Co-funded by
the European Union

MATH 3D GEO VR

# Pracovné materiály
# pre učiteľov a študentov

„Matematické modely vo vyučovaní geometrie v trojrozmernom priestore s využitím virtuálnej reality"

"Mathematical models for teaching three - dimensional geometry using virtual reality"

SLOVENSKÁ VERZIA

Lodz University of Technology

universidade de aveiro
theoria poiesis praxis

UNIVERSITY OF ŽILINA

TARTU ÜLIKOOL 1632 UNIVERSITY OF TARTU

UNIVERSITY OF SILESIA
IN KATOWICE

**Pracovné materiály pre učiteľov a študentov „Matematické modely vo vyučovaní geometrie v trojrozmernom priestore s využitím virtuálnej reality“**

(“Mathematical models for teaching three-dimensional geometry using virtual reality”)

Vytvorilo konzorcium Math3DgeoVR.

Co-funded by the European Union

Spolufinancované Európskou úniou (Math3DgeoVR, projekt č. 2021-1-PL01-KA220-HED-000030365). Názory a stanoviská vyjadrené v texte sú však výlučne názory autora(ov) a nemusia nevyhnutne odrážať názory Európskej únie alebo Fundacje Rozwoju Systemu Edukacji. Ani Európska únia, ani grantová autorita nemôžu byť za tieto názory zodpovedné.



Lodz University of Technology
universidade de aveiro theoria poiesis praxis
UNIVERSITY OF ŽILINA
TARTU ÜLIKOOL UNIVERSITY OF TARTU 1632
UNIVERSITY OF SILESIA IN KATOWICE

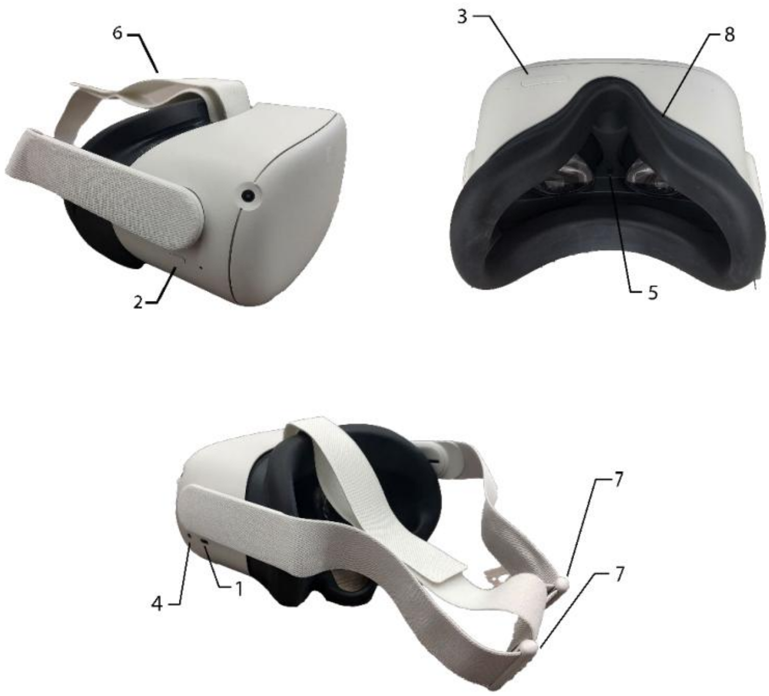
# Oculus Quest 2

## Úvod na používanie Oculus Quest 2

**Oculus Quest 2**, teraz známy ako **Meta Quest 2**, sú samostatné okuliare pre virtuálnu realitu, ktoré ponúkajú množstvo pokročilých funkcií. Tu je podrobný popis ich funkcií a návod, ako ich používať.

Oculus Quest 2 pozostáva z dvoch hlavných častí:

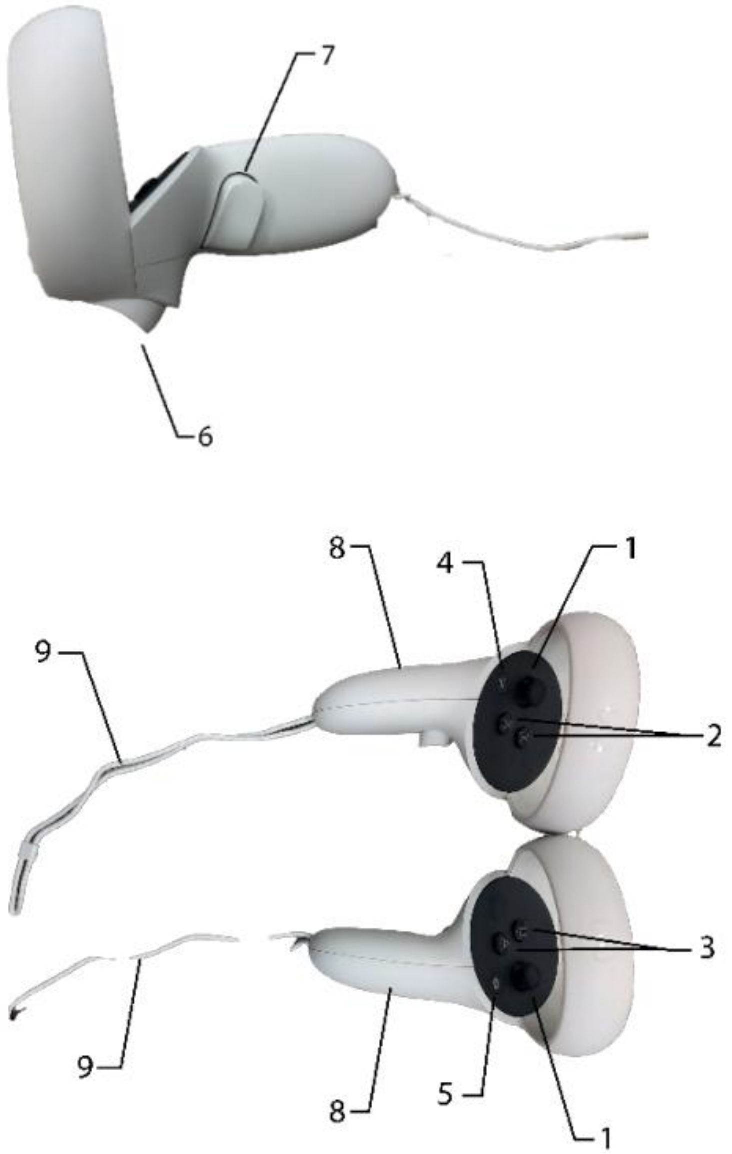
1. Náhlavná súprava (HMD, obrázok 1)
2. Ovládače (obrázok 2)




1. Nabíjací port
2. Tlačidlo napájania
3. Ovládanie hlasitosti
4. Zvukový port
5. Úprava objektívu
6. Nastavovacie popruhy
7. Nastavovacie popruhy
8. Ochranný návlek na okuliare (voliteľné)

Obrázok 1. Náhlavná súprava

(fotografia prevzatá z Meta Quest 2 New User Guide, University of South Carolina. (nd). *[Obrázok zobrazujúci Meta Quest 2 headset]* . V *Meta Quest 2 New User Guide* . Získané z https://sc.edu/about/offices_and_divisions/cte/teaching_resources/docs/quest2_user_guide.pdf ).




1. Joysticky
2. X/Y tlačidlá (ľavý ovládač)
3. Tlačidlá A/B (pravý ovládač)
4. Tlačidlo ponuky (ľavý ovládač)
5. Tlačidlo Oculus (pravý ovládač)
6. Spúšťacie tlačidlá
7. Uchopovacie tlačidlá
8. Priehradky na batérie
9. Popruhy na zápästie

Obrázok 2. Ovládače

(fotografia prevzatá z Meta Quest 2 New User Guide, University of South Carolina. (nd). *[Obrázok zobrazujúci Meta Quest 2 headset]* . V *Meta Quest 2 New User Guide* . Získané z https://sc.edu/about/offices_and_divisions/cte/teaching_resources/docs/quest2_user_guide.pdf ).

## Základné vlastnosti

**Displej:** Okuliare sú vybavené dvoma displejmi s rozlíšením 2064 x 2208 pixelov na každé oko, ktoré poskytujú jasný a detailný obraz.

**Procesor:** Quest 2 pracuje na Qualcomm Snapdragon XR2, ktorý umožňuje plynulé fungovanie VR hier a aplikácií.

**Sledovanie pohybu:** Okuliare ponúkajú sledovanie pohybu v 3D priestore vďaka štyrom kamerám umiestneným zvonka, čo umožňuje interakciu s okolím.

**Ovládače:** Súčasťou sú dotykové ovládače pre presné ovládanie vo virtuálnom svete.

**Komunitné funkcie:** Užívatelia sa môžu zúčastniť hier pre viacerých hráčov a live podujatí, aby obohatili zážitok z VR.

**Kompatibilita s PC:** Okuliare je možné pripojiť k počítačom, čo umožňuje užívateľom používať náročnejšie aplikácie VR.

# Ako začať s Oculus Quest 2

## Ako zapnúť okuliare

Postup pri zapínaní okuliarov Oculus Quest 2:

1. Stlačte tlačidlo napájania v hornej časti okuliarov.
2. Počkajte, kým sa systém zavedie a zobrazí logo Oculus.

## Registrácia účtu

Na používanie Oculus Quest 2 je potrebné mať Meta (predtým Facebook) účet. Proces registrácie zahŕňa:

1. Prevzatie aplikácie Oculus: Aplikáciu si môžete stiahnuť z obchodu App Store alebo Google Play.
2. Prihlásenie: Používateľ sa musí prihlásiť do svojho Meta účtu.
3. Konfigurácia profilu: Používateľ nastaví predvoľby, pridá informácie o platbe a vytvorí PIN pre obchod Oculus.

## Resetovanie okuliarov

Ak sa vyskytnú problémy s prevádzkou okuliarov, môžete ich resetovať.

1. Obnoviť výrobné nastavenia:
   - Vypnite okuliare.
   - Súčasne stlačte a podržte tlačidlo napájania a tlačidlo zníženia hlasitosti na približne 10 sekúnd.
   - Keď sa zobrazí logo Oculus, uvoľnite tlačidlá.

    - Na navigáciu použite tlačidlá hlasitosti a vyberte „Obnovenie továrenských nastavení".
2. Resetovanie aplikácie: Môžete tiež resetovať aplikáciu Oculus na svojom mobilnom zariadení, čo môže pomôcť vyriešiť problémy s pripojením.

Oculus Quest 2 je pokročilé zariadenie, ktoré ponúka množstvo možností virtuálnej reality pre hráčov aj tých, ktorí hľadajú zážitky.

## Technické požiadavky na Oculus Quest 2

Ak chcete naplno využiť výhody Oculus Quest 2, počítač musí spĺňať určité technické požiadavky. Tu sú najdôležitejšie z nich:

- Procesor: Intel Core i5-4590 alebo AMD Ryzen 5 1500X alebo lepšie,
- RAM: Minimálne 8 GB,
- Operačný systém: Windows 10,
- Grafická karta: NVIDIA GeForce GTX 1060 alebo lepšia,
- AMD Radeon RX 480 alebo lepší,
- Porty: k dispozícii je USB port.

Upozorňujeme, že tieto požiadavky sa vzťahujú na používanie Oculus Link, ktoré umožňuje pripojiť okuliare k počítaču a hrať VR hry z knižnice Rift alebo Steam. Ak chcete Quest 2 používať ako samostatné zariadenie bez pripojenia k PC, požiadavky sú o niečo menšie. Za zmienku stojí aj dĺžka kábla Oculus Link. Odporúča sa použiť originálny kábel alebo kvalitné náhrady, aby sa zabezpečila optimálna dĺžka a voľnosť pohybu počas hry.

## Problémy s nastavením

Oculus Quest 2 sa napriek svojim pokročilým funkciám môže počas používania stretnúť s rôznymi problémami. Tu sú tie najbežnejšie a ako ich vyriešiť.

Počas inštalácie sa môžu užívatelia stretnúť s niekoľkými problémami.

### Zastavenie pri aktualizáciách

Okuliare nemusia prejsť procesom aktualizácie. Ak k tomu dôjde, skúste reštartovať zariadenie alebo obnoviť výrobné nastavenia, ak problém pretrváva [1].

### Párovací kód

Môžete byť vyzvaní na zadanie párovacieho kódu. Otvorte aplikáciu Oculus na svojom mobilnom zariadení a pokračujte v nastavovaní podľa pokynov [1].

## Problémy so softvérom

Užívatelia môžu mať problémy so softvérom, ako napríklad:

### Aplikácia zlyháva

Aplikácie môžu niekedy zamrznúť alebo prestať reagovať. Ak sa tak stane, môže pomôcť reštart okuliarov alebo vynútenie aktualizácie softvéru v nastaveniach [1,4].

### Čierna obrazovka

Užívatelia môžu po odstránení okuliarov vidieť čiernu obrazovku. V takom prípade jednoducho reštartujte zariadenie, aby sa obnovilo normálne zobrazenie [4].

## Problémy s výkonom

Pri intenzívnom používaní sa môžu vyskytnúť problémy s výkonom.

### Prehrievanie

Okuliare môžu byť horúce, najmä pri dlhšom hraní. Ak sa to stane, je dobré urobiť si prestávku, aby sa zariadenie mohlo ochladiť [2].

### Problémy s kvalitou obrazu

Užívatelia si môžu všimnúť, že kvalita obrazu nie je uspokojivá. Môže to byť spôsobené neadekvátnymi nastaveniami alebo potrebou aktualizovať softvér [2].

## Zdravotné problémy

Používanie okuliarov VR môže viesť k niektorým zdravotným problémom.

### VR choroba

Niektorí užívatelia môžu pociťovať príznaky podobné kinetóze, ako sú závraty alebo nevoľnosť. Na minimalizáciu týchto príznakov sa odporúča robiť prestávky a vyhýbať sa dlhodobému používaniu [6].

## Problémy s účtom

V prípade problémov s vaším účtom Meta (Facebook):

### Problémy s prihlásením

Užívatelia môžu mať problémy s prihlásením do svojho účtu. Oplatí sa skontrolovať, či sú prihlasovacie údaje správne a či je aplikácia Oculus aktualizovaná [1].

Na záver možno povedať, že Oculus Quest 2 je pokročilé zariadenie, ktoré sa môže počas používania stretnúť s rôznymi problémami. Mnohé z nich je možné vyriešiť aktualizáciou softvéru, reštartovaním zariadenia alebo jeho resetovaním do továrenských nastavení. V prípade zdravotných problémov sa odporúča robiť prestávky v užívaní.

## Referencie

[1] https://vrpolska.eu/poradnik-nowego-posiadacza-questa/

[2] https://mobiletrends.pl/sprawdzamy-gogle-oculus-quest-2-od-facebooka-czy-wprowadza-wirtulana-rzeczywistosc-pod-strzechy/

[3] https://www.youtube.com/watch?v=1uSoGOqmVbE

[4] https://business.oculus.com/support/444171669614375/?locale=pl_PL

[5] https://securecdn.oculus.com/sr/oculusquest-warning-polish

[6] https://motionsystems.pl/vr-sickness/

[7] https://www.meta.com/pl-pl/help/quest/articles/getting-started/getting-started-with-quest-2/what-is-meta-quest-2/

[8] https://www.meta.com/pl-pl/help/quest/articles/headsets-and-accessories/using-your-headset/.

# Návod: Navigácia v moduloch

## Ovládače a ruky

Väčšinu interakcií v tejto aplikácii môžete vykonávať pomocou ovládačov aj vlastných rúk (ak je v nastaveniach okuliarov VR povolené sledovanie rúk), na aktiváciu sledovania rúk položte ovládače tak, aby sa nehýbali, a potom umiestnite svoje ruky v dosahu okuliarov VR, na aktiváciu sledovania ovládača jednoducho vezmite ovládače do rúk.

Sledovanie rúk - ak chcete používať sledovanie rúk, musíte ho najskôr povoliť na systémovej úrovni -> rýchle nastavenia -> nastavenia -> zariadenie -> ruky a ovládače -> sledovanie rúk.

## Pohyb

Pomocou joysticku na ľavom ovládači sa môžete pohybovať dopredu, dozadu a do strán, predná časť je vždy v smere, ktorým sa pozeráte, otáčaním joysticku pravého ovládača doľava alebo doprava môžete otáčať v krokoch po 45 stupňoch.

## Teleport

Naklonením joysticku pravého ovládača dopredu aktivujete indikátor teleportu, nasmerujete ho kamkoľvek a potom zložíte prst z joysticku a presuniete sa na určené miesto. Šípky na konci ukazovateľa označujú váš smer pohľadu po teleportácii, ktorú môžete upraviť naklonením pákového ovládača nabok.

