Portanto $a = 5$ e $\sin(\alpha) = \frac{5}{7}$.

Exercício 8.

A área da base da pirâmide hexagonal reta apresentada na figura é $\frac{75\sqrt{3}}{2}$. Calcule a altura desta pirâmide.



Solução

$P = \frac{75\sqrt{3}}{2} = 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, logo $a = 5$. Pela fórmula de Pitágoras $H^2 = 7^2 - 5^2$, portanto $H = 2\sqrt{6}$.

Module 4: Geometria não euclidiana

Cenários de aula com aplicações de VR

Cenário de aula 1

Título da aula

Geometria euclidiana

Resultados de aprendizagem

- Conhece os axiomas da geometria euclidiana.

Plano da aula

Passo 1.

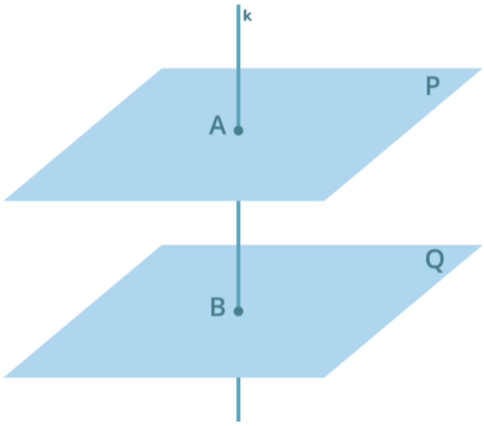
Introdução aos conceitos fundamentais da geometria: ponto, reta, plano.

Passo 2.

Aprendizagem dos axiomas da geometria euclidiana.

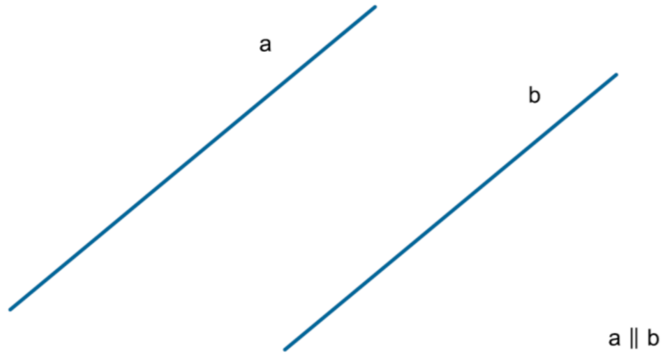
Passo 3.

Discussão sobre a posição dos planos no espaço tridimensional, por exemplo, planos paralelos.



Passo 4.

Discussão sobre a posição de duas linhas num plano, por exemplo, linhas paralelas.



Passo 5.

Discussão sobre a posição de uma linha e um ponto num plano e no espaço.

Passo 6.

Discussing the position of a plane and a point in space.

Que perguntas devo fazer para que os alunos possam partilhar as suas opiniões?

Qual é a posição de duas linhas no espaço tridimensional?

Cenário de aula 2

Título da aula

Fundamentos da geometria não-euclidiana

Resultados de aprendizagem

- Usa geometria não-euclidiana

Plano da aula

Passo 1.

Introdução à geometria não euclidiana: Elementos históricos

Passo 2.

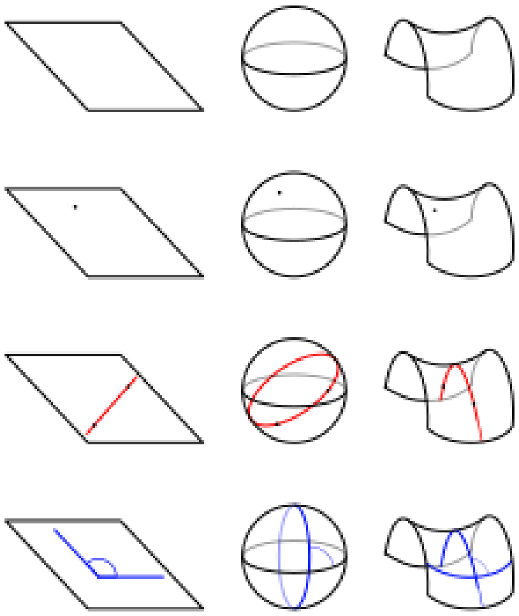
Discussão das assunções da geometria elíptica

Passo 3.

Discussão das assunções da geometria hiperbólica

Passo 4.

Plano, ponto, linha, e ângulo em termos de geometria Euclidiana, esférica e hiperbólica



https://pl.wikipedia.org/wiki/Geometria_nieeuklidesowa

Que perguntas devo fazer para que os alunos possam partilhar as suas opiniões?

Em geometria hiperbólica, a soma dos ângulos num triângulo pode ser menor que 180°?

Sugestões e dicas para professores

1. Pergunta para os alunos: Como é que a geometria não-euclidiana difere da geometria euclidiana?
2. Pergunta para os alunos: Como é que um círculo aparece na geometria não-euclidiana?
3. Matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento da geometria não-euclidiana.
4. Considerações sobre o uso da geometria não-euclidiana.

Exercícios para os estudantes

Exercício 1.

Quantas linhas paralelas a uma linha dada podem ser traçadas a partir de um dado ponto?

Solução

Somente uma linha paralela a uma linha dada pode ser traçada a partir de um dado ponto.

Exercício 2.

Quantos planos paralelos a um plano dado podem ser traçados a partir de um dado ponto?

Solução

Somente um plano paralelo a um plano dado pode ser traçado a partir de um dado ponto.

Exercício 3.

Quantos pontos definem claramente o plano?

Solução

Três pontos não colineares.

Exercício 4.

Como determinar claramente um plano usando duas linhas?

Solução

Por exemplo, utilizando duas linhas que se intersectam num ponto.

Exercício 5.

O que pode ser uma parte comum de uma linha e um plano?

Solução

A parte comum de uma linha e um plano pode ser: um conjunto vazio, um ponto, uma linha.

Module 5: Máximos e mínimos de funções

Cenários de aula com aplicações de VR

Cenário de aula 1

Título da aula

Mínimo e máximo local: definição, interpretação geométrica

Resultados de aprendizagem

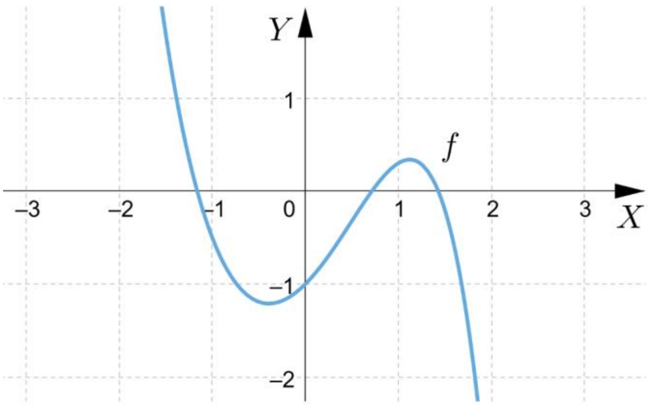
- Lê os extremos locais de funções de duas variáveis.
- Indica as diferenças entre o extremo e a função global de duas variáveis.

Plano da aula

Passo 1.

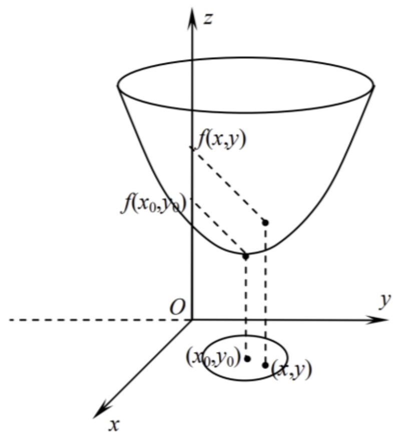
Lembrete da definição de mínimo e máximo de uma função de uma variável.

Indicação do mínimo e máximo locais de uma função de uma variável.



Passo 2.

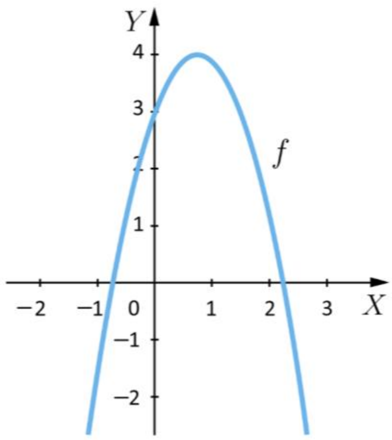
Formulação da definição de mínimo local de uma função de duas variáveis com base no gráfico.



Passo 3.

Qual é a diferença entre mínimo local e mínimo global? Dê um exemplo.

Justificação com base no gráfico para as funções f e $x \in [-1,3]$.



Passo 4.

Formular a definição de mínimo global de uma função de duas variáveis.

Que perguntas devo fazer para que os alunos possam partilhar as suas opiniões?

Uma função pode ter um mínimo e um zero da função num ponto fixo?

Cenário de aula 2

Título da aula

Condições necessárias e suficientes para um extremo de uma função de duas variáveis.

Resultados de aprendizagem

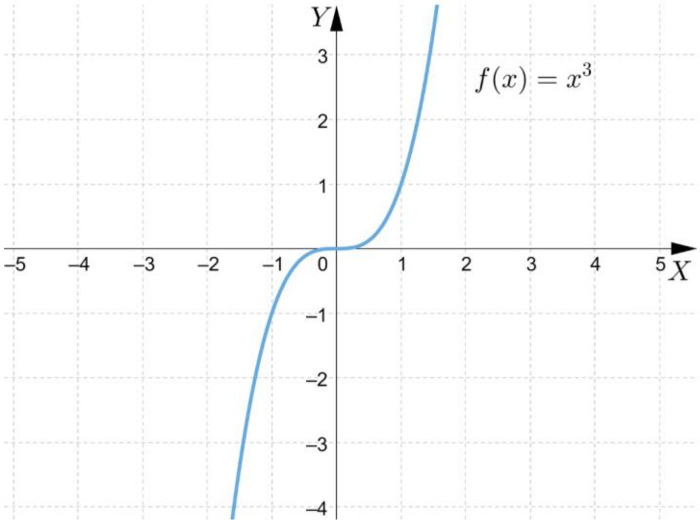
- Utiliza as condições necessárias e suficientes para o extremo da função de duas variáveis.

Plano da aula

Passo 1.

Lembrete da condição necessária para um extremo de uma função de uma variável.

A função $y = x^3$ para $x = 0$ atende à condição necessária para o extremo da função?



Passo 2.

Lembrete da condição suficiente para o extremo de uma função de uma variável.

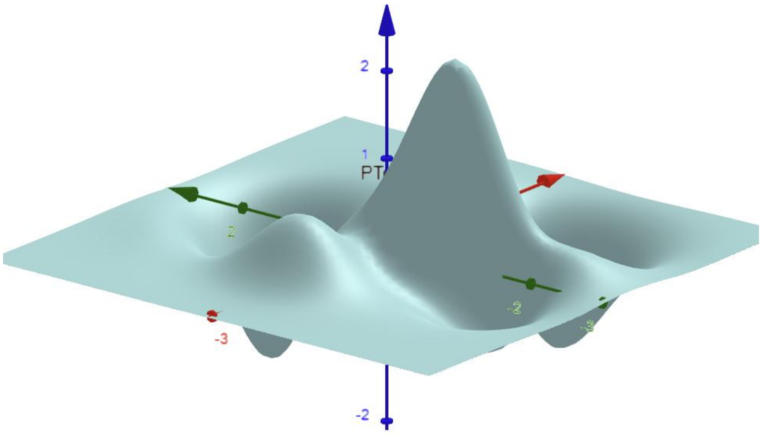
Passo 3.