Indikátor teleportu (namierený červený lúč) použijete pravou rukou tak, že ukazovákom stlačíte príslušné tlačidlo 6.

## Uchopenie predmetov

Pomocou tlačidla 7 na uchopenie na rukoväti ovládača tento predmet uchopte, budete ho držať, kým tlačidlo nepustíte, takýto predmet môžete uchopiť aj rukou (celou alebo len ukazovákom a palcom). Túto akciu môžete vyskúšať napr. uchopením tabletu, ktorý sa nachádza na ľavej strane dverí.

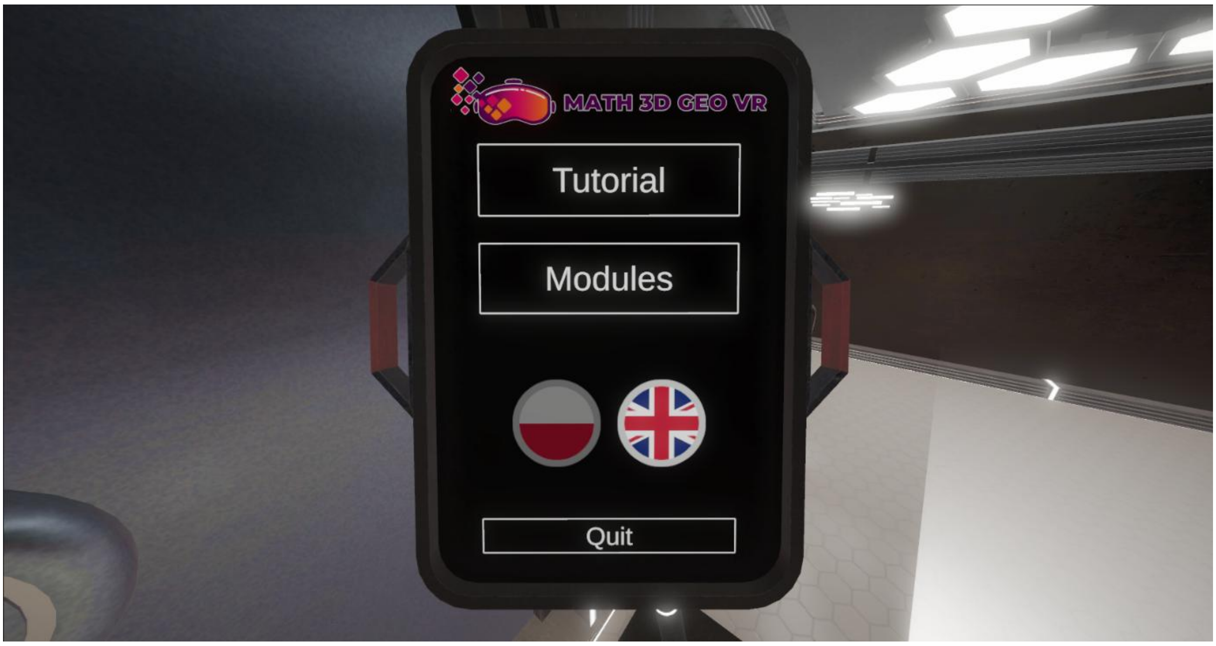
## Vyskakovacie menu

Ak chcete vyvolať vyskakovacie menu, stlačte tlačidlo ponuky č. 4 na ľavom ovládači alebo buchnite rukou s ovládačom do zvoleného navigačného menu na tablete. Rovnakým spôsobom môžete túto ponuku zatvoriť. Vyskakovacie menu umožňuje kedykoľvek opustiť modul do hlavného menu, teda aktuálnej miestnosti, alebo ukončiť aplikáciu, tiež umožňuje zmeniť jazyk, ako i prepínanie medzi režimom sedenia a státia, a zobraziť a skryť prompt.

## Práca s modulmi Math3DgeoVR

Moduly v aplikácii zodpovedajú rôznym matematickým problémom, pre každý z nich je úvodná časť, testovacia časť a tiež príklady praktickej aplikácie. Hlavný navigačný panel je znázornený na obrázku 3.

Spustite modul po dokončení tutoriálu z ponuky na tejto obrazovke. Vyberte moduly (obrázok 4) a potom stlačte tlačidlo zodpovedajúce modulu.




Obrázok 3. Hlavný navigačný panel v aplikácii Math3DgeoVR.


Obrázok 4. Výber VR modulov v aplikácii Math3DgeoVR.

## Ukončenie práce s modulmi

Vo väčšine prípadov môžete kedykoľvek opustiť modul do hlavného menu stlačením tlačidla na výstupných dverách. Modul môžete opustiť aj stlačením spodného tlačidla vo vyskakovacom menu.

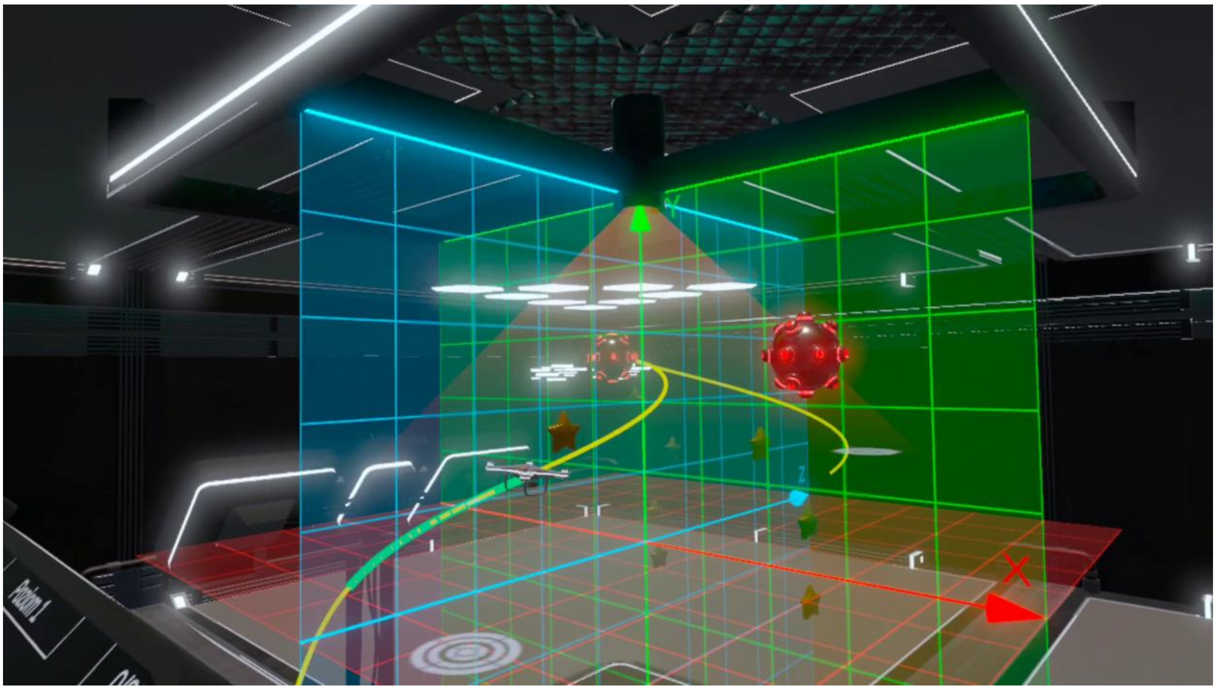
Tipy - moduly môžu obsahovať ďalšie obrazovky s tipmi, ich špecifické ovládacie prvky, na zobrazenie alebo skrytie týchto obrazoviek stlačte tlačidlo B na pravom ovládači, ich viditeľnosť môžete zmeniť aj tlačidlom vo vyskakovacom menu.

# Moduly v aplikácii VR

## Modul 1: Trajektórie

V tomto module študenti preskúmajú vzťah medzi matematickými funkciami a ich grafickými reprezentáciami so zameraním na priestorové krivky. Cieľom je pochopiť, ako môže funkcia jednej premennej popísať trojrozmernú krivku, ako je trajektória pohybujúceho sa objektu, ako je dron. Študenti navrhnú dráhu letu dronu pomocou dvoch funkcií – jedna predstavuje horizontálny pohyb a druhá predstavuje vertikálny pohyb. Výzvou je prechádzať cez konkrétne body a zároveň sa vyhýbať prekážkam. Manipuláciou s funkciami si študenti môžu vizualizovať dráhu dronu v 3D priestore aj jeho projekciu na rovinu $XY$.

Obrázok zobrazuje hologram trajektórie letu dronu.

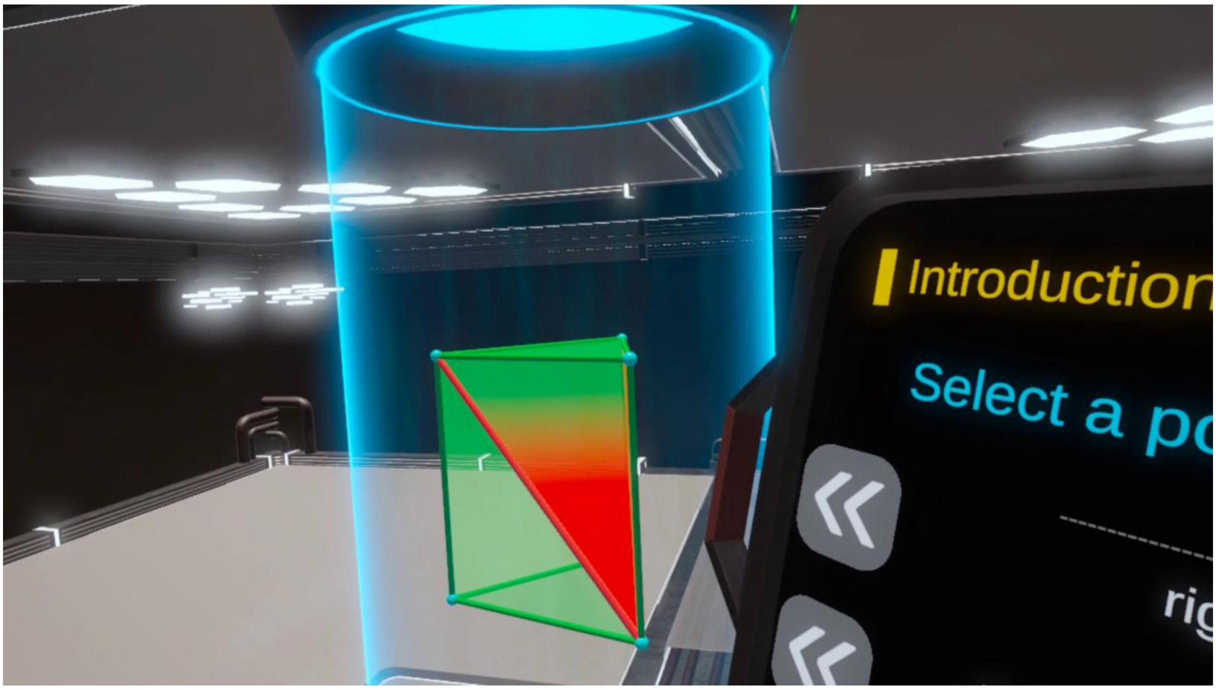



- **Scenár lekcie 1: Grafy goniometrických funkcií jednej premennej**
- **Scenár lekcie 2: Vektorové funkcie**

## Modul 2: Uhly v hranoloch

Téma "Uhly v hranoloch" zahŕňa analýzu uhlov tvorených uhlopriečkami a hranami hranola. Hranol, ktorý je trojrozmerným geometrickým útvarom, je jedným zo základných objektov študovaných v priestorovej geometrii. Pochopenie uhlov, ktoré sa tvoria medzi rôznymi prvkami hranola, je kľúčové pre hlbšie pochopenie geometrie telies a jej aplikácií na problémy reálneho sveta.V tomto module sa môžete zoznámiť s telesami a uhlami prepínaním medzi ich typmi pomocou šípok na paneli. V stĺpe naľavo sa objaví teleso s príkladom daného uhla, môžete ho vybrať a pozrieť si ho zblízka.

Obrázok zobrazuje hologram trojbokého hranola.

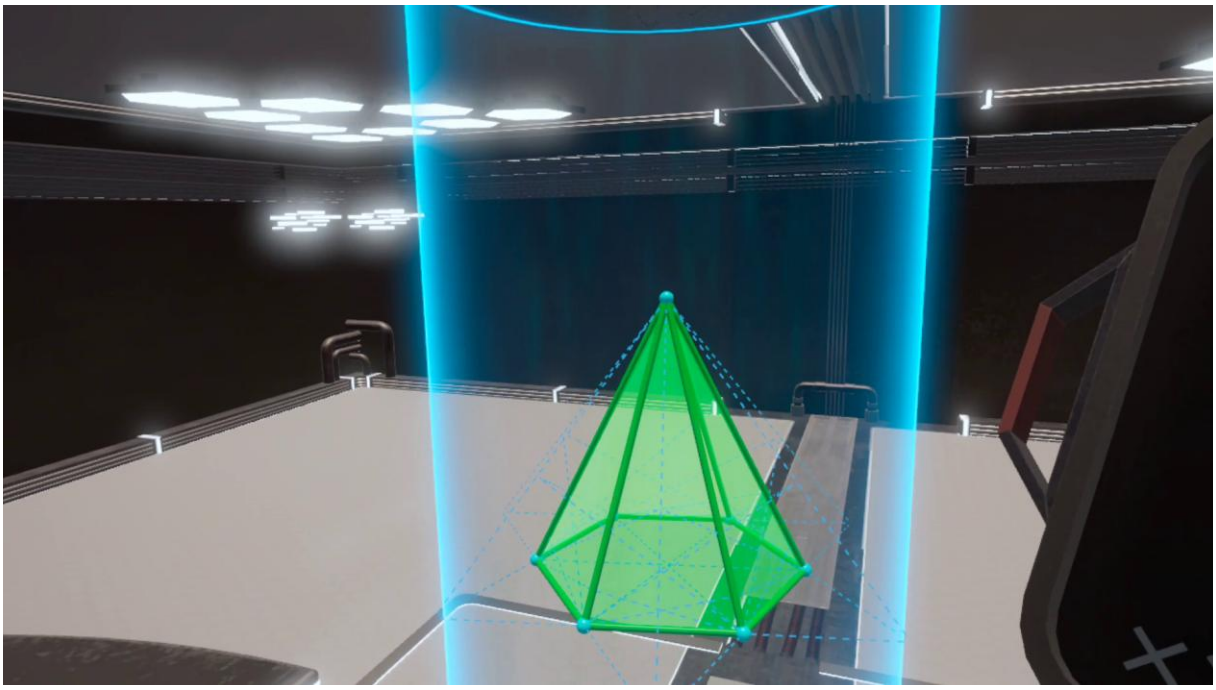



- • **Scenár lekcie 1: Uhly v kocke**
- • **Scenár lekcie 2: Výpočet dĺžky hrany, povrchu a objemu kocky**

## Modul 3: Uhly v ihlanoch

V tomto module sa študenti naučia identifikovať, vypočítať a pochopiť uhly v ihlanoch pomocou geometrických princípov. Nastavenie je podobné ako v predchádzajúcom module o uhloch v hranoloch, ale teraz sa pozornosť presúva na analýzu a manipuláciu s ihlanovými tvarmi. Študenti budú pracovať s rôznymi ihlanmi, skúmať rôzne úlohy pomocou interaktívnych funkcií, ako je režim učenia, režim testovania a režim príkladov. Prostredníctvom tohto modulu si študenti prehĺbia svoje chápanie priestorovej geometrie a rozvinú schopnosť vypočítať uhly medzi plochami, hranami a vrcholmi ihlanových telies.

Obrázok zobrazuje hologram šesťbokého ihlana.

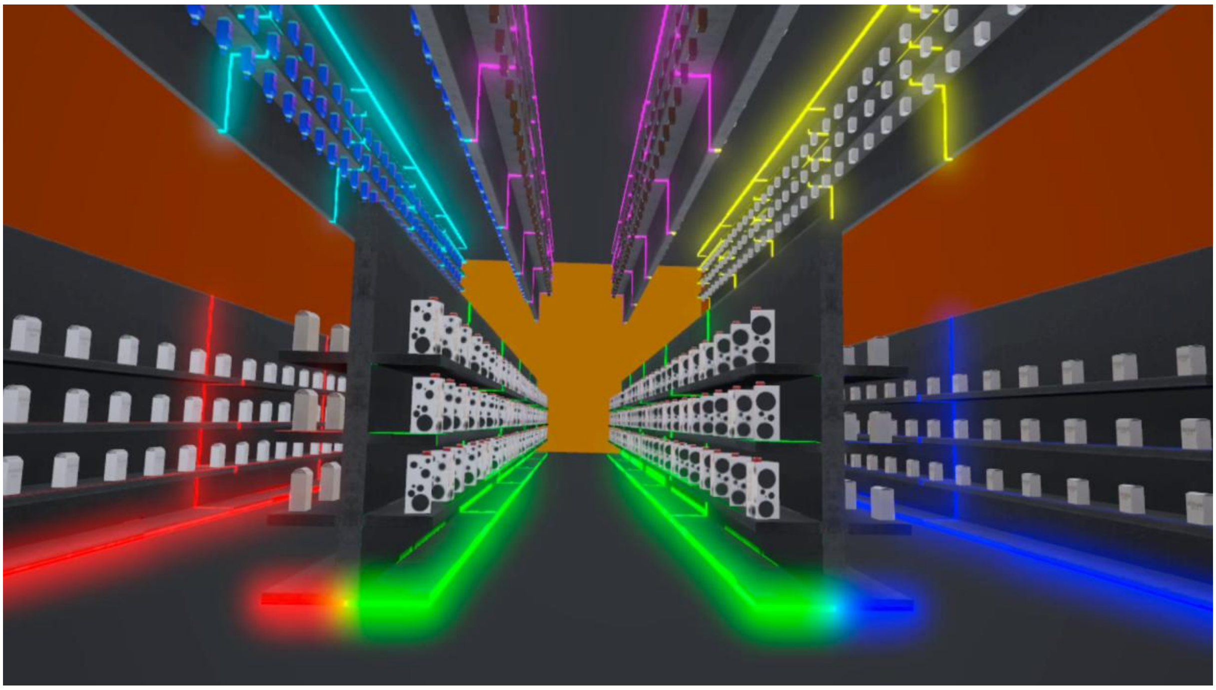


- **Scenár lekcie 1: Ihlany a výpočet ich povrchov**
- **Scenár lekcie 2: Uhly v ihlanoch**

## Modul 4: Neeuklidovská geometria

V tomto module študenti preskúmajú eliptickú geometriu, vetvu neeuklidovskej geometrie, ktorá odmieta Euklidov piaty postulát – postulát rovnobežnosti. V eliptickej geometrii sa akékoľvek dve čiary pretínajú v určitom bode, čo znamená, že koncept rovnobežných čiar neexistuje. To má hlboké dôsledky pre pochopenie tvarov a vzdialeností v zakrivených priestoroch, ako je povrch Zeme. Modul založený na VR umožňuje študentom zažiť eliptickú geometriu v praxi navigáciou cez budovu, kde cesty pripomínajú elipsy. Tento praktický prístup pomáha študentom vizualizovať a pochopiť vlastnosti a princípy neeuklidovskej geometrie v pohlcujúcom prostredí.

Obrázok zobrazuje modelovaný neeuklidovský priestor – „neeuklidovský obchod s potravinami“

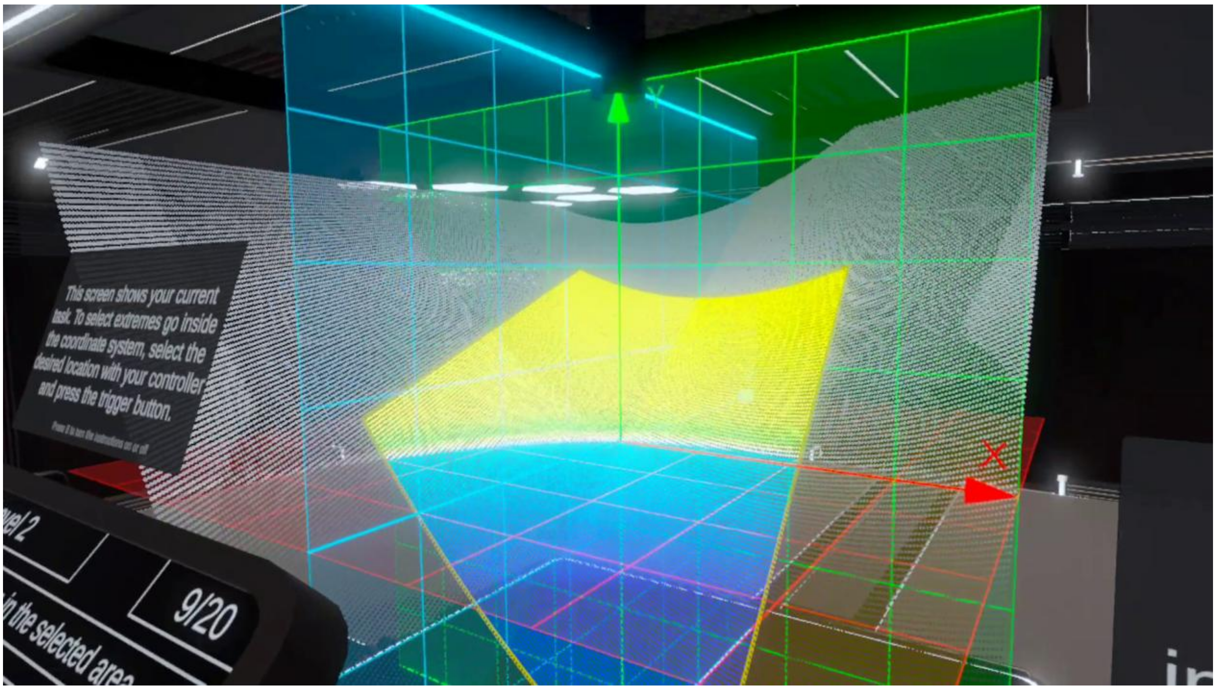


- **Scenár lekcie 1: Euklidovská geometria**
- **Scenár lekcie 2: Základy neeuklidovskej geometrie**

## Modul 5: Maximá a minimá funkcií

V tomto module sa študenti naučia nájsť globálne extrémy (maximálne aj minimálne hodnoty) funkcií dvoch alebo troch premenných. Úloha je prezentovaná interaktívnym spôsobom, kde je na centrálnej obrazovke zobrazený systém troch rovníc pre roviny x, y a z. Študenti musia identifikovať globálne extrémy umiestnením značiek (reprezentovaných ako gule) na 3D vizualizáciu povrchu vytvorenú rovnicami. Modul pomáha študentom pochopiť, ako interpretovať geometriu funkcií a identifikovať kritické body, kde funkcia dosahuje najvyššie alebo najnižšie hodnoty globálne, nielen lokálne.

Obrázok zobrazuje hologram grafu funkcie.

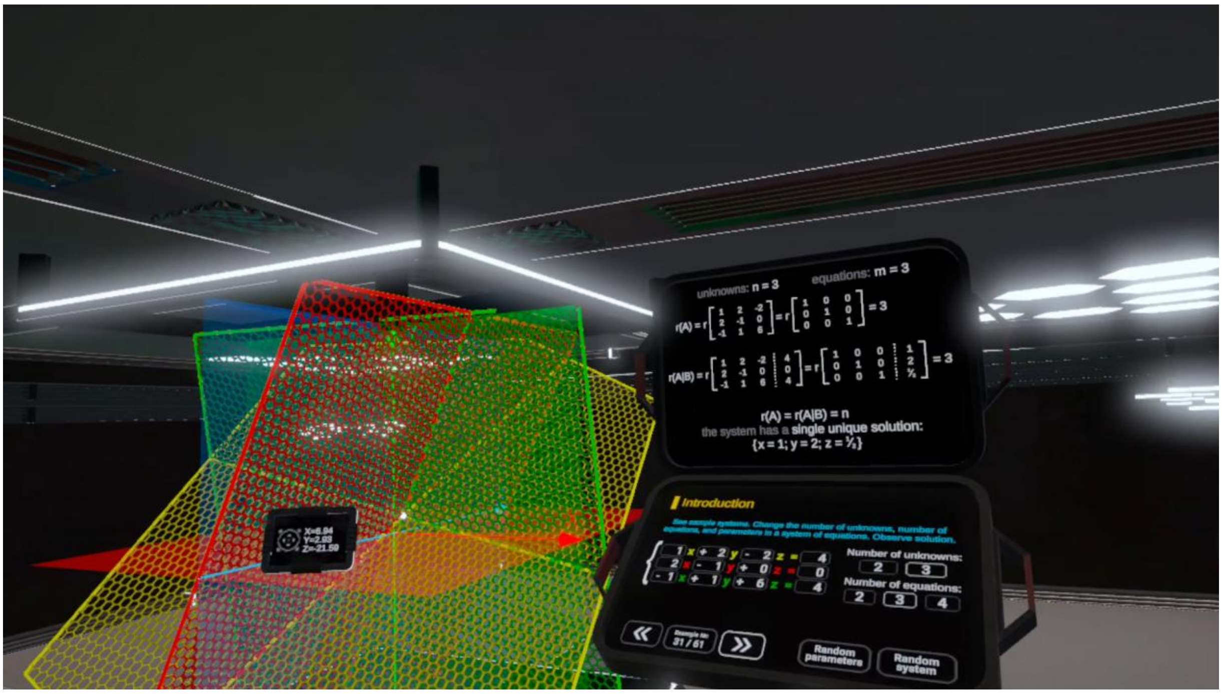



- **Scenár lekcie 1:** Lokálne minimum a maximum funkcie: definícia, geometrická interpretácia
- **Scenár lekcie 2:** Nutná a postačujúca podmienka pre existenciu extrému funkcie dvoch premenných

## Modul 6: Sústavy lineárnych rovníc

V tomto module študenti preskúmajú systémy lineárnych rovníc prostredníctvom interaktívnych vizualizácií. Na hlavnej obrazovke sa zobrazujú rovnice, ktoré študenti zadávajú pomocou rozhrania tabletu. Z tohto tabletu si študenti môžu vybrať z viac ako 60 vopred pripravených príkladov alebo upraviť parametre, ako sú premenné, rovnice a koeficienty. Okrem toho majú možnosť zadať náhodný systém alebo špecifické parametre, ako sú hodnoty x, y a z. Študenti môžu tiež upravovať počet neznámych alebo rovníc, čím poskytujú flexibilné prostredie pre začiatočníkov aj pokročilých pri riešení problémov. Sekundárny tablet zobrazuje matice, determinanty a riešenia týchto systémov a ponúka študentom príležitosť preskúmať, ako sa koncepty lineárnej algebry uplatňujú pri riešení systémov rovníc.

Obrázok zobrazuje hologram sústavy lineárnych rovníc.

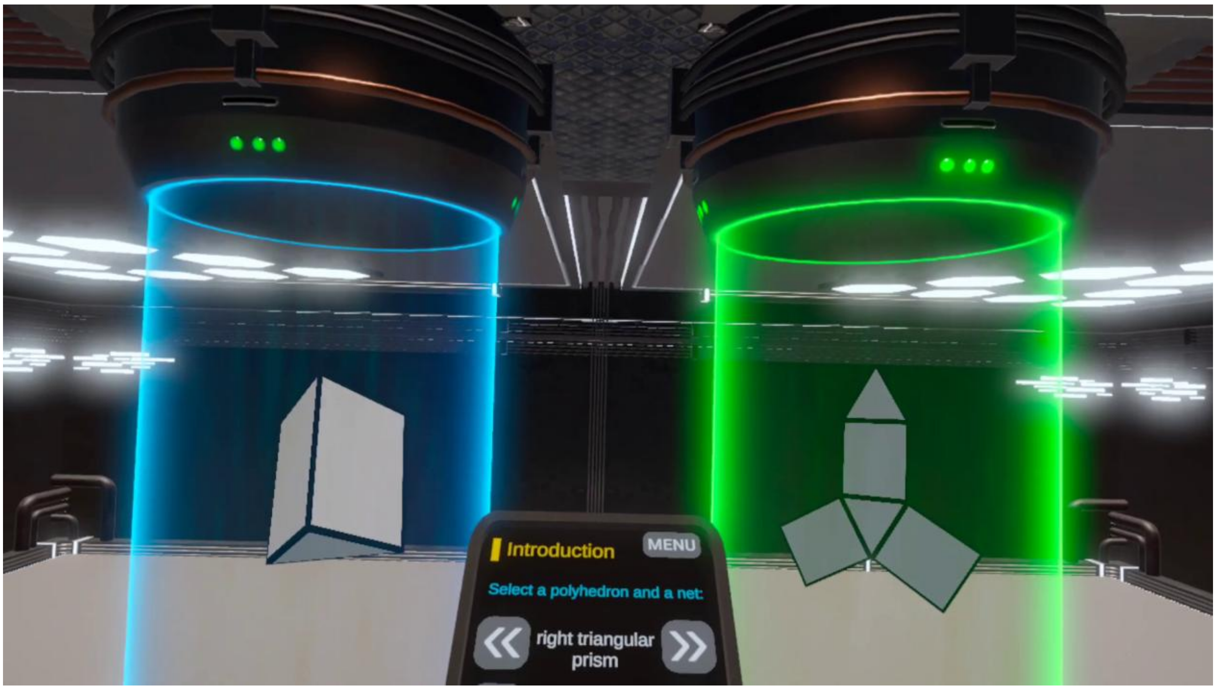



- **Scenár lekcie 1: Geometrická interpretácia lineárnych rovníc v priestore**
- **Scenár lekcie 2: Riešenie lineárnych rovníc**

## Modul 7: Hranoly

Tento modul sa zameriava na geometriu hranolov s osobitným dôrazom na pochopenie ich priestorového usporiadania v rámci znázornenia plášťa. Študenti budú sa tiež zaoberať úlohami zahŕňajúcimi plášte hranolov, pričom si budú vizualizovať, ako tieto telesá interagujú v štruktúrovanom usporiadaní.

Obrázok zobrazuje hologram hranola a jeho sieť.




- **Scenár lekcie 1:** Siete hranolov
- **Scenár lekcie 2:** Výpočet objemu a povrchu hranolov

## Modul 8: Ihlany

Tento modul sa zameriava na geometriu ihlanov s osobitným dôrazom na pochopenie ich priestorového usporiadania v rámci znázornenia plášťa. Študenti budú sa tiež zaoberať úlohami zahŕňajúcimi plášte ihlanov, pričom si budú vizualizovať, ako tieto telesá interagujú v štruktúrovanom usporiadaní

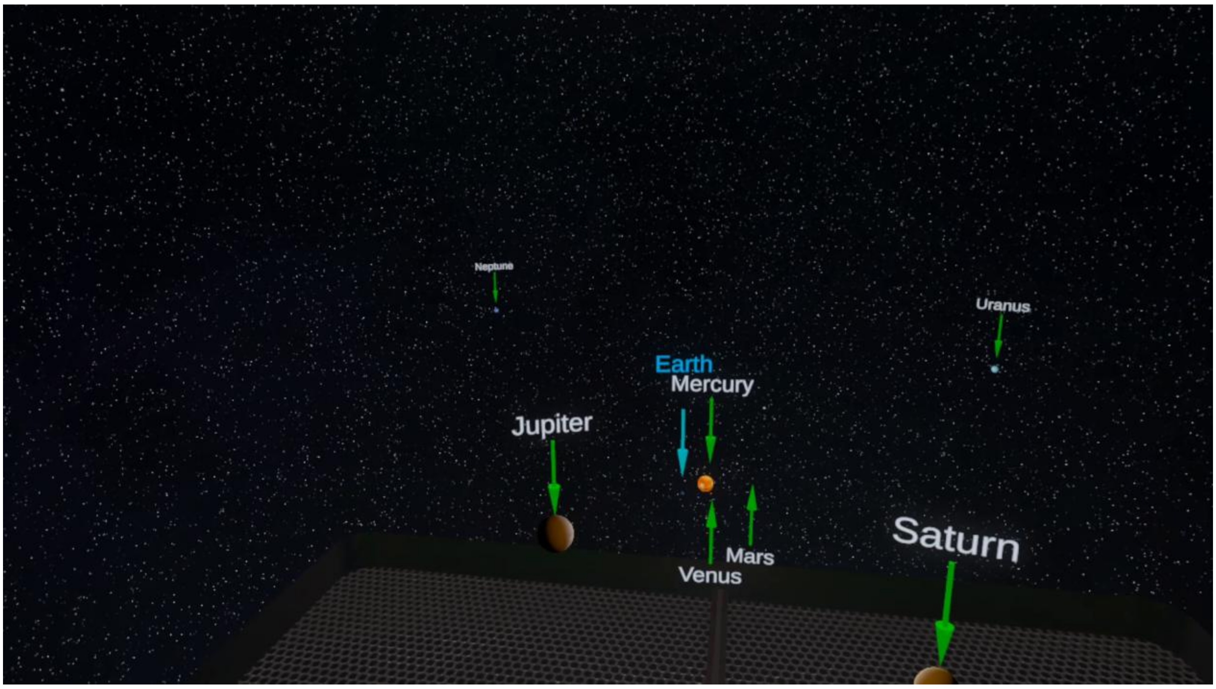
Obrázok zobrazuje hologram ihlanu a jeho sieť.