Formulação da condição necessária para o extremo de uma função de duas variáveis.

Passo 4.

Formulação da condição suficiente para o extremo de uma função de duas variáveis.

Indicação dos pontos em que a função atende às condições necessárias e suficientes para o extremo de uma função de duas variáveis.



Passo 5.

Comparação das condições necessárias e suficientes para o extremo de funções de uma e duas variáveis.

Que perguntas devo fazer para que os alunos possam partilhar as suas opiniões?

Existe uma função na qual as derivadas parciais de primeira ordem não existem e a função tem um local extremo nesse ponto?

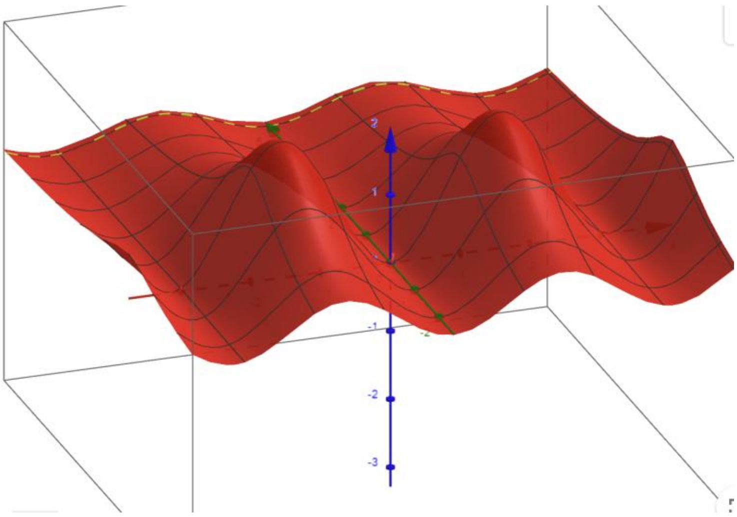
Sugestões e dicas para professores

1. Pergunta para os alunos: A função não tem extremo devido ao facto de não existirem derivadas parciais?
2. Mostrar aos alunos exemplos de funções de duas variáveis para as quais a condição necessária para alcançar o extremo da função é atendida, mas a condição suficiente não é atendida.
3. Pergunta para os alunos: Formule a condição necessária para o extremo de uma função de três variáveis.
4. Pode usar o programa WOLFRAM para encontrar o máximo e o mínimo de funções de duas variáveis.

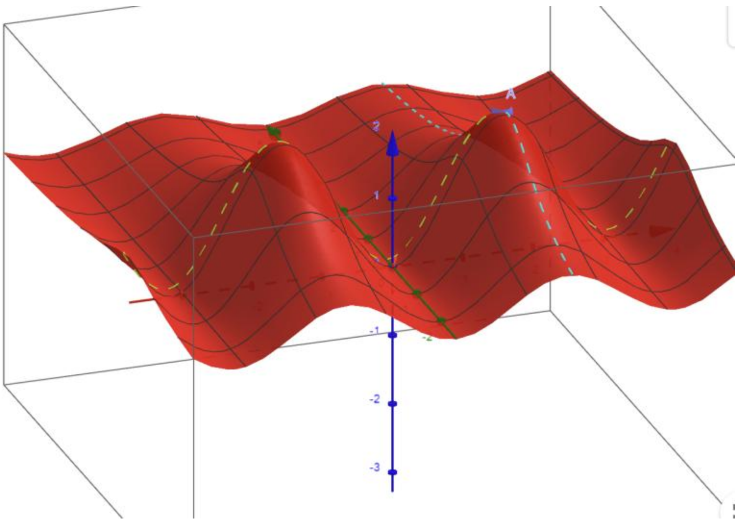
Exercícios para os estudantes

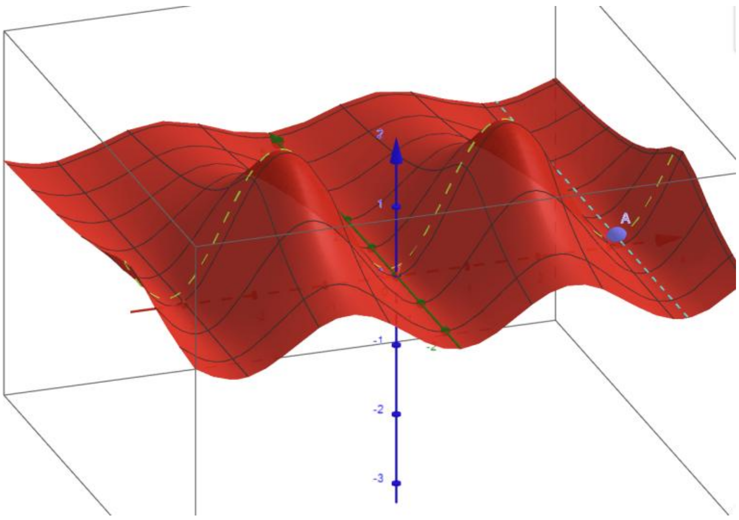
Exercício 1.

Indique um exemplo de mínimo local e máximo local da função apresentada no gráfico.



Solução





Exercício 2.

Um recipiente aberto no topo, em forma de um cuboide, é dado. O seu volume é 256. Determine as dimensões desse recipiente de forma que a área da superfície do cuboide seja a menor possível.

Solução

$a = 8, b = 8, h = 4.$

Exercício 3.

Dê um exemplo de uma função de duas variáveis que tenha infinitos extremos locais.

Solução

$f(x, y) = \sin(x) + \sin(y).$

Exercício 4.

Determine os extremos locais da função $f(x, y) = x^2y + y^3 + 6xy$.

Solução

$\min = -6\sqrt{3}. \max = 6\sqrt{3}.$

Exercício 5.

Determine os extremos locais da função $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy$.

Solução

$\min = -8.$

Exercício 6.

A função $f(x, y) = x^2y + y^3 + 6xy$ no ponto $P(0,0)$ terá o extremo local?

Solução

Não.

Exercício 7.

Determine os extremos locais da função $f(x, y) = e^{x^2+y^2}(x^2 + y^2)$.

Solução

$\min = 0.$

Exercício 8.

A função $f(x, y) = |x| + |y|$ no ponto $P(0,0)$ terá o mínimo local?

Solução

Sim.

Module 6: Sistemas de equações lineares

Cenários de aula com aplicações de VR

Cenário de aula 1

Título da aula

Interpretação geométrica de equações lineares em espaços

Resultados de aprendizagem

- • Visualizar diferentes possibilidades do conjunto de soluções de um sistema de equações lineares.
- • Reconhecer diferentes possibilidades do conjunto de soluções de um sistema de equações lineares.

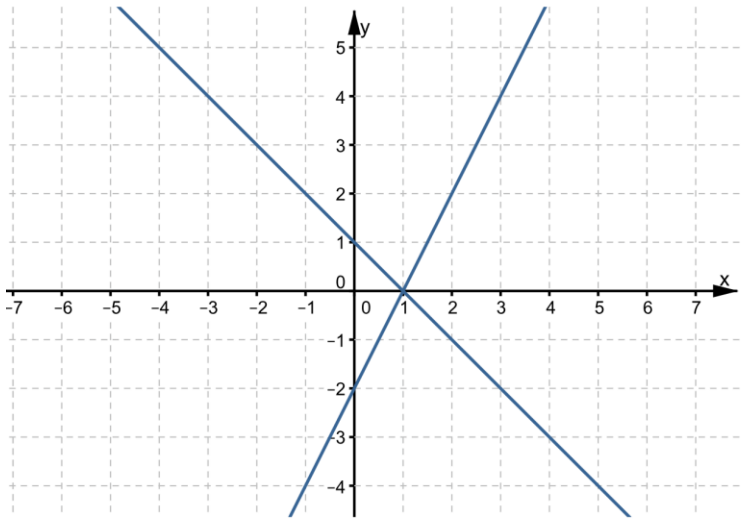
Plano da aula

Passo 1.

Lembrete da interpretação de um sistema de equações lineares para duas variáveis.

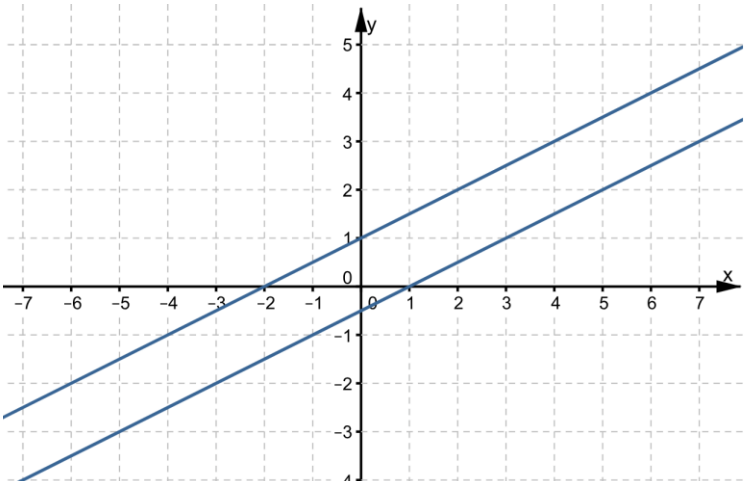
Passo 2.

Apresentação da solução de um sistema de equações lineares num gráfico.



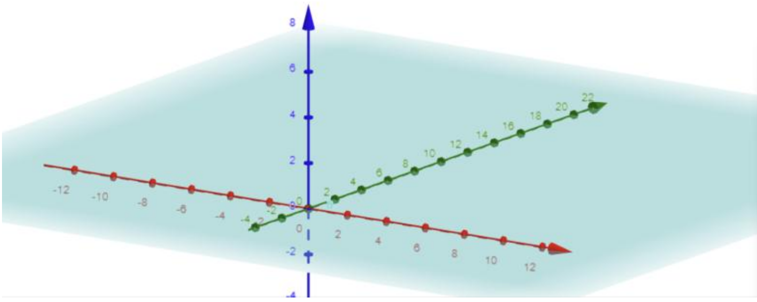
Passo 3.

Apresentação da solução de um sistema de equações lineares num gráfico.

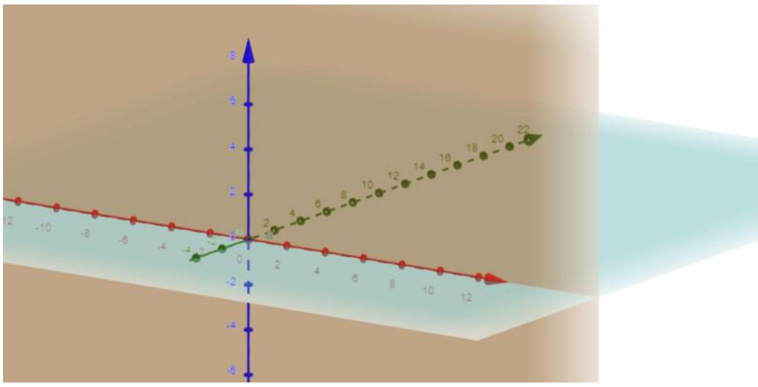


Passo 4.

Desenhe um plano $x = 0$.



Desenhe os planos $x = 0$ e $y = 0$.



Que perguntas devo fazer para que os alunos possam partilhar as suas opiniões?