- **Scenár lekcie 1:** Siete ihlanov
- **Scenár lekcie 2:** Objem ihlanu

## Modul 9: Planetárny systém

Tento modul zoznamuje študentov s mechanikou a geometriou planetárnych systémov. Študenti budú skúmať, ako planéty obiehajú okolo centrálnej hviezdy, pričom sa zamerajú na súhru síl, trajektórií a tvarov obežných dráh. Pomocou interaktívnych nástrojov budú vizualizovať obežné dráhy planét v 3D priestore a upravovať parametre, ako sú polomer obežnej dráhy, excentricita a rýchlosť. Modul kladie dôraz na pochopenie základných zákonov pohybu planét, ako sú tie, ktoré opísal Kepler, bez toho, aby sa ponoril do príliš zložitej matematiky. Študenti uvidia, ako môžu byť obežné dráhy eliptické alebo kruhové a ako gravitácia riadi tieto pohyby.

Obrázok zobrazuje vizualizáciu planet Slnečnej sústavy.

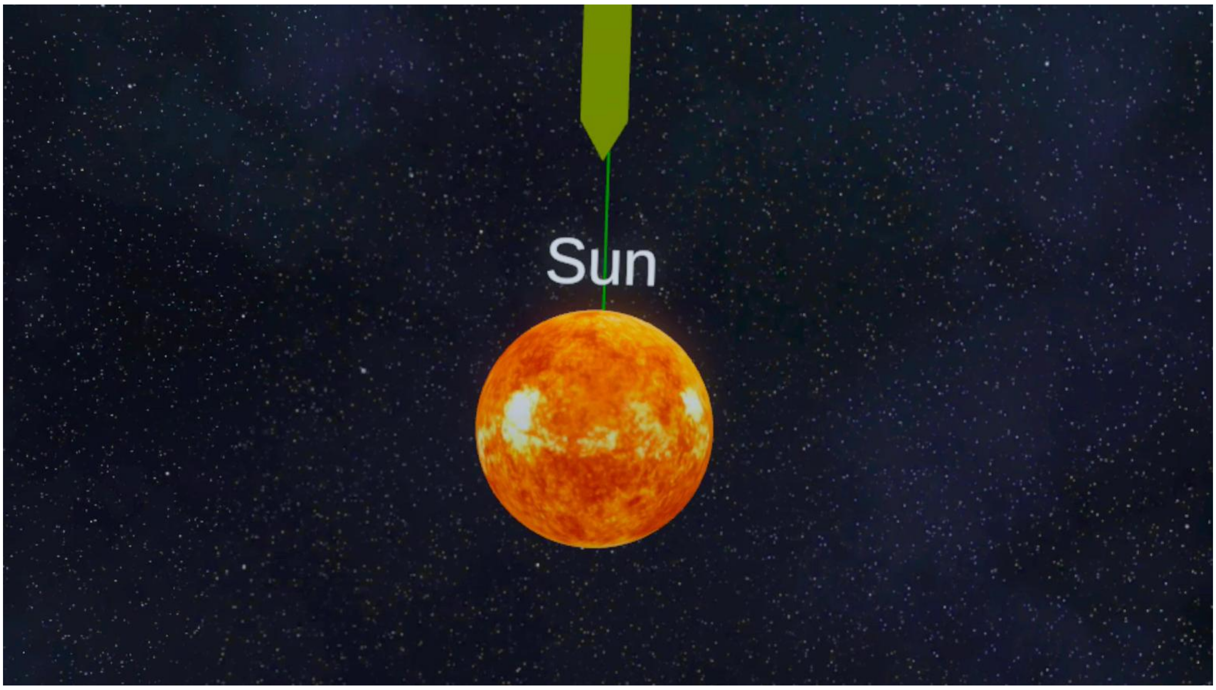



- **Scenár lekcie 1:** Vzdialenosti v Slnečnej sústave
- **Scenár lekcie 2:** Porovnávanie veličín v Slnečnej sústave

## Modul 10: Skúmanie slnečnej sústavy

Tento modul zoznamuje študentov so vzdialenosťami pri cestovaní vesmírom. Študenti budú skúmať slnečnú sústavu pohybom medzi planétami pomocou známych rýchlostí: 2. kozmická rýchlosť, najvyššia rýchlosť počas misie Apollo 11,rýchlosť slnečnej sondy Parker Solar Probe,1/100 rýchlosti svetla, rýchlosť svetla. Študenti sa dozvedia, ako dlho trvá cesta medzi planétami a ako na ne vplýva gravitácia. Cesta zo Slnka na Zem rýchlosťou svetla trvá vyše 8 minút a keď konečne uvidíme našu planétu, o chvíľu zmizne. To ukazuje, aká malá je Zem v porovnaní so vzdialenosťou medzi ňou a Slnkom.

Obrázok zobrazuje Slnko v Slnečnej sústave.

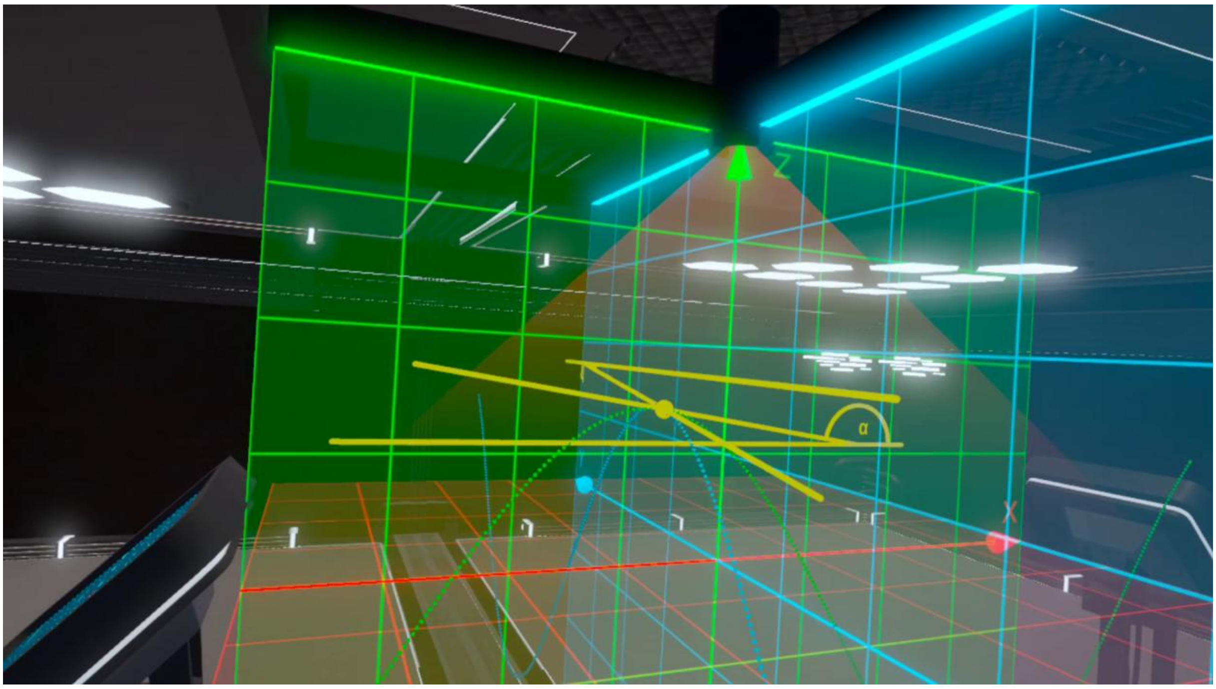



- **Scenár lekcie 1:** Výskum vesmíru – základné pojmy
- **Scenár lekcie 2:** Dobývanie vesmíru

## Modul 11: Geometrická interpretácia parciálnych derivácií

V tomto module študenti skúmajú geometrický význam parciálnych derivácií v matematickej analýze funkcií viacerých premenných. Derivácie v smere predstavujú rýchlosť zmeny funkcie v určitom smere, zatiaľ čo parciálne derivácie merajú zmeny pozdĺž jednej osi. Prostredníctvom interaktívnych 3D vizualizácií budú študenti pozorovať, ako sa mení sklon funkcie v závislosti od smeru a polohy. Modul umožňuje študentom manipulovať s povrchmi a vektormi, aby pochopili, ako sa tieto derivácie počítajú a aplikujú. Tento praktický prístup premosťuje priepasť medzi abstraktnými matematickými vzorcami a ich interpretáciami v reálnom svete.

Obrázok zobrazuje hologram grafu funkcie a vizualizáciu parciálnej derivácie

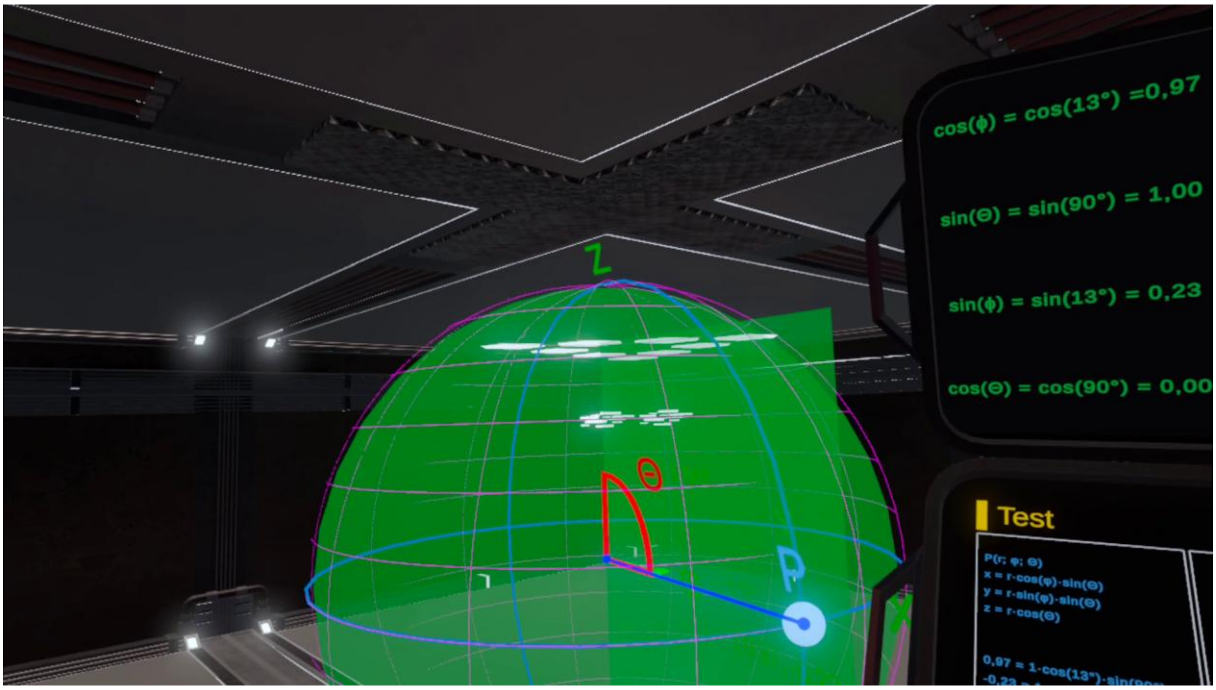



- **Scenár lekcie 1:** Geometrická interpretácia parciálnych derivácií
- **Scenár lekcie 2:** Výpočet parciálnych derivácií

## Modul 12: Sférické súradnice

V tomto module študenti preskúmajú koncept sférických súradníc, systém používaný na opis bodov v trojrozmernom priestore. Na rozdiel od karteziánskych súradníc určujú sférické súradnice polohu bodu pomocou troch hodnôt: radiálna vzdialenosť ($r$), polárny uhol ($\theta$) a azimutálny uhol ($\phi$). Tento súradnicový systém je obzvlášť užitočný pri úlohách so symetriou okolo centrálneho bodu, napríklad vo fyzike alebo inžinierstve. Modul obsahuje interaktívne vizualizácie, kde môžu študenti manipulovať s týmito parametrami, aby videli, ako sa mení poloha bodu v 3D priestore. Okrem toho si precvičia prevod medzi karteziánskymi a sférickými súradnicami a riešenie problémov, ktoré zahŕňajú integráciu funkcií cez sférické oblasti.

Obrázok zobrazuje hologram s vizualizáciou sférických súradníc.

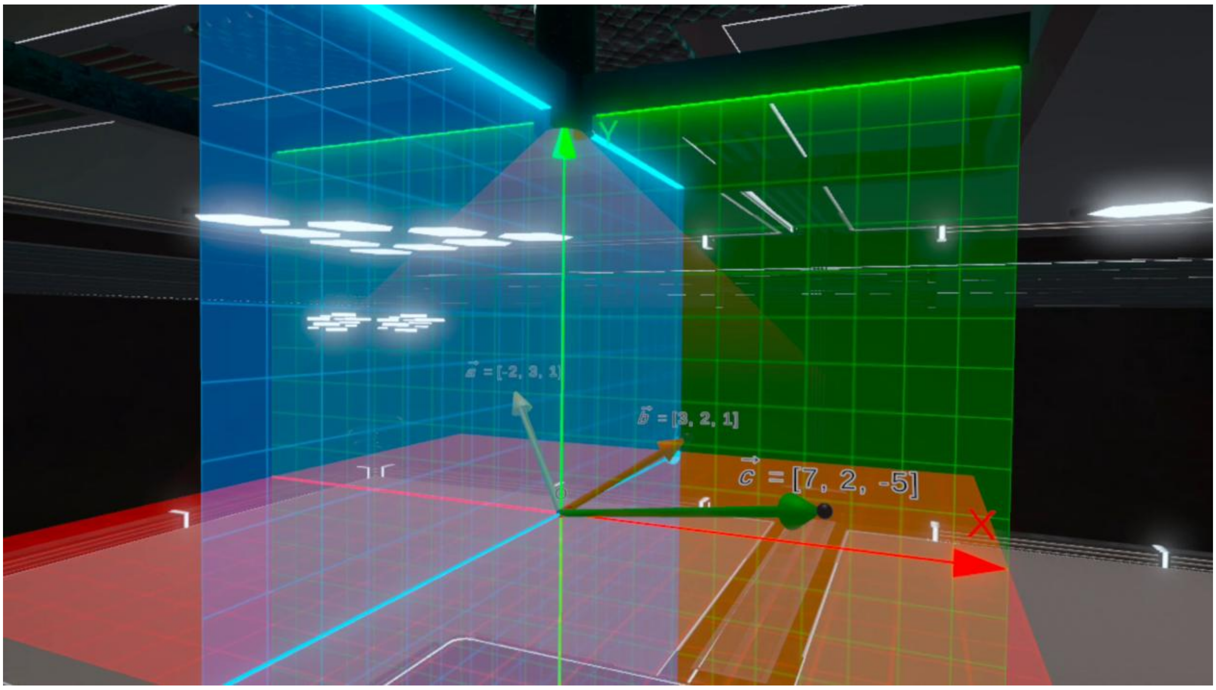



- **Scenár lekcie 1:** Polárne súradnice
- **Scenár lekcie 2:** Sférické súradnice

## Modul 13: Vektory a operácie s vektormi

Tento modul zoznamuje študentov s vektormi a základnými operáciami, ktoré sa s nimi vykonávajú. Vektory sú matematické objekty s veľkosťou aj smerom, čo z nich robí základné nástroje na popis fyzikálnych veličín a priestorových vzťahov. Študenti preskúmajú základné vektorové operácie, ako je sčítanie, odčítanie, skalárne násobenie a normalizácia a naučia sa, ako vypočítať veľkosť vektora. Modul poskytuje interaktívne vizualizácie, kde môžu študenti manipulovať s vektormi v 2D a 3D priestoroch, pozorovať efekty operácií a porozumieť ich geometrickým interpretáciám.

Obrázok zobrazuje hologram vektorov v 3D priestore.




- **Lesson scenario 1:** Geometric interpretation of vectors in three-dimensional space, operations on vectors
- **Lesson scenario 2:** Scalar product, vector product in three-dimensional space

# Modul 1: Trajektórie

## Scenáre lekcií s aplikáciami VR

### Scenár lekcie 1

#### Názov lekcie

Grafy goniometrických funkcií jednej premennej

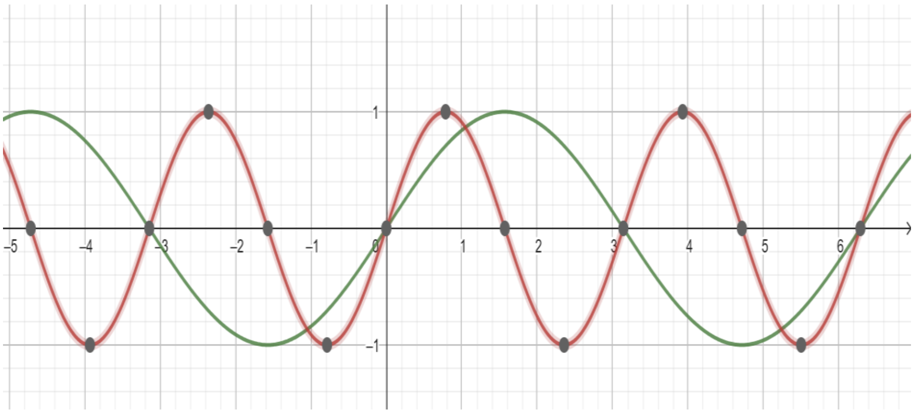
#### Výstupy vzdelávania

- Vykreslenie grafu funkcie $f(x) = a\sin(x - b) + c$.
- Interpretácia parametrov $a, b, c$ funkcie $f(x) = a\sin(x - b) + c$.

#### Priebeh vyučovacej hodiny

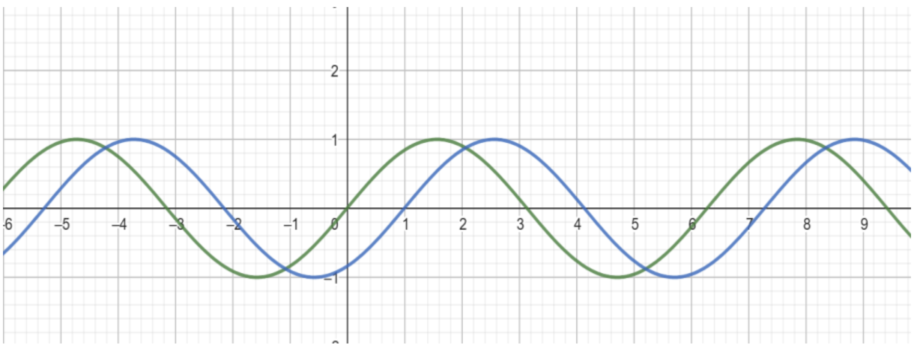
#### Krok 1

Nakreslite grafy funkcií $\sin(x)$ a $\sin(2x)$. Diskutujte o tom, ako koeficient $a$ ovplyvňuje graf funkcie $f(x) = \sin(ax)$.



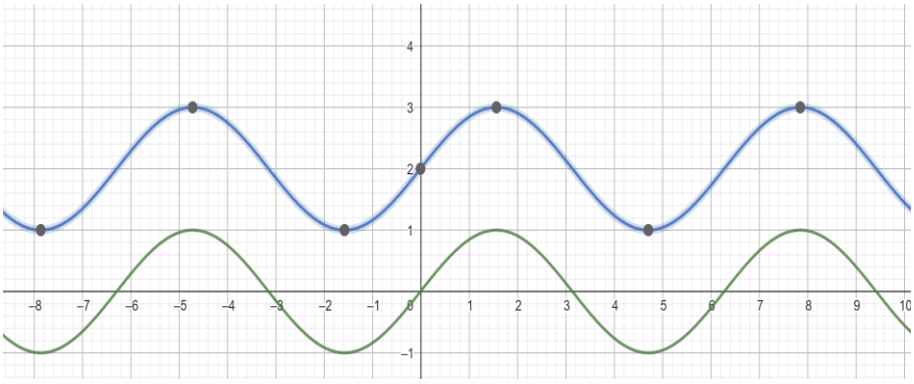

#### Krok 2

Nakreslite grafy funkcií $\sin(x)$ a $\sin(x - 1)$. Diskutujte o tom, ako koeficient $a$ ovplyvňuje graf funkcie $f(x) = \sin(x - \mathrm{a})$.



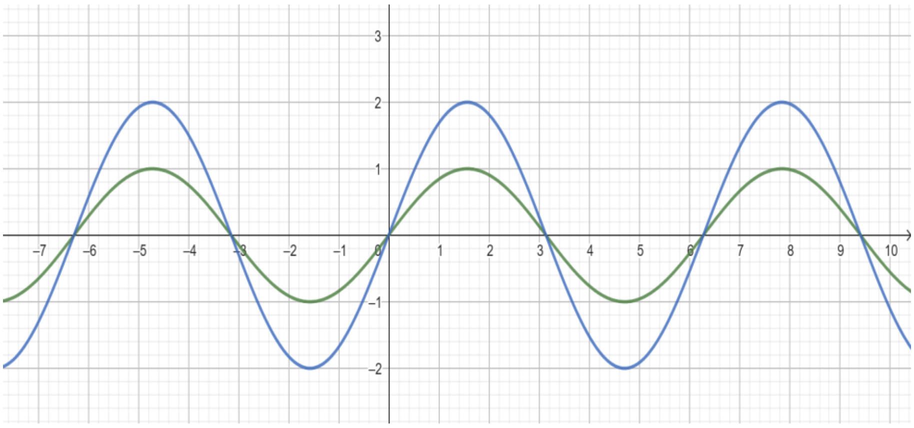
### Krok 3.

Nakreslite grafy funkcií $\sin(x)$ a $\sin(x) + 2$. Diskutujte o tom, ako koeficient $a$ovplyvňuje graf funkcie $f(x) = \sin(x) + a$.




### Krok 4.

Nakreslite grafy funkcií $\sin(x)$ a $2 \cdot \sin(x)$. Diskutujte o tom, ako koeficient $a$ovplyvňuje graf funkcie $f(x) = a \cdot \sin(x)$.




### Krok 5.

Opakujte kroky 1, 2, 3 a 4 pre funkciu $\cos(x)$.

### Krok 6.

Nakreslite graf funkcie $f(x) = 2\sin(x - 1) + 2$.

### Aké otázky by sa mali položiť, aby sa študenti mohli zamyslieť nad študovaným problémom?

Ako sa mení množina hodnôt funkcie $f(x) = a\sin(x - b) + c$ v závislosti od parametrov $a, b, c$ ?

## Scenár lekcie 2

### Názov lekcie

Vektorové funkcie

## Výsledky vzdelávania

- Používanie vektorovej funkcie.
- Analýza vektorových funkcií.

## Priebeh vyučovacej hodiny

### Krok 1

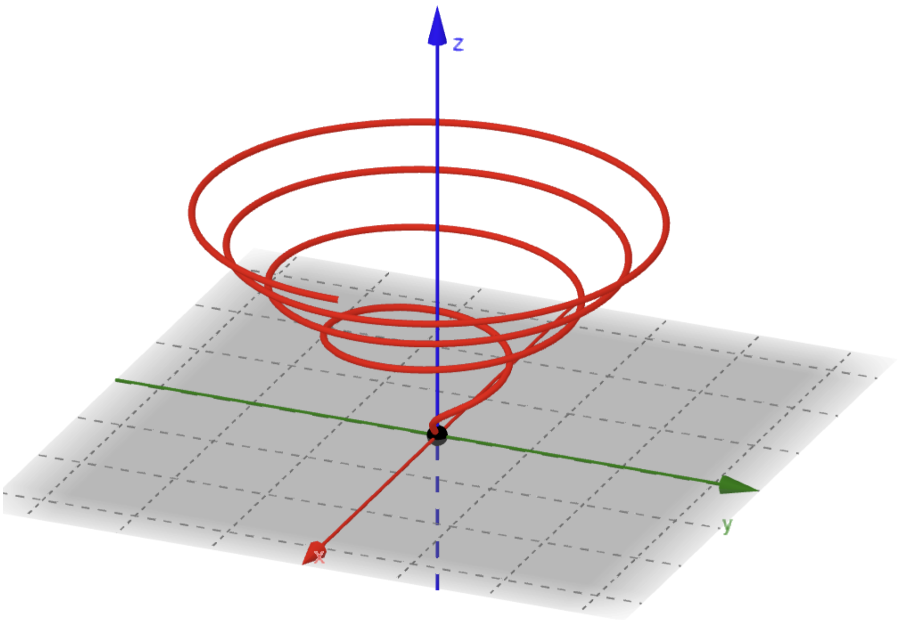
Zavedenie definície vektorovej funkcie s tromi súradnicami.

Vektorová funkcia s tromi súradnicami sa nazýva funkcia tvaru $f(t) = [x(t), y(t), z(t)]$, kde $x(t), y(t), z(t)$sú skalárne funkcie premennej $t$.

Príklady funkcií.

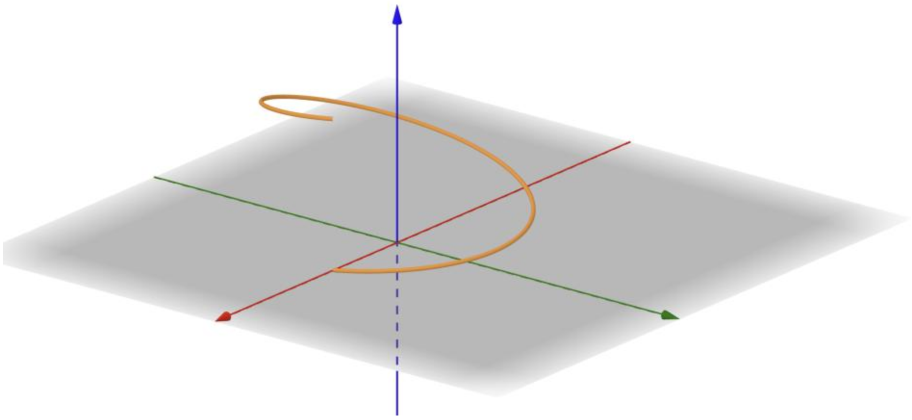
### Krok 2

Funkcia je daná parametricky $[t, \sqrt{t}\sin(t), \sqrt{t}\cos(t)]$, kde $t$ je ľubovoľné reálne číslo.



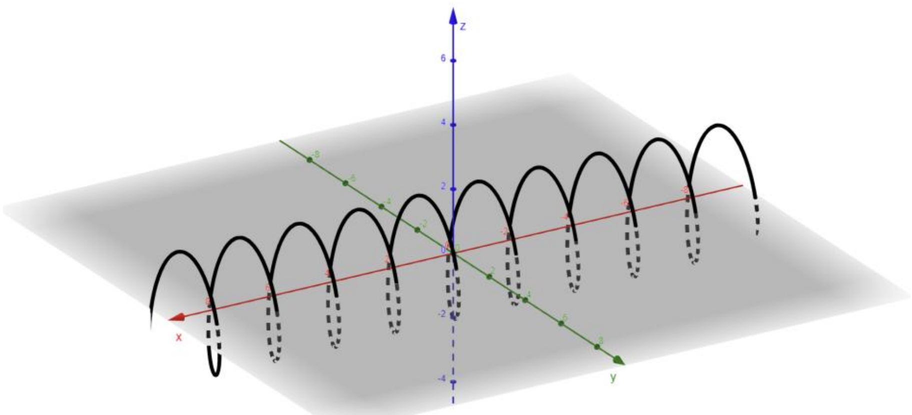
### Krok 3.

Funkcia je daná parametricky $[2\cos(t), 3\sin(t), t]$, kde $t$ je ľubovoľné reálne číslo.



### Krok 4.

Funkcia je daná parametricky $[t, \sin(\pi t), \cos(\pi t)]$, kde $t$ je ľubovoľné reálne číslo.




### Krok 5.

Nakreslite graf funkcie $[t, 0, t^2]$.

### Krok 6.

Analyzujte funkciu $[t, a_1\sin(t) + b_1\cos(t), a_2\sin(t) + b_2\cos(t)]$.

### Aké otázky by sa mali položiť, aby sa študenti mohli zamyslieť nad študovaným problémom?

Ako zaviesť koncept funkcie, ktorej hodnoty sú $n$-rozmerné vektory?

## Návrhy a tipy pre učiteľov

1. Otázka pre študentov: Ako zaviesť pojem derivácia vektorovej funkcie?
2. Otázka pre študentov: Ako zaviesť pojem vektorová funkcia dvoch premenných?
3. Predstavte pojem rotácie vektorovej funkcie a ukážte jej aplikácie.

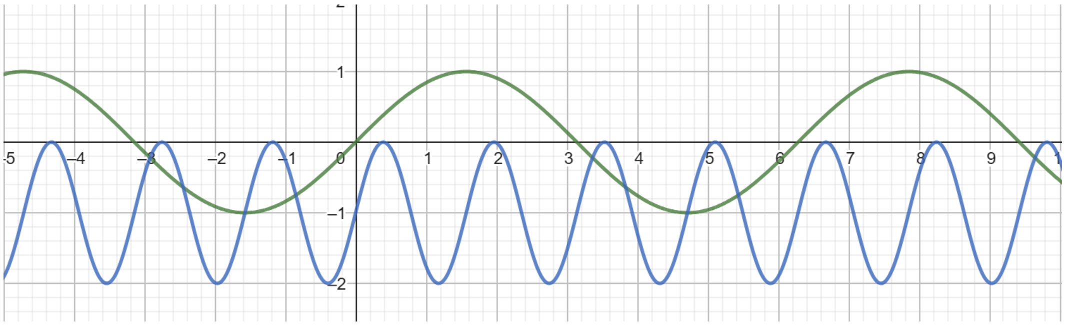
4. Na kreslenie vektorových funkcií môžete použiť program WOLFRAM.

## Pracovné listy pre žiakov

### Cvičenie 1.

Nakreslite graf funkcie $f(x) = \sin(4x) - 1$.

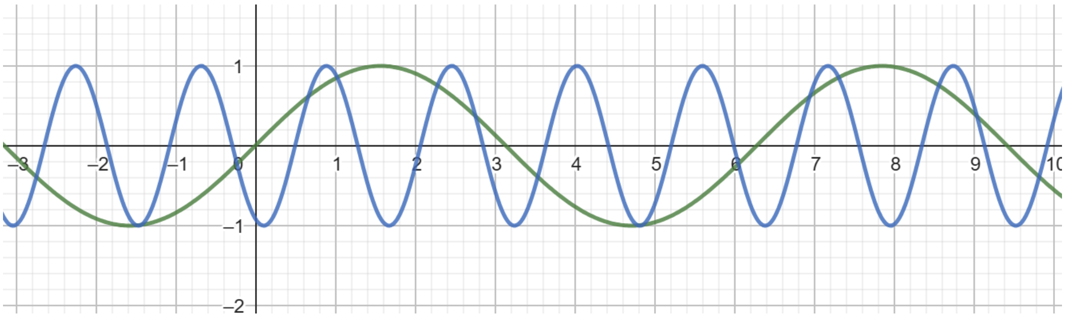
Riešenie




### Cvičenie 2.

Nakreslite graf funkcie $f(x) = \sin(4x - 2)$.

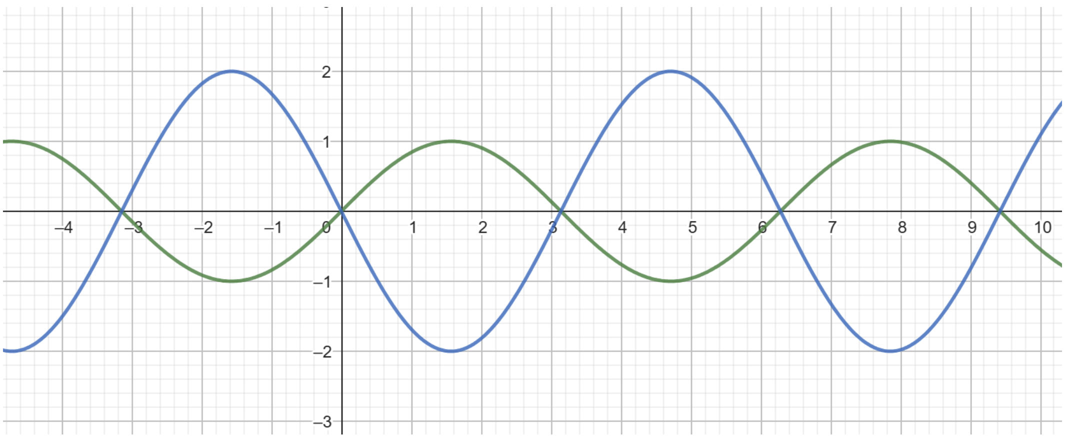
Riešenie




### Cvičenie 3.

Nakreslite graf funkcie $f(x) = -2\sin(x)$.