Quais são as soluções possíveis para sistemas de equações lineares no espaço quadridimensional?"

Cenário de aula 2

Título da aula

Resolução de equações lineares

Resultados de aprendizagem

- Resolve sistemas de equações lineares no espaço tridimensional

Plano da aula

Passo 1.

Resolver o sistema de equações lineares.

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+y+z=2 \end{cases}$$

Passo 2.

Resolver o sistema de equações lineares.

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+y+z=4 \end{cases}$$

Passo 3.

Resolver o sistema de equações lineares.

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+y+2z=2 \end{cases}$$

Step 4.

Resolver o sistema de equações lineares.

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 0x+0y+0z=0 \end{cases}$$

Que perguntas devo fazer para que os alunos possam partilhar as suas opiniões?

Poderá o espaço inteiro ser a solução de um sistema de equações lineares

Sugestões e dicas para professores

1. Aprenda sobre diferentes métodos para resolver sistemas de equações lineares.
2. Antes de começar a resolver um sistema de equações lineares, vale a pena reorganizar as equações, movendo todos os termos com incógnitas para o lado esquerdo e os termos livres para o lado direito.
3. Verifique a solução do sistema de equações lineares, por exemplo, substituindo a solução encontrada.
4. Sistemas de equações lineares são usados em inteligência artificial.
5. Pode usar o programa WOLFRAM para resolver sistemas de equações lineares.

Exercícios para os estudantes

Exercício 1.

Dê valores dos parâmetros a, b de forma que a solução do sistema de equações lineares seja um conjunto vazio.

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 2 \\ 2x + y + az = b \end{cases}$$

Solução

$a = 3, b \neq 2.$

Exercício 2.

Dê valores dos parâmetros a, b de forma que a solução do sistema de equações lineares seja uma linha.

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 2 \\ 2x + y + az = b \end{cases}$$

Solução

$a \neq 3, b \in R.$

Exercício 3.

Dê valores dos parâmetros a, b de forma que a solução do sistema de equações lineares seja um ponto.

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 2 \\ 2x + y + az = b \end{cases}$$

Solução

$a = 3, b = 2.$

Exercício 4.

Dê valores dos parâmetros a, b de forma que a solução do sistema de equações lineares seja um plano.

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 2 \\ 0x + 0y + az = b \\ 0x + y + z = 2 \end{cases}$$

Solução

$a \neq 0, b \in R.$

Exercício 5.

Resolva o sistema de equações lineares.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 2x + 2y + 4z = 6 \end{cases}$$

Solução

$\emptyset$.

Exercício 6.

Verifique se o sistema é de Cramer.

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + y + 3z = 8 \\ x + 2y + z = 5 \\ 3x + 4y + 5z = 17 \end{cases}$$

Solução

Sim.

Exercício 7.

Resolva o sistema de equações lineares.

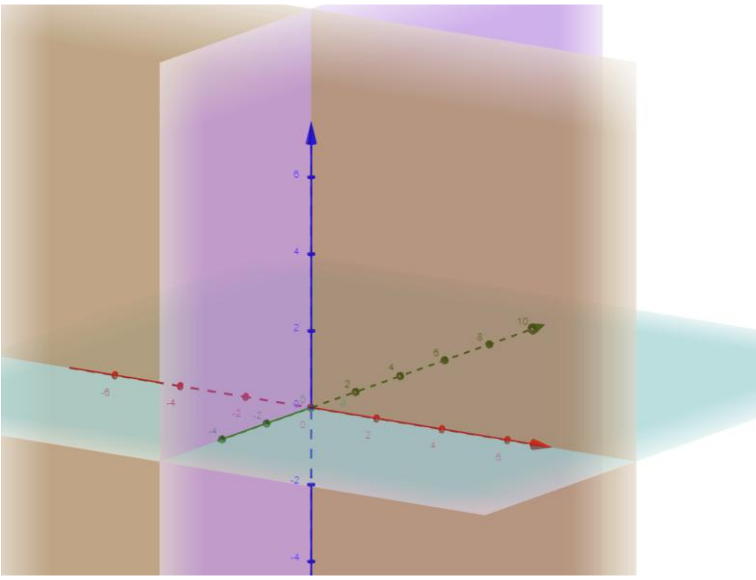
$$\{2x + y + 3z = 1$$

Solução

$y = -2x - 3z + 1$ or $[x, -2x - 3z + 1, z]$ onde $x, z \in R$.

Exercício 8.

Escreva o sistema de equações lineares com base no seguinte gráfico:



Solução

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Módulo 7: Prismas - secções de prismas, grelhas com prismas

Cenários de aula com aplicações de VR

Cenário de aula 1

Título da aula

Planificações de prismas

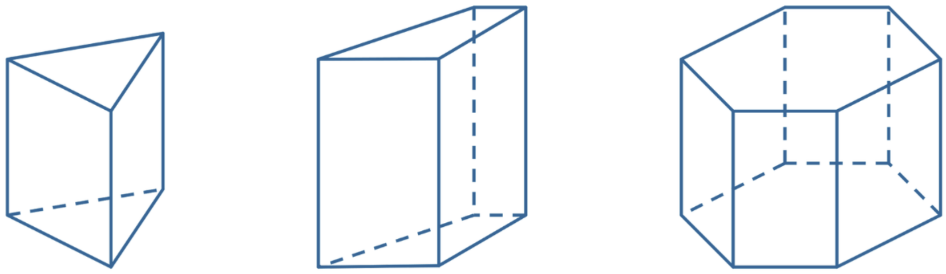
Resultados de Aprendizagem

- Reconhecer planificações de prismas

Plano da aula

Passo 1.

Desenhar planificações de prismas



Passo 2.

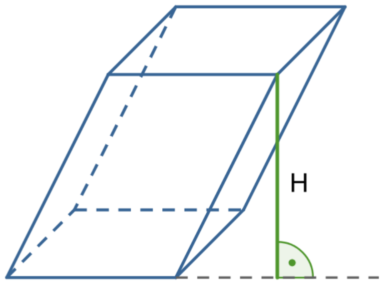
Descrever o modo como são construídas as planificações de prismas

Passo 3.

As figuras aqui ilustradas representam planificações de prismas? Justifique.

Passo 4.

Desenhe uma planificação do prisma ilustrado na figura.



Que perguntas devo fazer para que os estudantes possam compartilhar os seus pensamentos?

Cada prisma tem apenas uma planificação?

Cenário de aula 2

Título da aula

Área de superfície total e volume de prismas

Resultados de aprendizagem

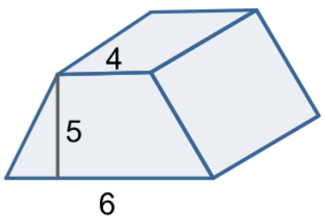
- Calcular a área da superfície total e o volume de um prisma

Passo 1.

Lembrar as fórmulas para as áreas de superfície total de figuras planas: triângulo, paralelogramo, trapézio, hexágono (não regular)

Passo 2.

O volume do prisma truncado ilustrado na figura é 500. Calcule a altura do prisma.



Passo 3.

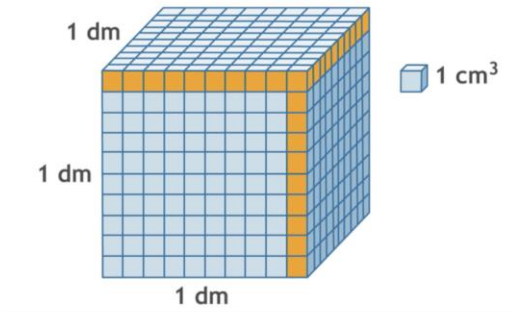
Determine a razão das alturas dos prismas para que tenham igual volume.

Como mudará o volume de um prisma regular hexagonal se

- duplicarmos o comprimento da aresta da base?
- duplicarmos a sua altura?

Passo 4.

Conversão de unidades de volume. Quantos cm^3existem num dm^3?



Passo 5.

Quantos dm^3 existem num dm^3?
Quanto cm^3 existem num cm^3?
Quanto cm^3 existem num km^3?

Que perguntas devo fazer para que os estudantes possam compartilhar os seus pensamentos?

É possível construir diferentes prismas quadrangulares regulares com as mesmas bases, ou com alturas iguais e/ou com volumes iguais?

Sugestões e dicas para professores

Questões para os estudantes:

1. Como mudará o volume de um prisma se a altura for triplicada?
2. Como mudará o volume de um prisma quadrangular regular se a altura for triplicada?

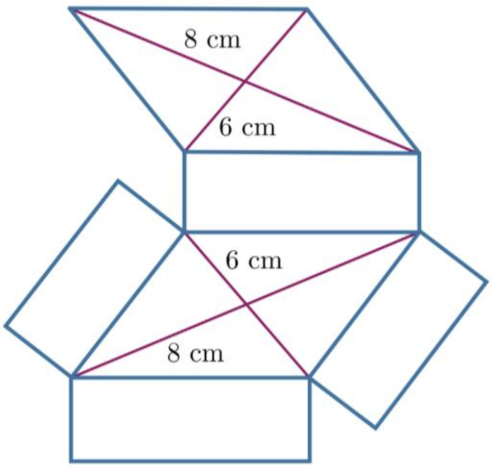
3. Como mudará o comprimento da diagonal de um prisma quadrangular regular se a altura for triplicada?
4. Como mudará a área de superfície total de um prisma quadrangular regular se a altura for triplicada?
5. Podes usar o programa WOLFRAM para calcular o volume e a área de superfície total dos prismas.

Exercícios para os estudantes

Exercício 1.

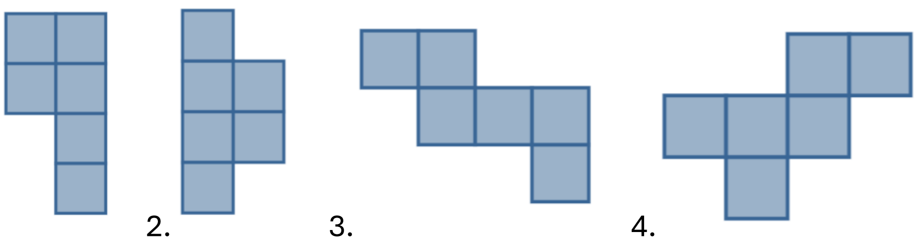
Desenhe uma planificação dum prisma cujas bases são losangos com diagonais de $6\ \mathrm{cm}$ e $8\ \mathrm{cm}$.

Solução



Exercício 2.

Qual destas figuras representa a planificação de um prisma?

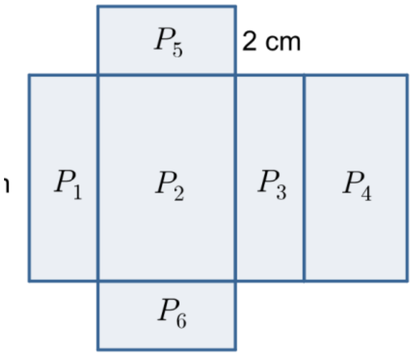


1. 2. 3. 4.

Solução

1. Não.
2. Não.
3. Sim.
4. Sim.

O volume do prisma ilustrado na figura é 24 e a área de superfície total é 52. Determine os comprimentos das restantes arestas.

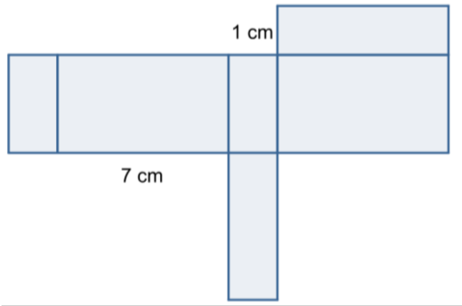


Solução

$a = 2, b = 3, c = 4.$

Exercício 4.