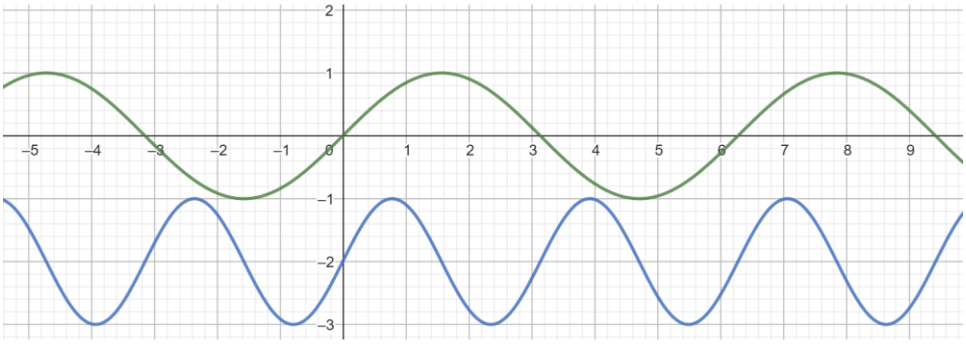
Riešenie



## Cvičenie 4.

Nakreslite graf funkcie $f(x) = -\sin(2x) + 1$.

### Riešenie




## Cvičenie 5.

Určte definičný obor vektorovej funkcie $f(t) = [\sqrt{t}, t, \frac{1}{t-2}]$.

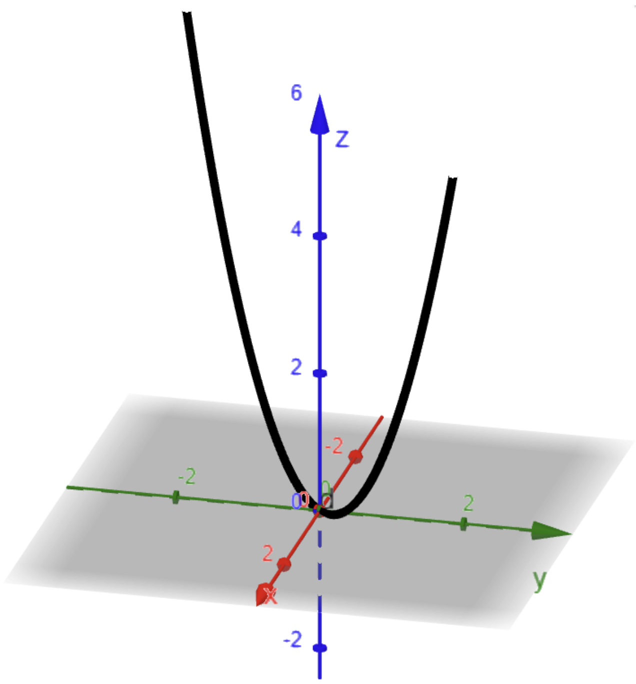
### Riešenie

$t \in < 0,2) \cup (2, \infty)$.

## Cvičenie 6.

Nakreslite graf vektorovej funkcie $f(t) = [t, t, t^2]$pre $t \in < -3,3 >$.

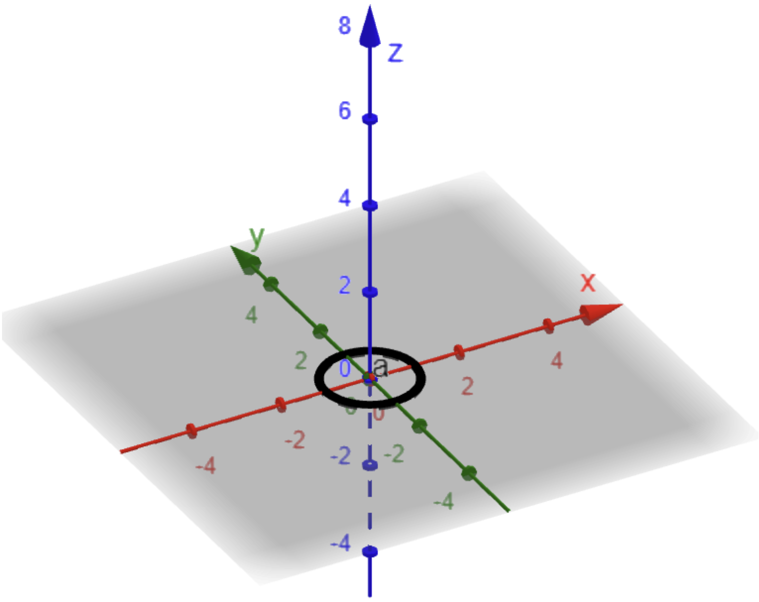
### Riešenie




## Cvičenie 7.

Nakreslite graf vektorovej funkcie $f(t) = [\sin(t), \cos(t), 0]$pre $t \in < 0,2\pi >$.

Riešenie




## Cvičenie 8.

Vypočítajte hodnotu vektorovej funkcie $f(t) = [t, 2\sin(t) + \cos(t), \sin(t) - \cos(t)]$ pre $t = 0$.

Riešenie

$f(t) = [0,1,-1]$.

# Modul 2: Uhly v hranoloch

## Scenáre lekcií s aplikáciami VR

### Scenár lekcie 1

#### Názov lekcie

Uhly v hranoloch

#### Výstupy vzdelávania

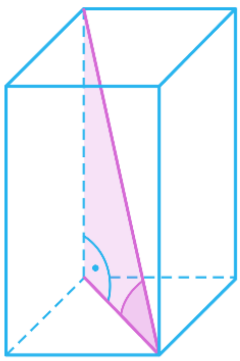
- Rozpoznáva uhly v hranoloch.

#### Priebeh vyučovacej hodiny

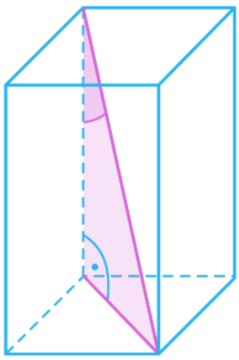
#### Krok 1

Zavedenie definícií.

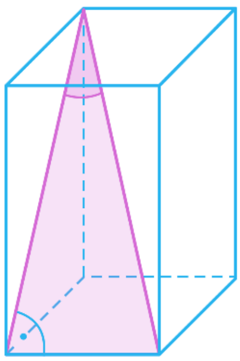
Uhol medzi uhlopriečkou hranola a uhlopriečkou jeho základne.



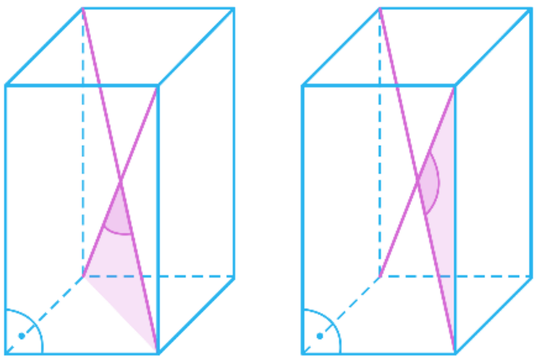
Uhol medzi uhlopriečkou hranola a jeho bočnou hranou.



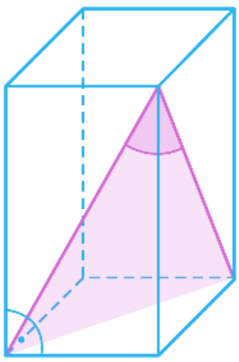
Uhol medzi uhlopriečkou hranola a uhlopriečkou bočnej plochy.



Uhol medzi uhlopriečkami hranola.

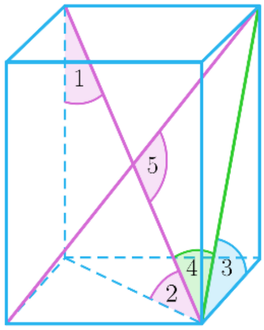


Uhol medzi uhlopriečkami susedných bočných stien.



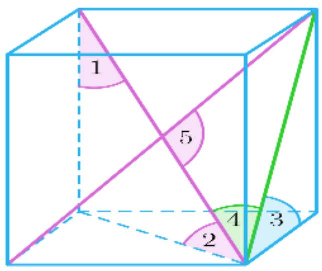
## Krok 2

Pomenujte každý uhol: 1, 2, 3, 4 a 5.



Krok 3.

Určte veľkosti všetkých uhlov kocky.




Aké otázky by sa mali položiť, aby sa študenti mohli zamyslieť nad študovaným problémom?

Aký je rozsah hodnôt uhla 1, 2, 3 a 4 v hranole? Aká je najmenšia a najväčšia hodnota uhla?

## Scenár lekcie 2

### Názov lekcie

Výpočet dĺžky hrany, povrchu a objemu v hranole

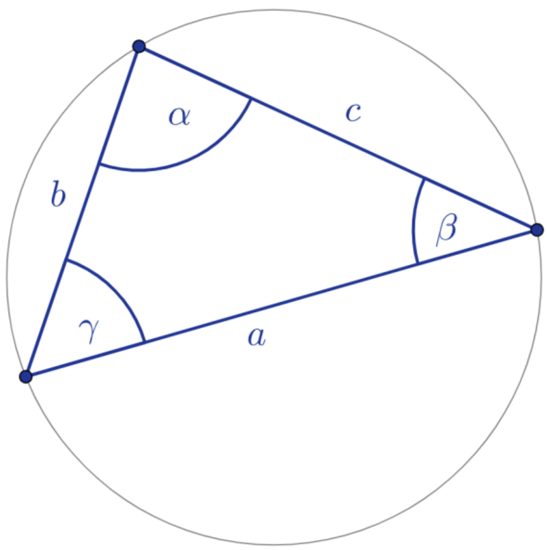
### Výsledky vzdelávania

- Používa uhly v hranole na výpočet: dĺžky hrany, plochy povrchu, objemu.

### Priebeh vyučovacej hodiny

Krok 1

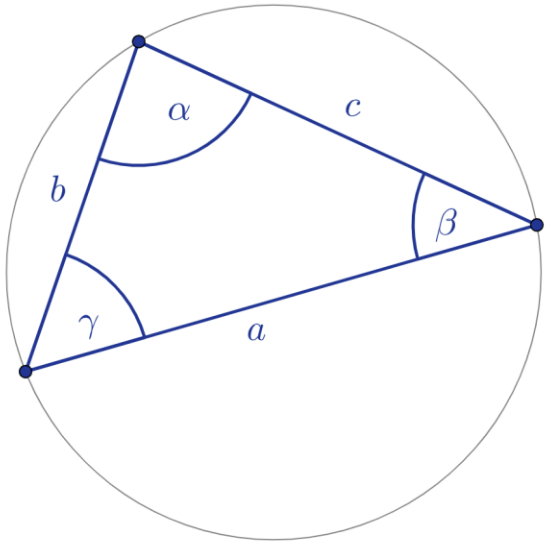
Pripomienka sínusovej vety.



$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}$$

## Krok 2

Pripomienka kosínusovej vety.




$$a^2 = b^2 + c^2 - 2ab\cos(\alpha)$$

Dokončite zostávajúce závislosti:

$$b^2 = a^2 + \dots.^2 - 2\dots\cos(\dots)$$

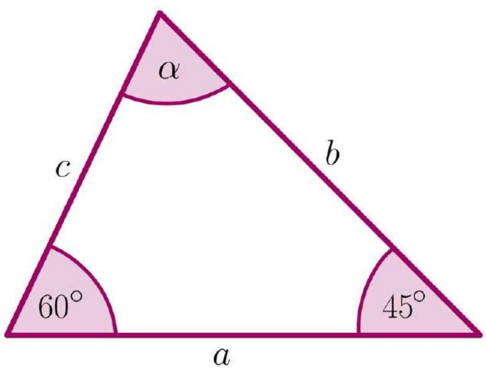
$$c^2 = a^2 + \dots.^2 - 2\dots\cos(\dots)$$

## Krok 3.

Výpočty pomocou sínusovej a kosínusovej vety.

## Cvičenie 1.

Vypočítajte dĺžku strany $b$, ak $c = 5$.

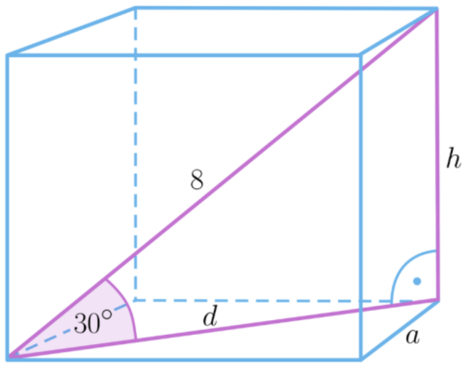


Krok 4.

Výpočty dĺžky hrany, povrchu a objemu v hranole.

Cvičenie 2.

Vypočítajte celkový povrch a objem hranola, ak je základňa štvorcová.




Aké otázky by sa mali položiť, aby sa študenti mohli zamyslieť nad študovaným problémom?

V akých situáciách sa používa sínusová a v akých situáciách kosínusová veta?

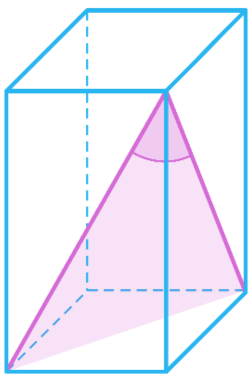
## Návrhy a tipy pre učiteľov

1. Otázka pre študentov: Je možné dokázať Pytagorovu vetu pomocou kosínusovej vety?
2. Otázka pre študentov ako vlastná práca: Ako sa v architektúre používajú uhly v hranoloch?
3. Je možné zostrojiť hranol, v ktorom sú všetky uhly medzi bočnými hranami a základňami rovnaké? Odôvodnite.
4. Na trigonometrické výpočty môžete použiť program WOLFRAM.

## Pracovné listy pre žiakov

### Cvičenie 1.

Uveďte názov uhla.



Riešenie

Uhol medzi uhlopriečkami bočných plôch hranola.

## Cvičenie 2.

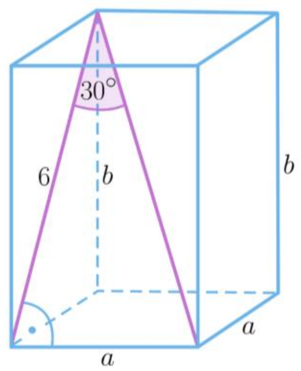
Vypočítajte objem hranola pre $\alpha = 45°$.

Riešenie

$V = 48\sqrt{2}$.

## Cvičenie 3.

Objem hranola znázorneného na obrázku je $48\sqrt{3}$. Vypočítajte rozmery hranola.

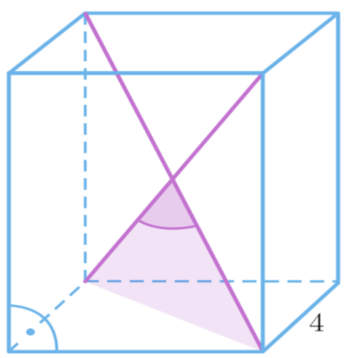



Riešenie

$a = 2\sqrt{6}$, $b = 2\sqrt{3}$.

## Cvičenie 4.

Dĺžka strany kocky je $4$. Určte kosínusovú mieru uhla vyznačeného na obrázku.



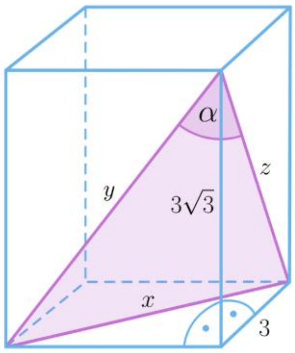

Riešenie

$\cos(\alpha) = \frac{-2}{3}$.

## Cvičenie 5.

Základňa hranola znázorneného na obrázku je 3 x 3 a bočná hrana je $3\sqrt{3}$. Určte veľkosť uhla medzi uhlopriečkami susedných bočných plôch hranola.

Riešenie

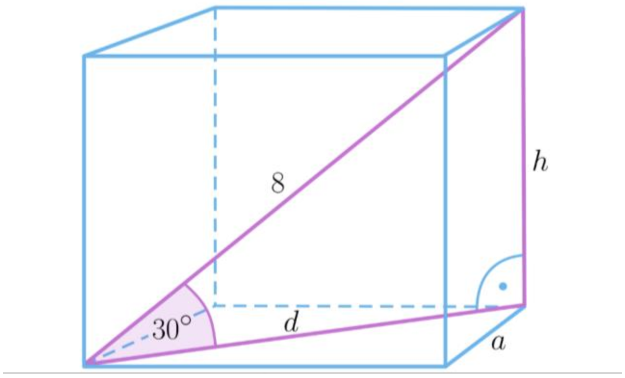



Všimnite si, že $y = x$ a $x = 3\sqrt{2}$. Použitím kosínusovej vety pre trojuholník so stranami $x, y, z$ dostaneme $\cos(\alpha) = \frac{45}{72}$.

## Cvičenie 6.

Uhlopriečka hranola so štvorcovou základňou má dĺžku 8 a zviera s rovinou základne uhol 30°. Vypočítajte rozmery hrán hranola.

Riešenie

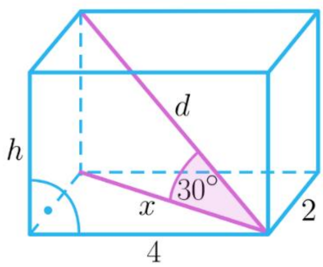



$\frac{h}{8} = \sin(30°) = \frac{1}{2}$, teda $h = 4$a $d = 4\sqrt{3}$. Preto $a = 2\sqrt{6}$.

## Cvičenie 7.

Dĺžky hrán hranola sú $4, 2, h$. Určte dĺžku uhlopriečky hranola, ak uhol medzi telesovou uhlopriečkou a uhlopriečkou podstavy je 30°.

Riešenie

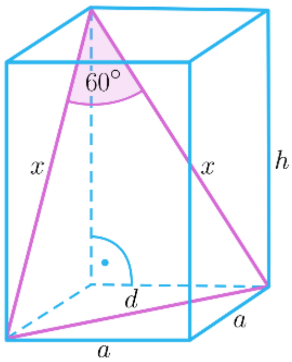



Pomocou Pytagorovej vety určíme $x = 2\sqrt{5}$. Keďže $\frac{x}{d} = \cos(30°)$, tak $d = \frac{4}{3}\sqrt{15}$.

## Cvičenie 8.

Je daný hranol so štvorcovou podstavou. Dokážte, že hranol je kocka, ak uhol medzi uhlopriečkami susedných stien je 60°.

### Riešenie




Trojuholník so stranami $x, x, d$ je rovnostranný, teda $x = a\sqrt{2}$. Pomocou Pytagorovej vety pre trojuholník so stranami $x, a, h$ dostaneme, že $h = a$.

# Modul 3: Uhly v ihlanoch

## Scenáre lekcií s aplikáciami VR

### Scenár lekcie 1

#### Názov lekcie

Ihlany a ich povrchy

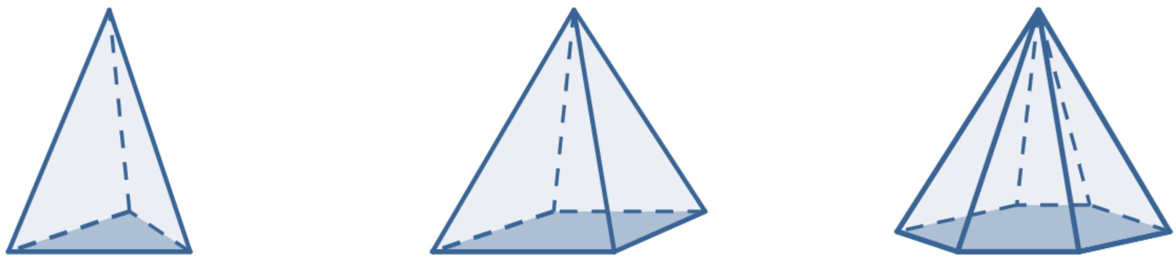
#### Výstupy vzdelávania

- Určuje objem a povrch ihlana .

#### Priebeh vyučovacej hodiny

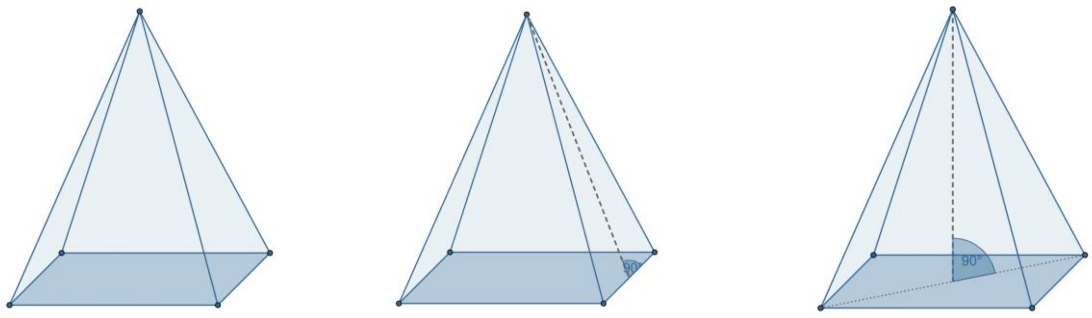
#### Krok 1

Zavedenie definície základných ihlanov rozdelených podľa tvaru podstavy.



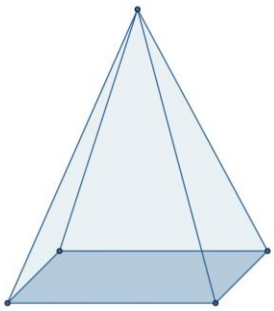
#### Krok 2

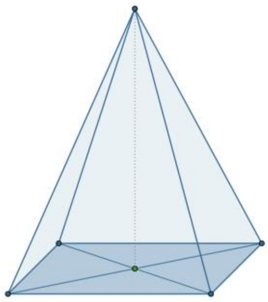
Kreslenie výšky bočnej steny a výšky ihlana.



### Krok 3.

Kreslenie uhlopriečok podstavy ihlana.





### Krok 4.

Diskusia o vzorcoch pre povrch ihlana.

Aké otázky by sa mali položiť, aby sa študenti mohli zamyslieť nad študovaným problémom?

Aký je pomer objemu hranola k objemu ihlana s rovnakými podstavami a rovnakými výškami?

## Scenár lekcie 2

### Názov lekcie

Uhly v ihlanoch

### Výsledky vzdelávania

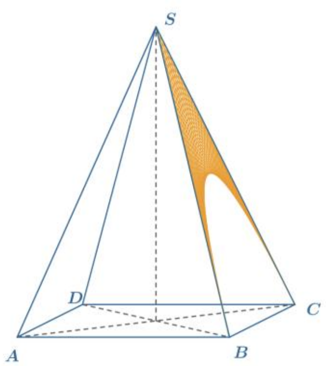
- Rozpoznáva uhly v ihlanoch.

### Priebeh vyučovacej hodiny

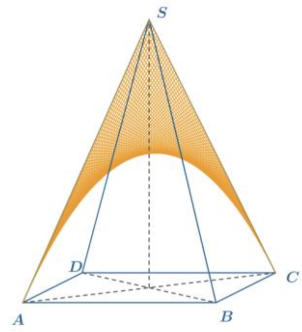
### Krok 1

Zavedenie definície uhlov medzi hranami v ihlane.

Uhol medzi bočnými stenami.

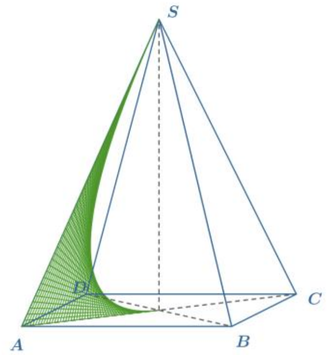


Uhol medzi protiľahlými bočnými stenami.

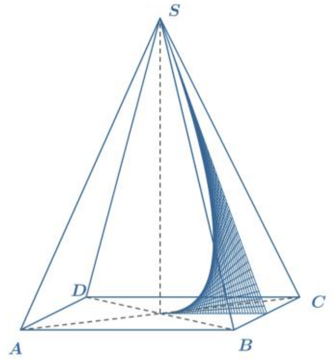



Krok 2

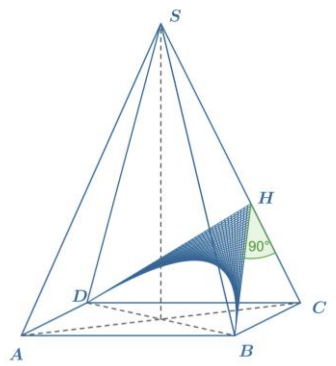
Predstavujeme definíciu zostávajúcich uhlov v ihlane.




Uhol bočnej steny s podstavou.



Uhol medzi susednými bočnými stenami.




Krok 3.

Určenie veľkosti všetkých uhlov v štvorstene.

Aké otázky by sa mali položiť, aby sa študenti mohli zamyslieť nad študovaným problémom?

Ako určiť polomer gule opísanej štvorstenu?

## Návrhy a tipy pre učiteľov

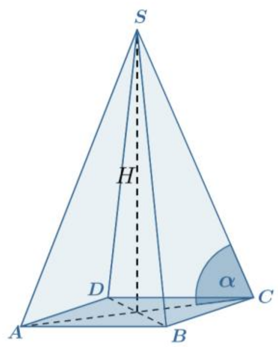
1. Návrh pre študentov: ihlan sa nazýva pravidelný, ak sú jeho bočné hrany rovnaké.
2. Návrh pre študentov: ihlan sa nazýva pravidelný štvorsten, ak všetky jeho steny sú rovnostranné trojuholníky.
3. Otázka pre žiakov: Nakreslite siete ihlanov.
4. Na výpočet objemu ihlanov môžete použiť program WOLFRAM.

## Pracovné listy pre žiakov

### Cvičenie 1.

Je daný pravidelný štvorboký ihlan. Dĺžka hrany podstavy je 6 a výška je $3\sqrt{2}$. Vypočítajte uhol medzi bočnou stenou a podstavou.

Riešenie

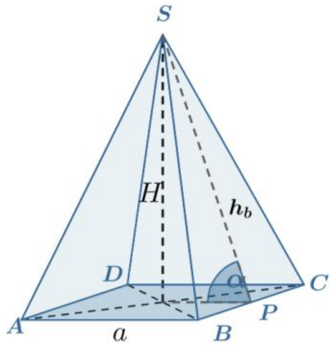


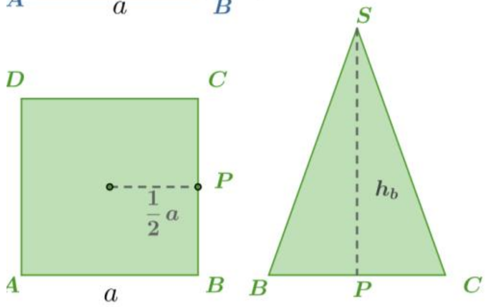
$|\overline{AC}| = 6\sqrt{2}$. $\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{H}{\frac{|AC|}{2}} = 1$. Preto $\alpha = 45°$.

## Cvičenie 2.

Je daný pravidelný štvorboký ihlan. Dĺžka hrany podstavy je 6 a výška je $3\sqrt{2}$. Vypočítajte tangens uhla medzi bočnou stenou a podstavou.

### Riešenie



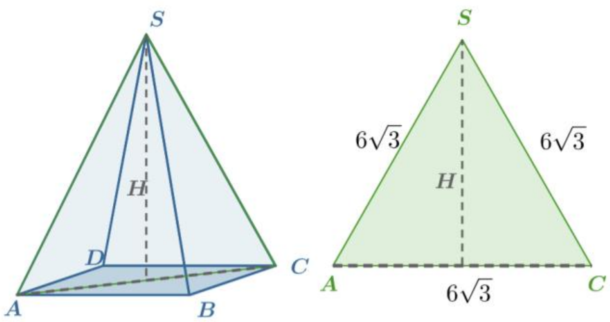




$\mathrm{tg}(\alpha) = \frac{H}{\frac{1}{2}a} = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$.

## Cvičenie 3.

Je daný pravidelný štvorboký ihlan. Dĺžka hrany podstavy je $3\sqrt{6}$ a dĺžka bočných hrán je $6\sqrt{3}$. Vypočítajte výšku ihlana.

### Riešenie

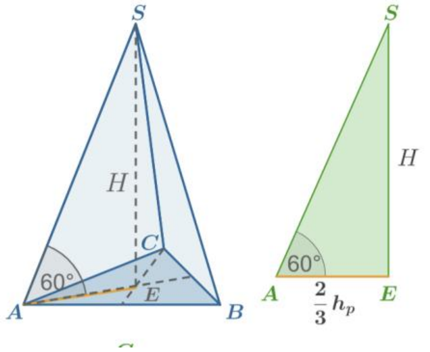



$H = 9$.

## Cvičenie 4.

Je daný pravidelný trojboký ihlan. Dĺžka hrany podstavy je $a = 3\sqrt{3}$ a uhol medzi bočnou hranou a podstavou je 60°. Vypočítajte výšku ihlana.

### Riešenie




$h_p = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{2}$. Preto $H = \frac{2}{3}h_p \mathrm{tg}(60°) = 3\sqrt{3}$.

## Cvičenie 5.

Vypočítajte výšku pravidelného štvorstenu s dĺžkou hrany 3.

### Riešenie

$\sqrt{6}$.

## Cvičenie 6.

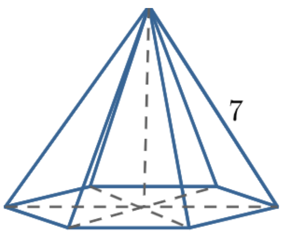
Tri steny ihlana sú rovnoramenné pravouhlé trojuholníky s dĺžkou strany 1. Vypočítajte plochu štvrtej steny.

### Riešenie

$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

## Cvičenie 7.

Podstava pravidelného šesťbokého ihlana znázorneného na obrázku je $\frac{75\sqrt{3}}{2}$. Vypočítajte kosínus uhla bočnej hrany a podstavy.

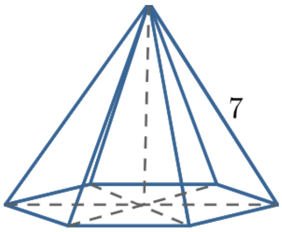



### Riešenie

$P = \frac{75\sqrt{3}}{2} = 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Preto $a = 5$ a $\sin(\alpha) = \frac{5}{7}$.

## Cvičenie 8.

Podstava pravidelného šesťbokého ihlana znázorneného na obrázku je $\frac{75\sqrt{3}}{2}$. Vypočítajte výšku tohto ihlana.




### Riešenie

$P = \frac{75\sqrt{3}}{2} = 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, takže $a = 5$. Z Pytagorovej vety je $H^2 = 7^2 - 5^2$teda $H = 2\sqrt{6}$.

# Modul 4: Neeuklidovská geometria

## Scenáre lekcií s aplikáciami VR

### Scenár lekcie 1

#### Názov lekcie

Euklidovská geometria

#### Výstupy vzdelávania

- Poznanie axióm euklidovskej geometrie.

#### Priebeh vyučovacej hodiny

#### Krok 1

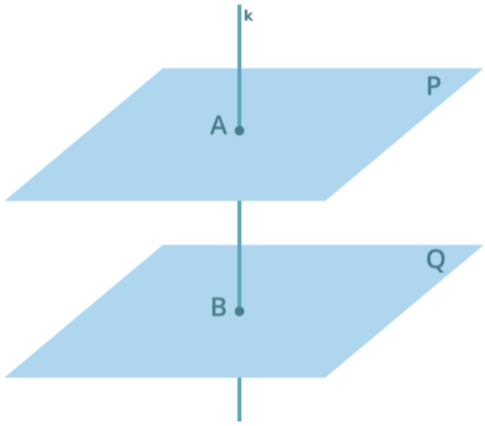
Zavedenie základných pojmov v geometrii: bod, priamka, rovina.

#### Krok 2

Učenie sa axióm euklidovskej geometrie.

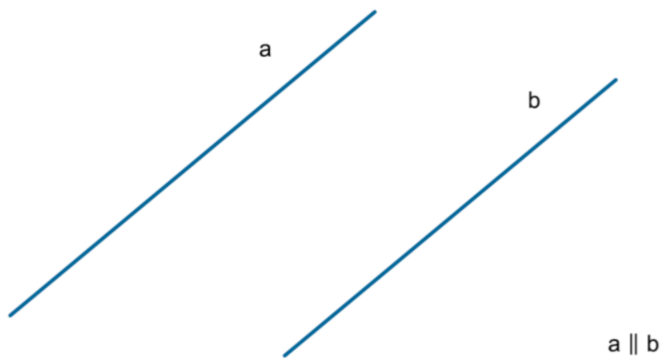
#### Krok 3.

Diskusia o vzájomnej polohe rovín v trojrozmernom priestore, napr. rovnobežné roviny.



### Krok 4.

Diskusia o vzájomnej polohe dvoch priamok v rovine, napr. rovnobežných priamok.