A área de superfície total do prisma mostrado na figura é 78. Determine o volume do prisma.

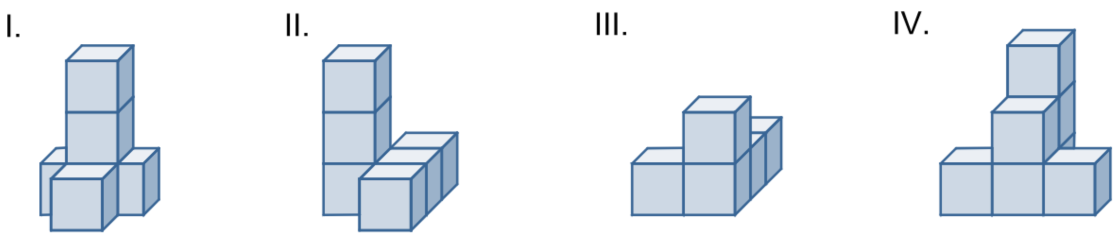


Solução

$V = 28.$

Exercício 5.

Qual destas figuras tem maior volume?

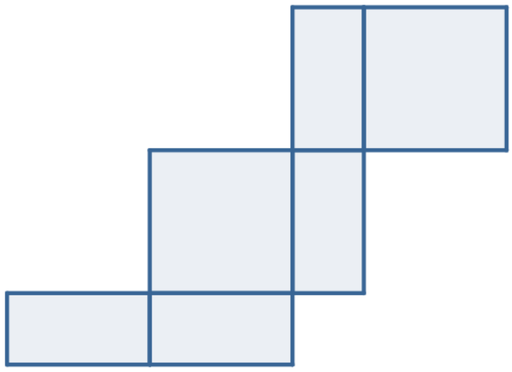


Solução

IV.

Exercício 6.

Esta figura representa uma planificação de um prisma?

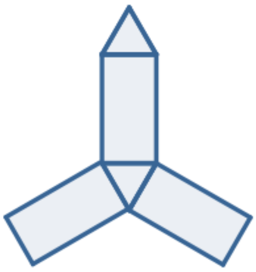


Solução

Sim.

Exercício 7.

Qual é o prisma representado na figura?

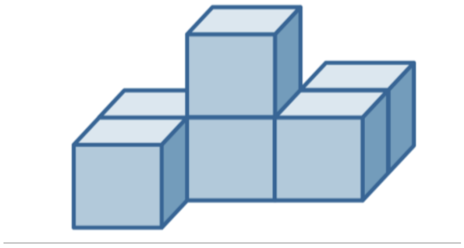


Solução

Prisma de base triangular regular.

Exercício 8.

Desenhe uma planificação da figura aqui ilustrada.



Solução

Depois de desenhar a planificação, corta-a e reconstrói o sólido.

Module 8: Pirâmides – secções de pirâmides, planificações com pirâmides

Cenários de aula com aplicações de VR

Cenário de aula 1

Título da aula

Planificações de pirâmides

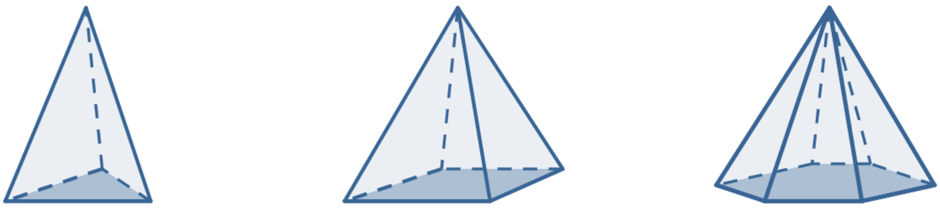
Resultados de aprendizagem

- Reconhecer planificações de pirâmides.

Plano da aula

Passo 1.

Desenhando planificações de pirâmides.

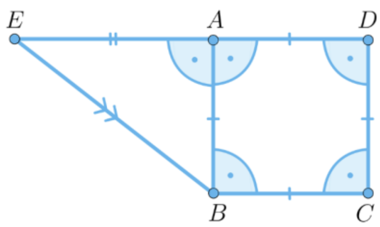


Passo 2.

Identifique as figuras que produzem planificações de pirâmides.

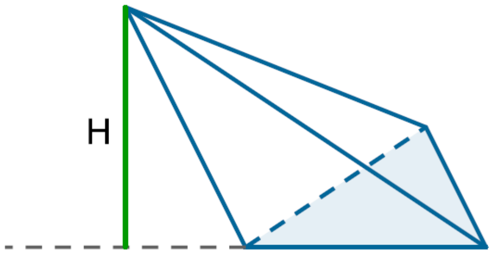
Passo 3.

Desenhe uma planificação de uma pirâmide, com base na figura aqui ilustrada.



Passo 4.

Desenhe uma planificação da pirâmide ilustrada na figura.



Que perguntas devo fazer para que os alunos possam compartilhar os seus pensamentos?

Cada pirâmide tem apenas uma planificação?

Cenário de aula 2

Título da aula

Volume de uma pirâmide

Resultados de aprendizagem

- Cálculo do volume de uma pirâmide.

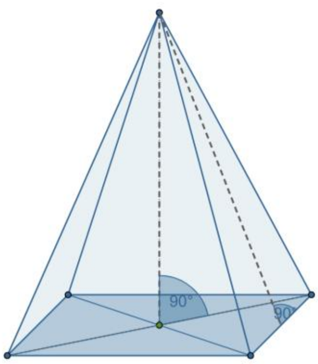
Plano da aula

Passo 1.

Lembrar as fórmulas para as áreas de figuras planas: triângulo, paralelogramo, trapézio, hexágono.

Passo 2.

Derivação da fórmula para o volume de uma pirâmide regular *V* com comprimento de aresta *a* e comprimento da altura da parede lateral *h*.

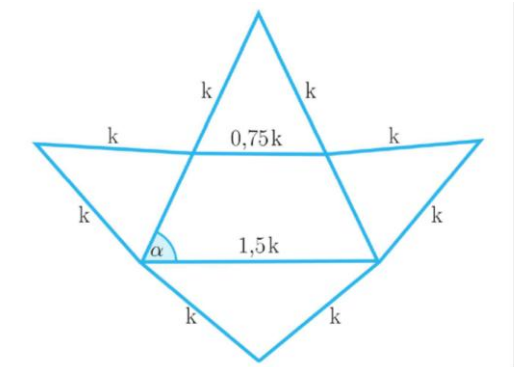


Passo 3.

Derivação da fórmula para o volume de uma pirâmide regular *V* com comprimento de aresta *a* e comprimento da altura da parede lateral *h*.

.Passo 4.

Derivação da fórmula para o volume de uma pirâmide dependendo de a e α.



Que perguntas devo fazer para que os estudantes possam compartilhar os seus pensamentos?

É possível construir diferentes pirâmides quadrangulares regulares com as mesmas bases, alturas iguais e volumes iguais?

Sugestões e dicas para professores

Perguntas para os estudantes:

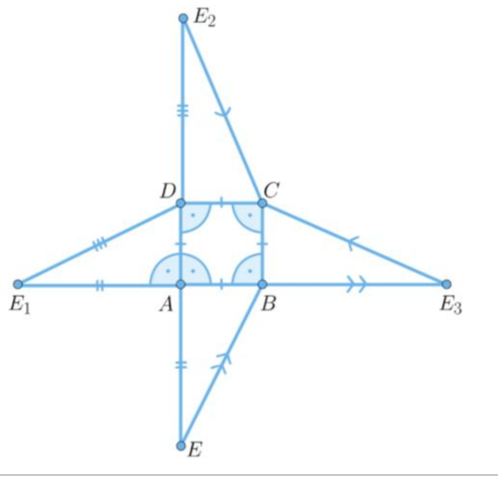
1. Como é que o volume de uma pirâmide muda, se a altura for triplicada?
2. Como é que o volume de uma pirâmide quadrangular regular muda, se a altura for triplicada?
3. Como é que o comprimento da diagonal de uma pirâmide quadrangular regular muda, se a altura for triplicada?
4. Como é que a área de superfície total de uma pirâmide regular muda, se a altura for triplicada?
5. Podes usar o programa WOLFRAM para calcular o volume e a área da superfície total das pirâmides.

Exercícios para os estudantes

Exercício 1.

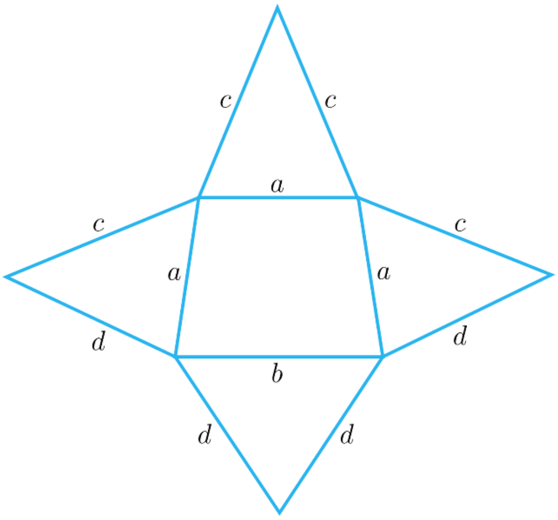
Desenhe uma planificação de a pirâmide em que a base é um quadrado as faces são triângulos retângulos.

Solução



Exercício 2.

Como se designa a pirâmide cuja planificação é ilustrada na figura seguinte.

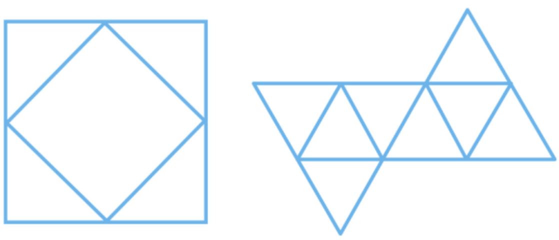


Solução

Pirâmide quadrangular de base trapezoidal.

Exercício 3.

Qual destas figuras ilustra uma planificação de uma pirâmide?

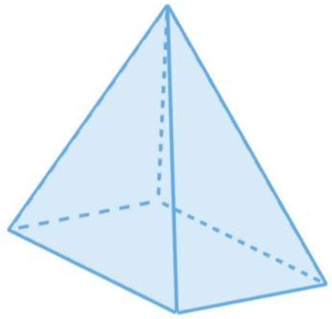


Solução

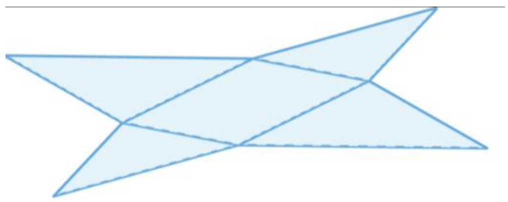
Nenhuma delas.

Exercício 4.

Desenhe uma planificação da pirâmide ilustrada na figura.



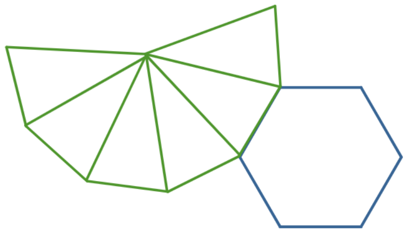
Solução



Exercício 5.

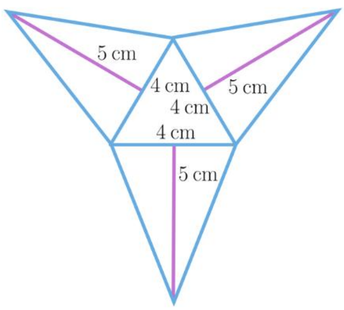
Desenhe uma planificação de uma pirâmide regular de base hexagonal.

Solução



Exercício 6.

Calcule o comprimento da altura da pirâmide ilustrada na figura.

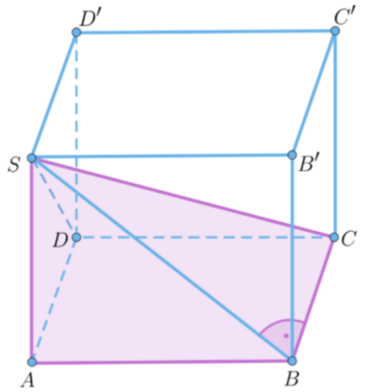


Solução

$h = \sqrt{23\frac{2}{3}}$.

Exercício 7.

Calcule o volume da pirâmide $ABCDS$ se o prisma for um cubo de comprimento de aresta 3.

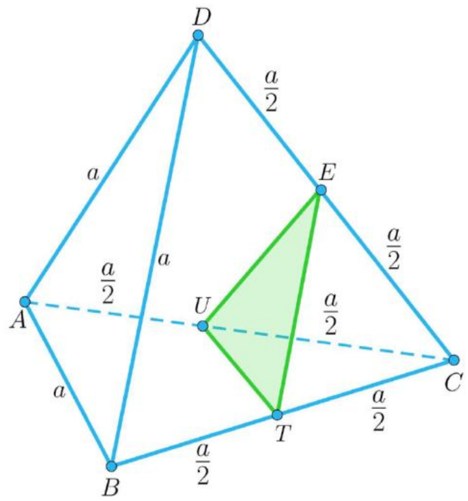


Solução

$V = 9$.

Exercício 8.

Dado um tetraedro $ABCD$ com comprimento de aresta 2 , determina a área do triângulo UTE.

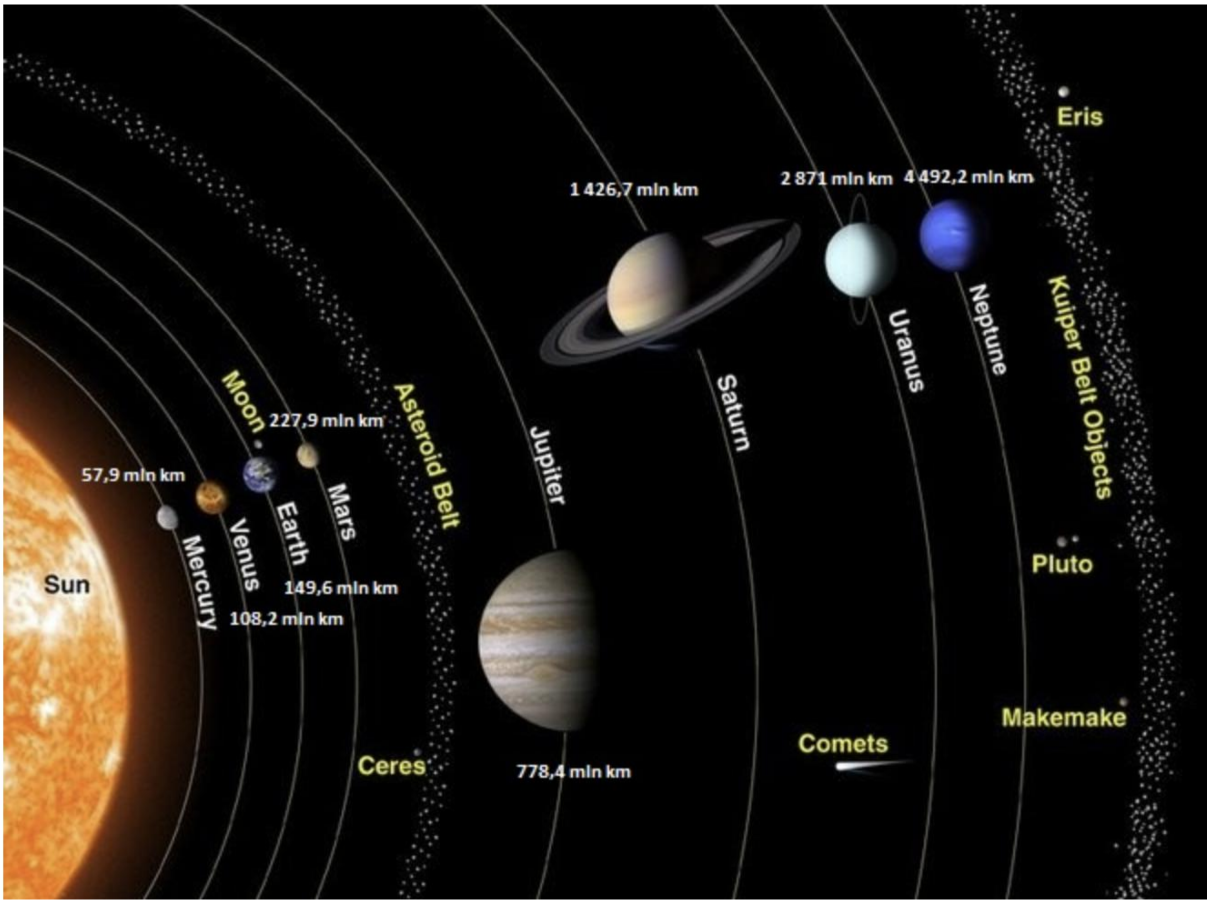


Solução

$P = \sqrt{3}$.

Module 9: Sistema planetário

Cenários de aula com aplicações de RV



Cenário de aula 1

Título da aula

Distâncias No Sistema Solar

Resultados de aprendizagem

- Familiarização com distâncias No Sistema Solar.

Plano da aula

Passo 1.

Introdução da unidade astronômica au.

Uma unidade astronômica é a distância média entre a Terra e o Sol, que é aproximadamente de 149 598 000 km. Para cálculos estimados, podemos assumir 150 000 000 km.

Passo 2.

Determinação da distância aproximada da Lua à Terra na unidade au.

Solução. Aproximadamente 0.0026 au.

Passo 3.

Definindo a unidade astronômica ano-luz (ly). Um ano-luz é a distância que a luz percorre no vácuo num ano, ly = 63241 au.

Passo 4.

Calculando quantos quilómetros há num ano-luz.

Solução. $\mathrm{ly} = 9.5 \cdot 10^{12}\ \mathrm{km}$.

Que perguntas devo fazer para que os alunos possam compartilhar os seus pensamentos?

Sabendo que a velocidade da luz no vácuo é 300 000 km/s, quanto tempo leva para a luz no vácuo atravessar o equador da Terra?

Cenário de aula 2

Título da aula

Comparações de quantidades no Sistema Solar

Resultados de aprendizagem

- Comparar quantidades no Sistema Solar.

Plano da aula

Passo 1.

O raio de Marte é 3 392 km. O diâmetro da Terra é 12 756 km.

Cálculo da área da superfície de Marte.

Solução. Cerca de $1.5 \cdot 10^{8}\ \mathrm{km}^2$.

Passo 2.

Cálculo do volume de Marte.

Solução. Cerca de $1.6 \cdot 10^{11}\ \mathrm{km}^3$.

Passo 3.

Cálculo da proporção do volume da Terra em relação ao volume de Marte.

Solução. Cerca de $\frac{3}{20}$.

Passo 4.

Cálculo da proporção da área da superfície terrestre em relação à área da superfície de Marte.

Solução. Cerca de $\frac{3}{10}$

.Que perguntas devo fazer para que os alunos possam compartilhar os seus pensamentos?

Comparar as densidades de Marte e da Terra.

Sugestões e dicas para professores

Nota para os estudantes:

1. Familiarize-se com a unidade astronômica parsec (pc)
2. Pode usar o programa WOLFRAM para cálculos no Sistema Solar.

Exercícios para os estudantes

Exercício 1.

Determine a distância média de Júpiter ao Sol.

Solução

5.203 au.

Exercício 2.

Determine a distância média da Terra ao Sol, em anos-luz.

Solução

Cerca de 8 minutos luz.

Exercício 3.

Determine a distância média da Terra à Lua, em anos-luz.

Solução

Cerca de 1.3 segundos-luz.

Exercício 4.

Determine um valor aproximado para a superfície da Terra (diâmetro: $12\ 756$ km).

Solução

Cerca de $510\ 000\ 000\ \mathrm{km}^2$.

Exercício 5.

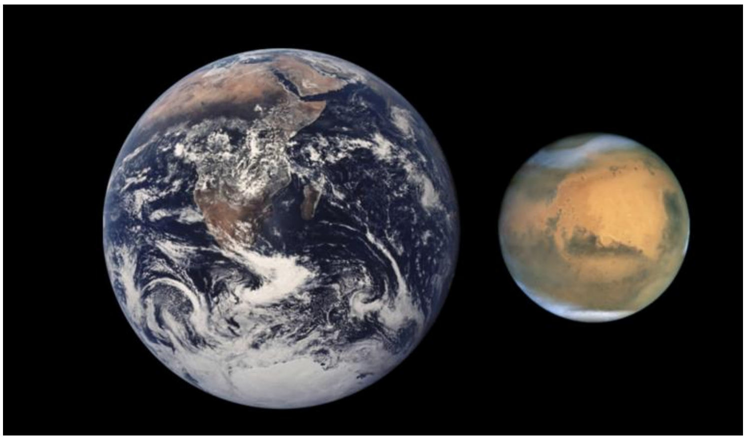
Determine um valor aproximado para o volume da Terra (diâmetro: $12\ 756$ km).

Solução

Cerca de $10^{12}\ \mathrm{km}^3$.

Exercício 6.

A figura mostra a Terra e Marte em escala. O diâmetro da Terra é de 12 756 km. Estime o diâmetro de Marte.



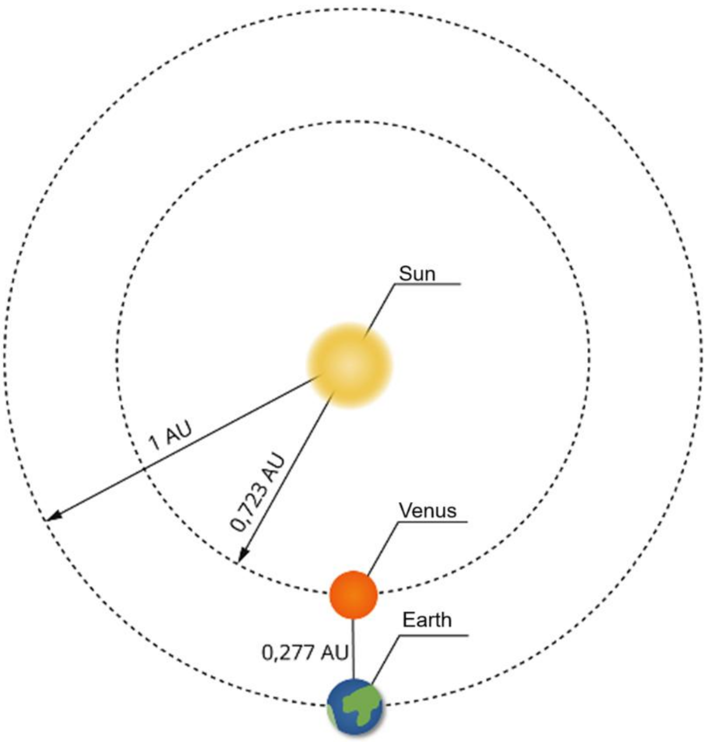
https://pl.wikipedia.org/wiki/Mars

Solução

Cerca de 6 800 km.

Exercício 7.

Determine a distância em quilómetros de Vénus ao Sol.



Module 10: Exploração do Sistema Solar

Cenários de aulas com aplicações em VR

Cenário de aula 1

Título da aula

Exploração espacial – conceitos básicos

Resultados de aprendizagem:

• Utilização de conceitos básicos sobre a exploração espacial.

Plano da aula

Passo 1.

Introdução à definição de uma nave espacial. Tipos de naves espaciais.

Passo 2.

Discussão sobre a radiação cósmica.

Passo 3.

Discussão sobre a gravidade. Gravidade na Terra e em outros planetas.

Passo 4.

Discussão sobre o impacto da gravidade na saúde humana.

Que perguntas devo fazer para que os alunos possam partilhar os seus pensamentos?

Qual é o estado atual da exploração do espaço?

Cenário de aula 2

Título da aula

Conquista do espaço

Resultados de aprendizagem:

• Discute a conquista do espaço.

Plano da aula

Passo 1.

Discussão sobre a história do primeiro homem no espaço.

Passo 2.

Discussão sobre o futuro da humanidade no espaço. Revisão de artigos de ciência popular.

Passo 3.

Discussão sobre as questões éticas da conquista do espaço. Revisão de artigos de ciência popular.

Que perguntas devo fazer para que os estudantes possam compartilhar os seus pensamentos?

Quando foi a primeira aterragem humana na Lua?

Sugestões e dicas para professores

1. **Pergunta para os estudantes:** A gravidade na Terra é $9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. A gravidade é a mesma em Marte e na Terra?
2. **Pergunta para os estudantes:** Onde há maior gravidade na Terra?
3. Quais são os atuais planos de pesquisa espacial da NASA?

Exercícios para estudantes

Exercício 1.

Apresente a sua opinião sobre a conquista dos planetas do Sistema Solar.

Exercício 2.

Apresente argumentos a favor da conquista dos planetas do Sistema Solar.

Exercício 3.

Apresente argumentos contra a conquista dos planetas do Sistema Solar.

Exercício 4.

Quais são as descobertas recentes feitas pelas sondas espaciais no Sistema Solar?

Exercício 5.

Quais são os perigos dos detritos espaciais?

Exercício 6.

Na Terra, uma pessoa pesa 50 kg. Quanto pesará esta pessoa em Marte?

Resposta:

Cerca de 18 kg.

Module 11: Interpretação geométrica de derivadas parciais

Cenários de aulas com aplicações em VR

Cenário de aula 1

Título da aula

Interpretação geométrica de derivadas parciais

Resultados de aprendizagem

- Interpretação de derivadas parciais.

Plano da aula

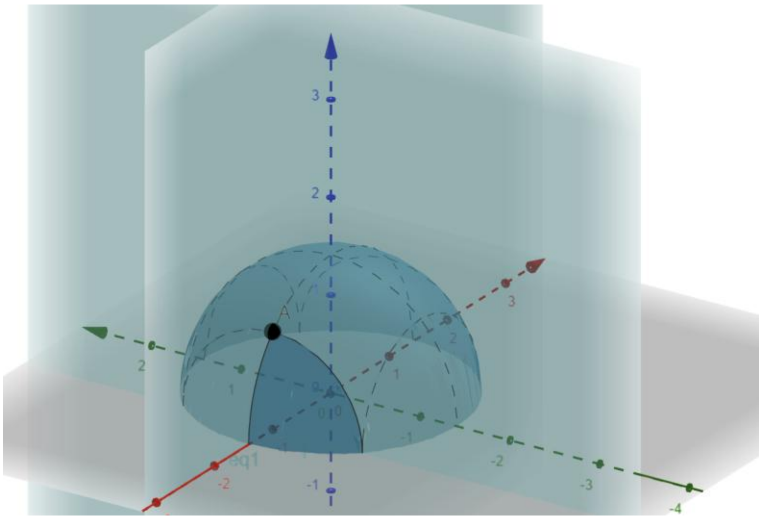
Passo 1.

Lembrete da interpretação da derivada de uma função de uma variável.

Passo 2.

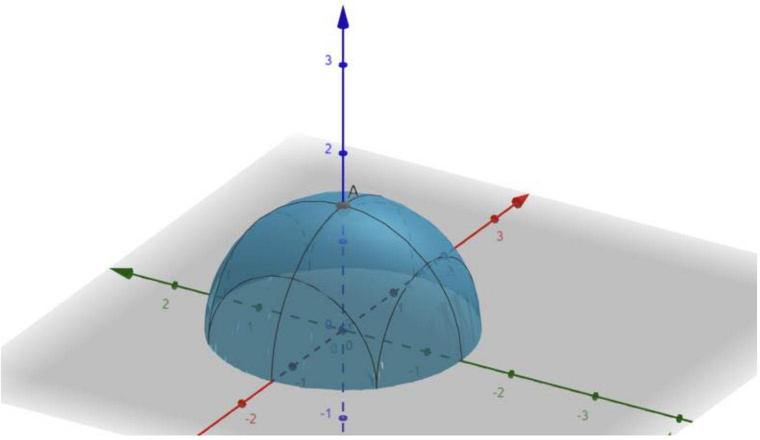
Introdução à definição de derivada parcial e sua interpretação para funções de duas variáveis.

Cálculo de derivadas parciais num ponto selecionado.



Passo 3.

Cálculo da derivada parcial num ponto dado.



Passo 4.

Apresenta relação entre extremos de uma função e as derivadas parciais

Que perguntas devo fazer para que os estudantes possam compartilhar os seus pensamentos?

Como definir derivadas parciais da uma função n-dimensional?

Cenário de aula 2

Título da aula

Cálculo de derivadas parciais

Resultados de aprendizagem

- Cálculo de derivadas parciais num ponto dado

Plano da aula

Passo 1.

Calcular a partir da definição da derivada parcial para a função $f(x, y) = y + x^2$ em respeito de variável y.

Passo 2.

Calcular derivada parcial da função $f(x, y) = y + x^2$ em respeito da variável y usando a definição.

Passo 3.

Calcular todas derivadas parciais da função $f(x, y) = \sin(x^3 + y^2)$.

Passo 4.

Calcular todas derivadas parciais da função $f(x, y) = x \cdot \sin(x^3 + y^2)$.

Passo 5.

Calcular todas derivadas parciais da função $f(x, y) = x \cdot \frac{\sin(x^3+y^2)}{x^2+2}$.

Que perguntas devo fazer para que os estudantes possam compartilhar os seus pensamentos?

Como calcular derivadas parciais de ordem superior?

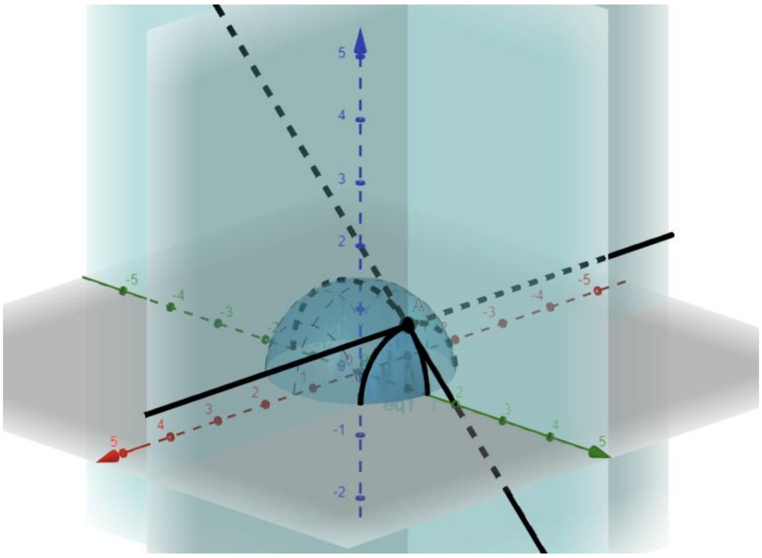
Sugestões e dicas para professores

6. Dica para estudantes: Ao calcular a derivada parcial em relação a uma variável selecionada, calculamos da mesma forma que para uma função de uma variável, tratando as variáveis restantes como constantes.
7. Questão para estudantes: Como calcular a derivada parcial em relação à variável x de uma função de três variáveis? Aplique a regra acima e calcule $\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}$ para função $f(x, y, z) = x^2 zy + x$.
8. Função $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0,0) \\ 0, & (x, y) = (0,0) \end{cases}$ não é continua, mas tem derivadas parciais em ponto $(0, 0)$.
9. Importante: é possível ter uma função que tenha derivadas parciais em um ponto, mas não seja contínua nesse ponto.
10. Os estudantes podem usar programa WOLFRAM para calcular derivadas parciais.

Exercícios para estudantes

Exercício 1.

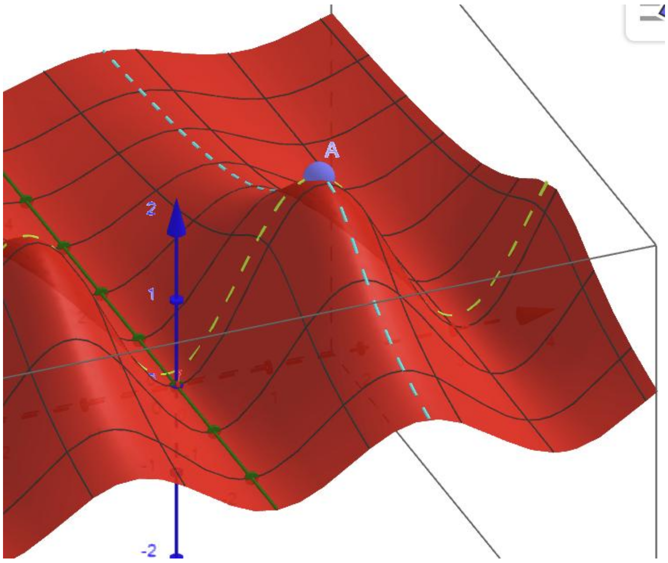
Calcular as derivadas parciais no ponto A para a função mostrada na figura.



Resposta: $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 1, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0.$

Exercício 2.

Calcular as derivadas parciais no ponto A para a função mostrada na figura.



Resposta

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0.$

Exercício 3.

Calcular as derivadas parciais da função $f(x,y) = x^3y + y^2 + 4$.

Resposta

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 3x^2y, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^3 + 2y.$

Exercício 4.

Utilizando a definição, calcular as derivadas parciais em ordem de x da função $f(x,y) = x^2y +$

Solução

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2y+x+h-(x^2y+x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xhy+h^2}{h} = 2xy.$$

Exercício 5.

Calcular derivadas parciais da função $f(x,y) = xe^{x^2+y^2}$.

Solução

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^{x^2+y^2}(1+2x^2), \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2xye^{x^2+y^2}.$

Exercício 6.

Verifique se o domínio de função $f(x,y) = \sqrt{x+y}$ coincide com domínio onde as suas derivadas parciais existam?

Resposta.

Não.

Exercício 7.

Seja função $f(x,y) = \sin(x^2+y^2)$. Prova que

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = (2x+2y)\cdot f(x,y).$$

Solução

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2x\sin(x^2+y^2) + 2y\sin(x^2+y^2) = (2x+2y)\cdot f(x,y).$$

Exercício 8.

Apresenta o exemplo de uma função f de duas variáveis que satisfaz a condição

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0.$$

Solução

$f(x,y) = x - y.$

Module 12: Coordenadas esféricas

Cenários de aula com aplicações de VR

Cenário de aula 1

Título da aula

Coordenadas polares

Resultados de aprendizagem

- Usar coordenadas polares.

Plano de aula

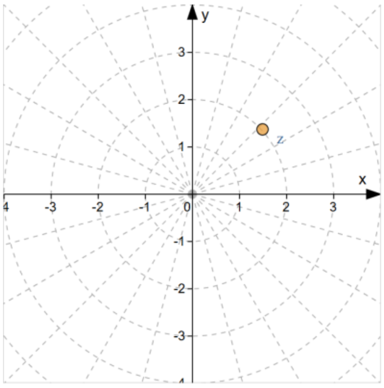
Passo 1.

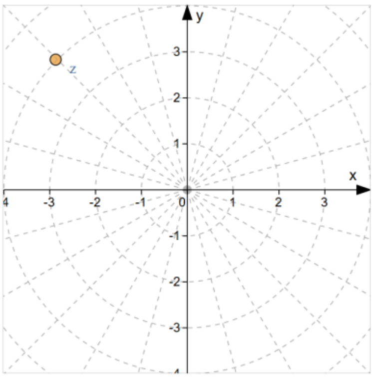
Lembrar as propriedades e gráficos de funções $\sin(x)$ e $\cos(x)$.

Passo 2.

Discussão sobre o problema das coordenadas polares $\begin{cases} x = r\cos(\alpha) \\ y = r\sin(\alpha) \end{cases}$.

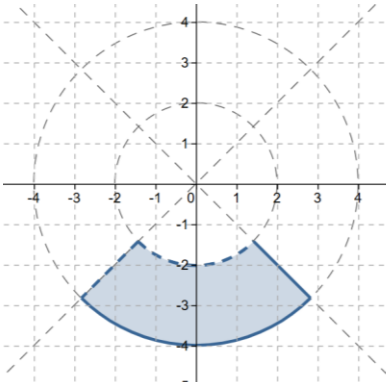
Determinação de coordenadas polares de um ponto está demonstrado na figura.





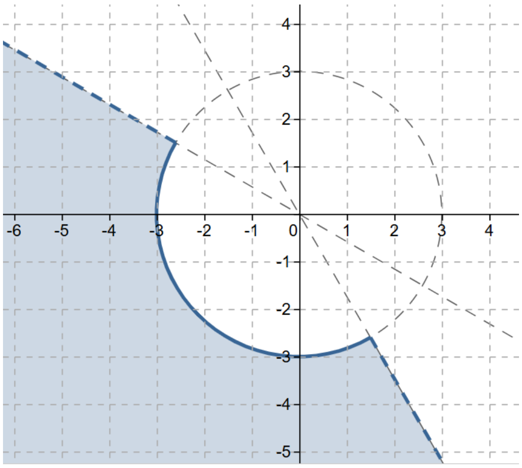
Passo 3.

Descrição de uma área plana usando coordenadas polares.



Passo 4.

Descrição de uma área plana usando coordenadas polares.



Que perguntas devo fazer para que os estudantes possam compartilhar os seus pensamentos?

Qual é a diferença entre coordenadas polares e cartesianas?

Cenário de aula 2

Título da aula

Coordenadas esféricas

Resultados de aprendizagem

- Capacidade de operar com coordenadas esféricas

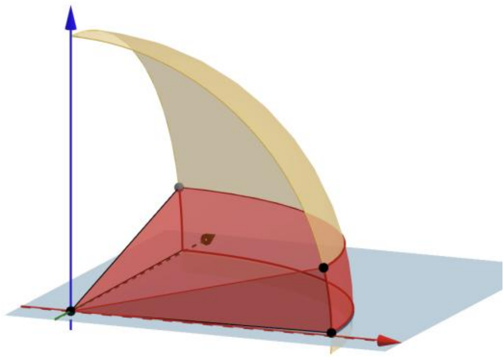
Plano da aula

Passo 1.

Introdução de coordenadas esféricas $\begin{cases} x = r\cos(\theta)\cos(\alpha) \\ y = r\cos(\theta)\sin(\alpha). \\ z = r\sin(\theta) \end{cases}$

Passo 2.

Representação de um conjunto em coordenadas esféricas.



$$\begin{cases} 0 \le r \le 4 \\ 0° \le \alpha \le 90° \\ 0° \le \theta \le 20° \end{cases}$$

Passo 3.

Calculo de distâncias entre dois pontos cujas coordenadas esféricas são dadas.

Que perguntas devo fazer para que os estudantes possam compartilhar os seus pensamentos?

Como calcular limites de funções definidas em coordenadas esféricas?

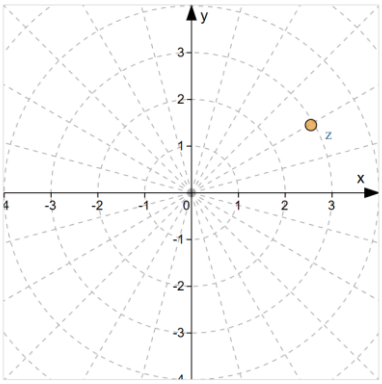
Sugestões e dicas para professores

1. Pergunta para estudantes: Qual é equação de círculo em coordenadas polares ?
2. Pergunta para estudantes: Como definir uma esféra em coordenadas esféricas?
3. Como converter coordenadas polares para cartesianas?
4. Como converter coordenadas esféricas para coordenadas cartesianas?
5. Os Estudantes podem usar programa WOLFRAM para calcular coordenadas esféricas

Exercícios para os estudantes

Exercício 1.

Determine coordenadas polares do ponto indicado na figura.

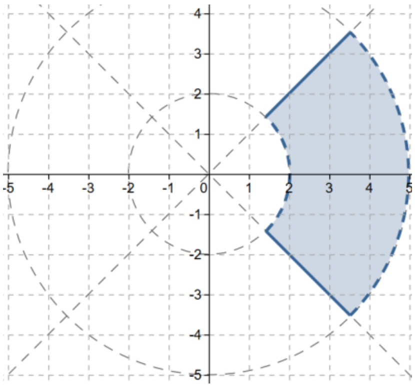


Solução

Coordenadas polares: $r = 3, \alpha = 30°$.

Exercício 2.

Descreve o conjunto de pontos da área assombrada indicada na figura, usando coordenadas polares.



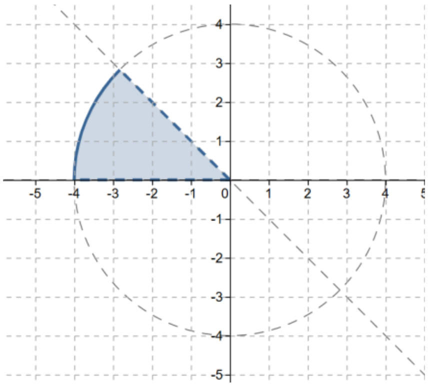
Solução

$$\begin{cases} 2 < r < 5 \\ -45° \leq \alpha \leq 45° \end{cases}.$$

Exercício 3.

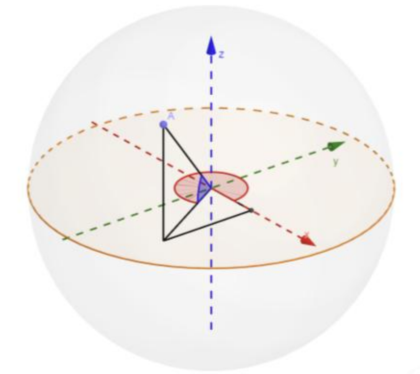
Desenha o conjunto representado pelas seguintes desigualdades no sistema de coordenadas polares: $\begin{cases} 0 \leq r \leq 4 \\ 135° < \alpha < 180° \end{cases}.$

Solução



Exercício 4.

Encontra as coordenadas esféricas do ponto x apresentado na figura



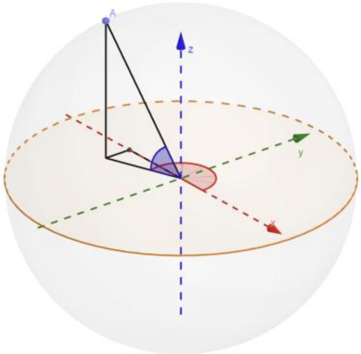
Solução

$\alpha = 300°, \theta = 45°, r = 3.$

Exercício 5.

Desenha o ponto cujas coordenadas esféricas são: $\alpha = 200°, \theta = 60°, r = 3.$

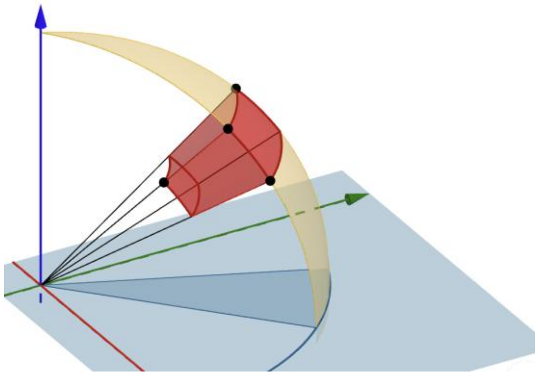
Solução



Exercício 6.

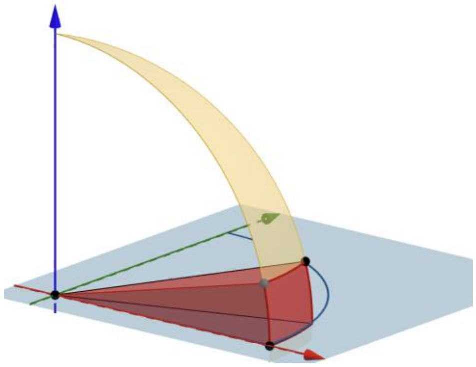
Desenha o conjunto de pontos definido pelo sistema: $\begin{cases} 2 \leq r \leq 4 \\ 30° \leq \alpha \leq 60°. \\ 40° \leq \theta \leq 50° \end{cases}$

Solução



Exercício 7.

Descreva o conjunto apresentado na figura utilizando coordenadas esféricas.



Solução

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq 4 \\ 0° \leq \alpha \leq 20° \\ 0° \leq \theta \leq 20° \end{cases}.$$

Module 13: Vetores, operações com vetores, escalares

Cenários de aulas com aplicações em VR

Cenário de aula 1

Título da aula

Interpretação geométrica de vetores no espaço 3-dimensional, operações com

Resultados de aprendizagem

Interpretar vetores no espaço tridimensional

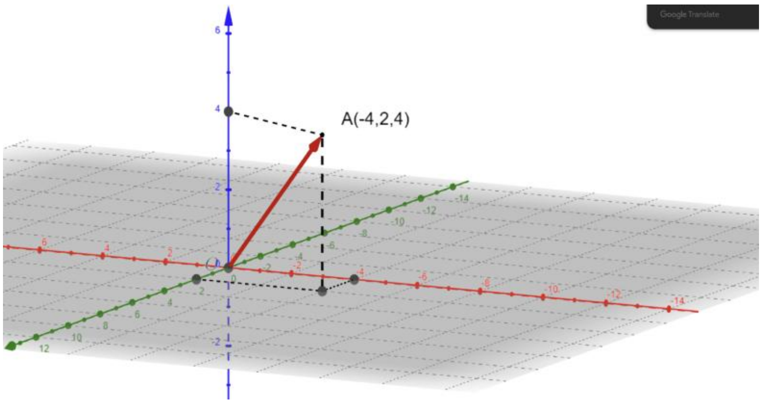
Plano da aula

Passo 1.

Lembrar definições e propriedades básicas de vetores no plano e de operações com vetores.

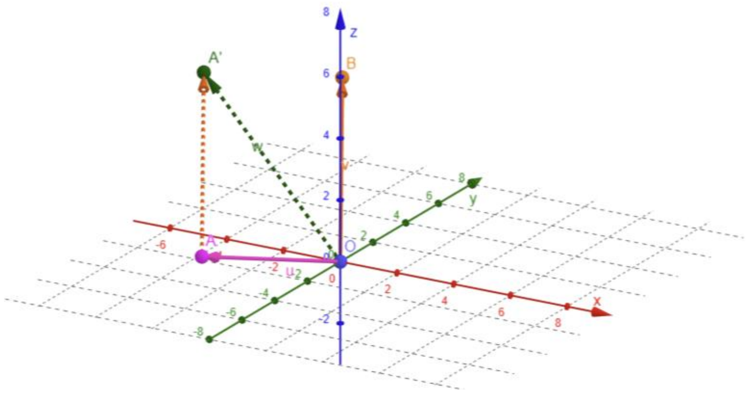
Passo 2.

Construir o vetor com coordenadas dadas: $\vec{v} = [-4,2,4]$.



Passo 3.

Calcular a soma de vetores $\vec{u}, \vec{v}$ if $\vec{u} = [-4,-2,0]$, $\vec{v} = [0,0,6]$.



Passo 4.

Dados vetores $\vec{u} = [1,3,0]$, $\vec{v} = [-1,1,2]$, $e\ \vec{s} = [1,0,0]$, calcular $\vec{u} + 3\vec{v} - 2\vec{s}$.

Solução: $\vec{u} + 3\vec{v} - 2\vec{s} = [-4,6,6]$.

Que perguntas devo fazer para que os estudantes possam compartilhar os seus pensamentos?

Como podemos definir vetores e operações com vetores no espaço n −dimensional?

Cenário de aula 2

Título da aula

Produto escalar de dois vetores, produto vetorial de dois vetores no espaço 3-dimensional

Resultados de aprendizagem

- Cálculo de produto escalar e produto vetorial de vetores em 3D.

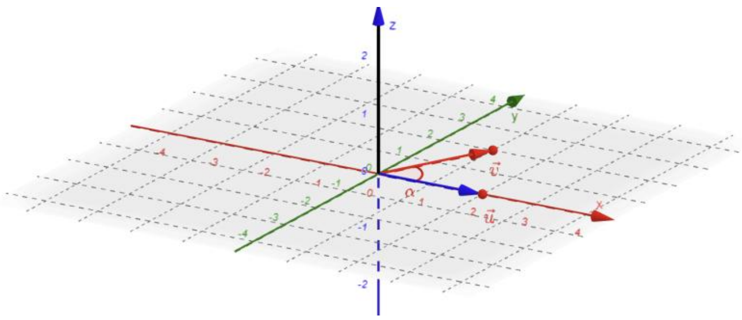
Plano da aula

Passo 1.

Lembrar interpretação do produto escalar de dois vetores no plano.

Passo 2.

Fazer interpretação geométricas de produto vetorial de dois vetores $\vec{u}, \vec{v}$ no espaço 3-dimensional.



Passo 3.

Calcular produto escalar de vetores $\vec{u} = [1,4,0]$, $\vec{v} = [3,1,1]$.

Passo 4.

Definição e interpretação do produto vetorial em 3D.

Que perguntas devo fazer para que os estudantes possam compartilhar os seus pensamentos?

Como definir produto escalar e vetorial no espaço n −dimensional.

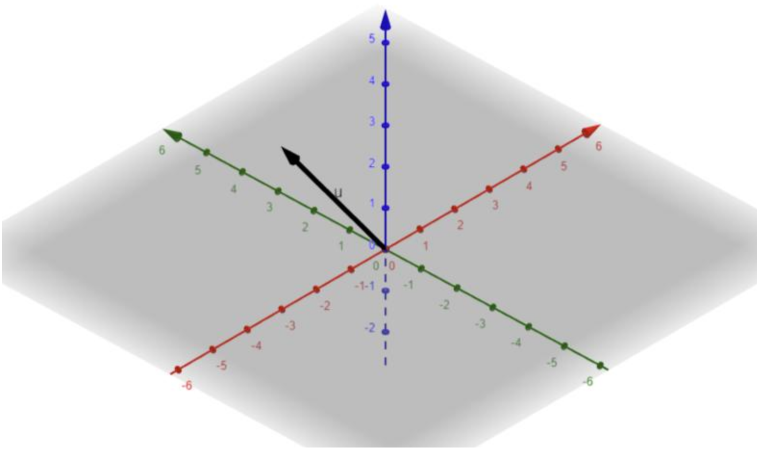
Sugestões e dicas para professores

1. Quais são as aplicações práticas de produto escalar?
2. Quais são as aplicações práticas de produto vetorial, e.g. em gráfica computacional?
3. Apresenta as propriedades básicas de produto escalar de dois vetores.
4. Apresenta as propriedades básicas de produto vetorial de dois vetores.
5. Como verificar se dois vetores são paralelos ou perpendiculares?
6. Os Estudantes podem usar programa WOLFRAM para efeituar operações com vetores.

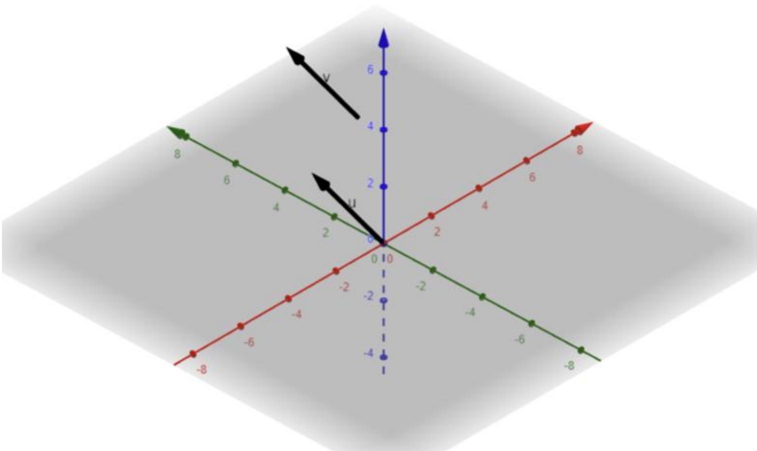
Exercícios para estudantes

Exercício 1.

Sejam dois vetores iguais, $\vec{u}, \vec{v}$. Desenha um vetor $\vec{v}$ sabendo que $\vec{u} = [-2,1,3]$.

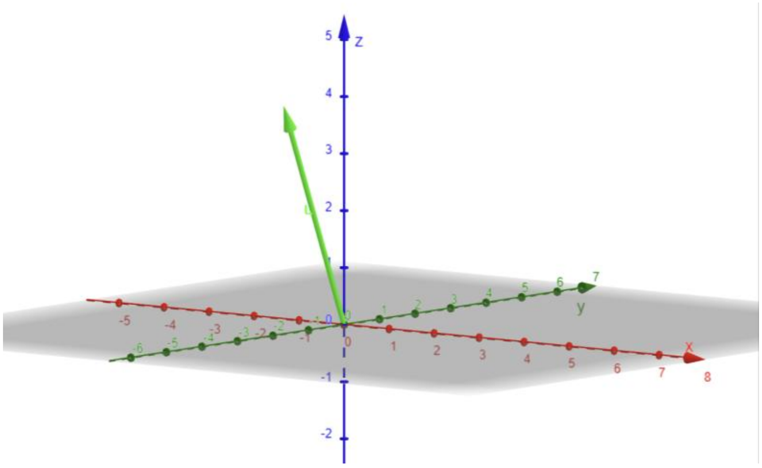


Solução

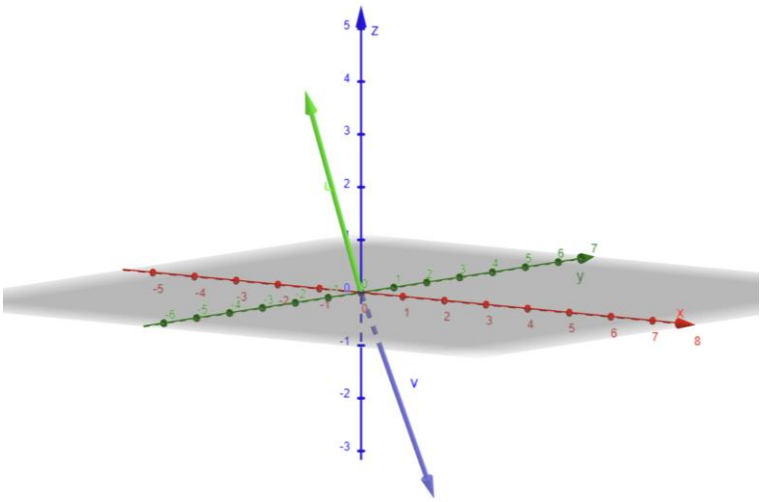


Exercício 2.

Vetores $\vec{u}, \vec{v}$ são opostos. Desenha vetor $\vec{v}$ sabendo que $\vec{u} = [0,2,4]$.



Solução



Exercício 3.

Calcular as coordenadas do vetor $\overrightarrow{AB}$ se $A = (2,5,-1)$, $B = (0,2,4)$.

Solução

$\overrightarrow{AB} = [-2,-3,5]$.

Exercício 4.

Calcular o comprimento do vetor $\vec{u} = [3,4,0]$.

Solução

$|\vec{u}| = 5$.

Exercício 5.

Determinar os parâmetros a, b, c de forma que os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ sejam iguais, onde $A = (2,5,-1)$, $B = (0,2,4)$, $C = (a, 0, c)$, $D = (0, b, 4)$.

Solução

$a = 2, b = -3, c = -1.$

Exercício 6.

Calcular o produto vetorial de $\vec{u} = [1,4,0], \vec{v} = [3,1,1].$

Solução

$\vec{u} \times \vec{v} = [4, -1, -11].$

Exercício 7.

Calcular o produto escalara de vetores $\vec{u} = [3,4,0], \vec{v} = [2,4,1].$

Solução

$22.$

Exercício 8.

Verificar se o triângulo ABC é reto: $A = (2,5,-1), B = (0,2,10), C = (0,0,0).$

Solução

Sim.

Exercício 9.

Prove que $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2.$

Solução

Suponhamos que $\vec{u} = [a, b, c]$. Neste caso

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = [a, b, c] \cdot [a, b, c] = a^2 + b^2 + c^2 = |\vec{u}|^2.$$

Exercício 10.

Prove que $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}.$

Solução

Assumimos que $\vec{u} = [a, b, c]$. Neste caso $\vec{u} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} = \vec{0}.$

Exercício 11.

Calcular o volume de um sólido definido pelos vetores $\vec{u} = [1,4,0], \vec{v} = [3,1,1], \vec{s} = [1,1,0].$

Solução

$\vec{u} \times \vec{v} = [4, -1, -11]. V = \vec{s} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 3.$