### Krok 5.

Diskusia o vzájomnej polohe priamky a bodu v rovine a priestore.

### Krok 6.

Diskusia o vzájomnej polohe roviny a bodu v priestore.

### Aké otázky by sa mali položiť, aby sa študenti mohli zamyslieť nad študovaným problémom?

Aká je vzájomná poloha dvoch priamok v trojrozmernom priestore?

## Scenár lekcie 2

### Názov lekcie

Základy neeuklidovskej geometrie

### Výsledky vzdelávania

- Používanie neeuklidovskej geometrie.

### Priebeh vyučovacej hodiny

### Krok 1

Úvod do neeuklidovskej geometrie, historické prvky.

### Krok 2

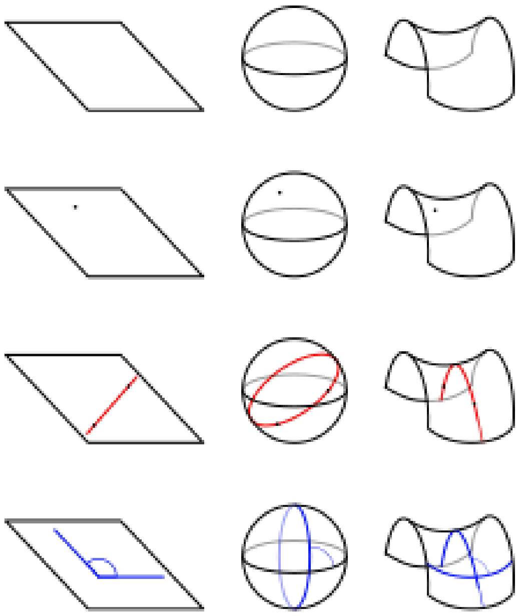
Diskusia o predpokladoch eliptickej geometrie.

### Krok 3.

Diskusia o predpokladoch hyperbolickej geometrie.

### Krok 4.

Rovina, bod, priamka, uhol z hľadiska euklidovskej, sférickej a hyperbolickej geometrie.



https://pl.wikipedia.org/wiki/Geometria_nieeuklidesowa

### Aké otázky by sa mali položiť, aby sa študenti mohli zamyslieť nad študovaným problémom?

V hyperbolickej geometrii môže byť súčet uhlov v trojuholníku menší ako $180°$?

## Návrhy a tipy pre učiteľov

1. Otázka pre študentov: Ako sa líši neeuklidovská geometria od euklidovskej?
2. Otázka pre žiakov: Ako vyzerá kruh v neeuklidovskej geometrii?
3. Matematici, ktorí prispeli k rozvoju neeuklidovskej geometrie.
4. Úvahy o použití neeuklidovskej geometrie.

## Pracovné listy pre žiakov

### Cvičenie 1.

Koľko priamok rovnobežných s danou priamkou možno nakresliť cez daný bod?

### Riešenie

Cez daný bod možno viesť iba jednu priamku rovnobežnú s danou priamkou.

### Cvičenie 2.

Koľko rovín rovnobežných s danou rovinou možno nakresliť cez daný bod?

### Riešenie

Cez daný bod možno viesť iba jednu rovinu rovnobežnú s danou rovinou.

## Cvičenie 3.

Koľko bodov jasne definuje rovinu?

### Riešenie

Tri nekolineárne body.

## Cvičenie 4.

Ako jasne určiť rovinu pomocou dvoch priamok?

### Riešenie

Napríklad pomocou dvoch priamok, ktoré sa pretínajú v jednom bode.

## Cvičenie 5.

Čo môže byť prienikom priamky a roviny?

### Riešenie

Prienikom priamky a roviny môže byť: prázdna množina, bod, priamka.

# Modul 5: Maximá a minimá funkcií

## Scenáre lekcií s aplikáciami VR

### Scenár lekcie 1

#### Názov lekcie

Lokálne minimum a maximum: definícia, geometrická interpretácia

#### Výstupy vzdelávania

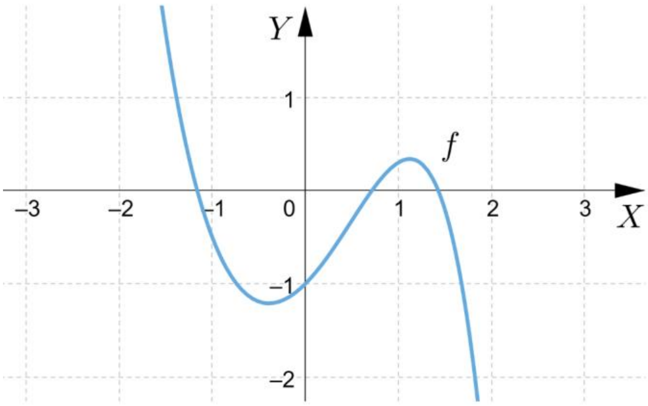
- Určenie lokálnych extrémov funkcií dvoch premenných.
- Pochopenie rozdielu medzi lokálnymi a globálnymi extrémami funkcie dvoch premenných.

#### Priebeh vyučovacej hodiny

#### Krok 1

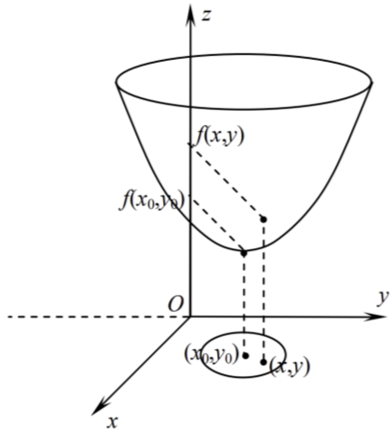
Pripomenutie definície minima a maxima funkcie jednej premennej.

Určenie lokálneho minima a maxima funkcie jednej premennej.



### Krok 2

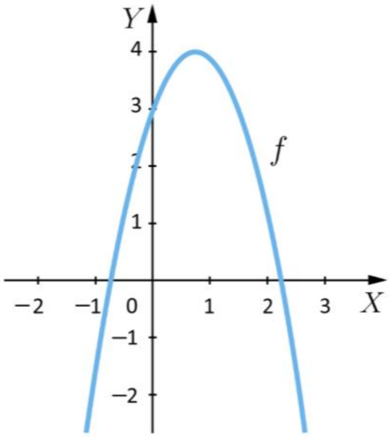
Formulovanie definície lokálneho minima funkcie dvoch premenných na základe grafu.




### Krok 3.

Aký je rozdiel medzi lokálnym minimom a globálnym minimom?

Uveďte príklad. Odôvodnenie na základe grafu pre funkcie $f$ a $x \in [-1,3]$.




### Krok 4.

Formulovanie definície globálneho minima funkcie dvoch premenných.

### Aké otázky by sa mali položiť, aby sa študenti mohli zamyslieť nad študovaným problémom?

Môže mať funkcia minimum v bode 0?

## Scenár lekcie 2

### Názov lekcie

Nutné a postačujúce podmienky pre existenciu extrému funkcie dvoch premenných

## Výsledky vzdelávania

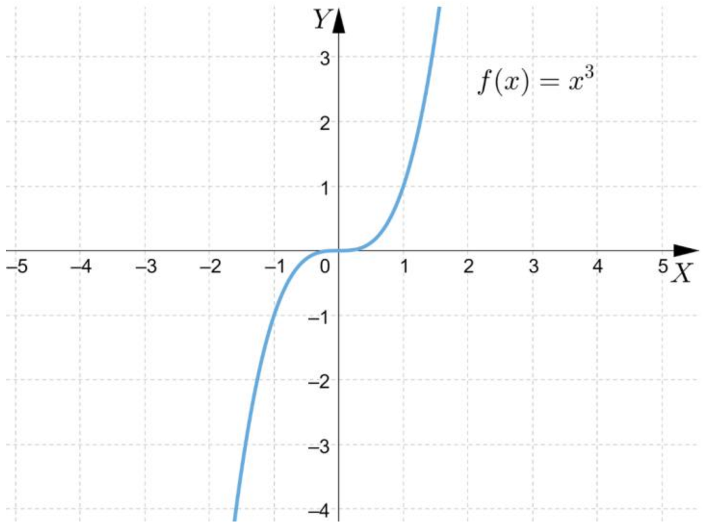
- Používanie nutnej a postačujúcej podmienky pre existenciu extrému funkcie dvoch premenných.

## Priebeh vyučovacej hodiny

### Krok 1

Pripomenutie nutnej podmienky pre existenciu extrému funkcie jednej premennej.

Spĺňa funkcia $y = x^3$ pre $x = 0$ nutnú podmienku pre existenciu extrému funkcie?




### Krok 2

Pripomenutie postačujúcej podmienky pre existenciu extrému funkcie jednej premennej.

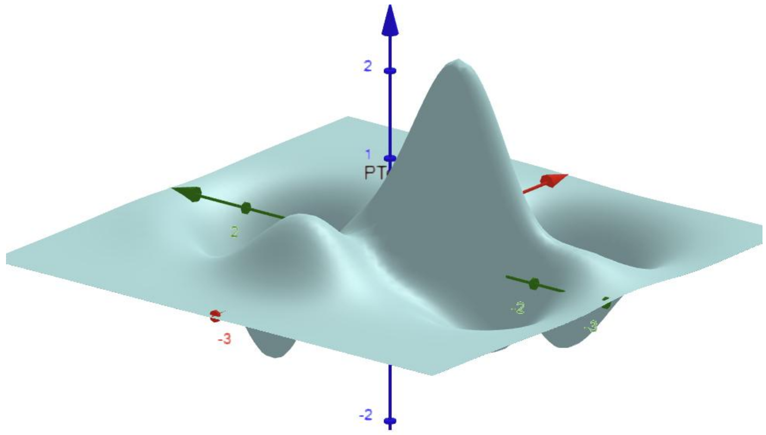
### Krok 3.

Formulovanie nutnej podmienky pre existenciu extrému funkcie dvoch premenných.

### Krok 4.

Formulovanie postačujúcej podmienky pre existenciu extrému funkcie dvoch premenných.

Označenie bodov, v ktorých funkcia spĺňa nutné a postačujúce podmienky pre existenciu extrému funkcie dvoch premenných



Krok 5.

Porovnanie nutných a postačujúcich podmienok pre existenciu extrému funkcií jednej a dvoch premenných.

Aké otázky by sa mali položiť, aby sa študenti mohli zamyslieť nad študovaným problémom?

Existuje funkcia, v ktorej neexistujú parciálne derivácie prvého rádu a funkcia má v tomto bode lokálny extrém?

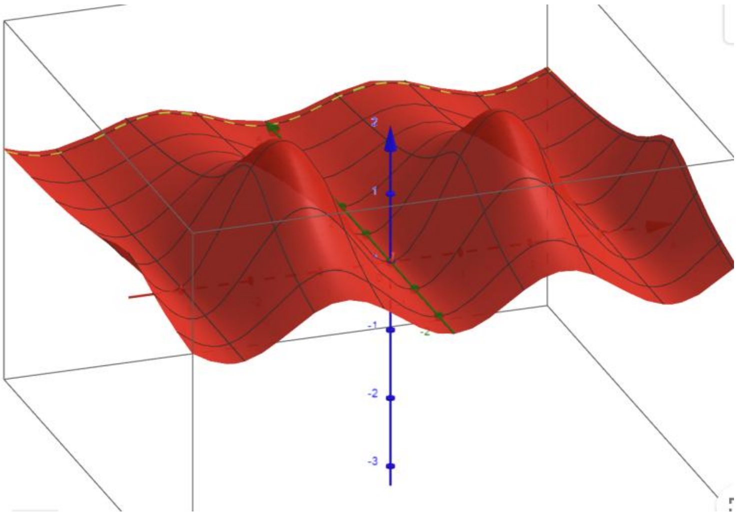
## Návrhy a tipy pre učiteľov

1. Otázka pre študentov: Nemá funkcia extrém, pretože neexistujú žiadne parciálne derivácie?
2. Ukážte žiakovi príklady funkcií dvoch premenných, pre ktoré je splnená nutná podmienka na dosiahnutie extrému funkcie, ale nie je splnená postačujúca podmienka.
3. Otázka pre žiakov: Formulujte nutnú podmienku pre existenciu extrému funkcie pre tri premenné.
4. Pomocou programu WOLFRAM môžete nájsť maximum a minimum funkcií dvoch premenných.

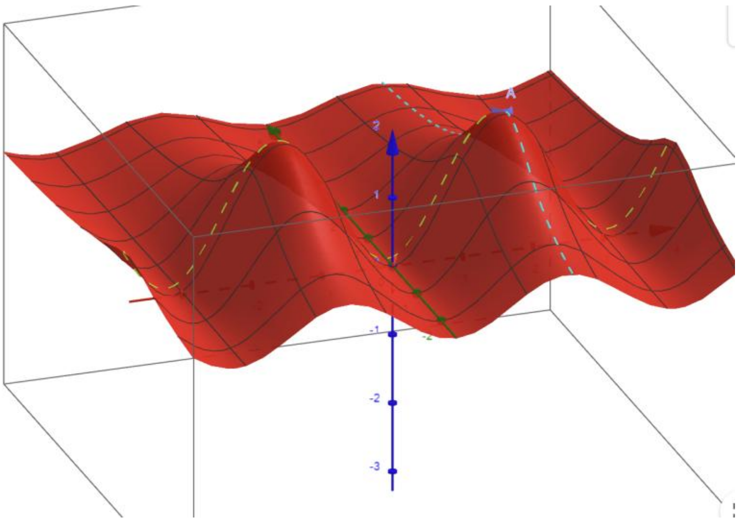
# Pracovné listy pre žiakov

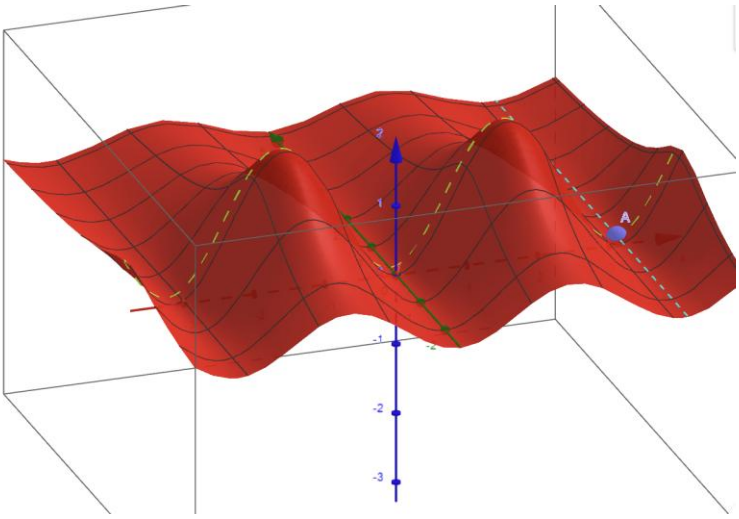
## Cvičenie 1.

Uveďte príklad lokálneho minima a lokálneho maxima funkcie zobrazenej v grafe.



Riešenie





## Cvičenie 2.

Je daná zhora otvorená nádoba v tvare kvádra. Jeho objem je 256. Určte rozmery tejto nádoby tak, aby plocha kvádra bola najmenšia.

Riešenie

$a = 8, b = 8, h = 4.$

## Cvičenie 3.

Uveďte príklad funkcie dvoch premenných, ktorá má nekonečne veľa lokálnych extrémov.

Riešenie

$f(x, y) = \sin(x) + \sin(y).$

## Cvičenie 4.

Určte lokálne extrémy funkcie $f(x, y) = x^2y + y^3 + 6xy$.

Riešenie

$\min = -6\sqrt{3}.\ \max = 6\sqrt{3}.$

## Cvičenie 5.

Určite lokálne extrémy funkcie $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy$.

Riešenie

$\min = -8.$

## Cvičenie 6.

Má funkcia $f(x, y) = x^2y + y^3 + 6xy$ v bode $P(0,0)$ lokálny extrém?

Riešenie

Nie

## Cvičenie 7.

Určite lokálne extrémy funkcie $f(x, y) = e^{x^2+y^2}(x^2 + y^2)$.

Riešenie

$\min = 0.$

## Cvičenie 8.

Má funkcia $f(x, y) = |x| + |y|$ v bode $P(0,0)$ lokálne minimum ?

Riešenie

áno.

# Modul 6: Sústavy lineárnych rovníc

## Scenáre lekcií s aplikáciami VR

### Scenár lekcie 1

#### Názov lekcie

Geometrická interpretácia lineárnych rovníc v priestore

#### Výstupy vzdelávania

- Vizualizácia rôznych možností riešenia sústavy lineárnych rovníc.
- Poznanie rôznych možností riešenia sústavy lineárnych rovníc.

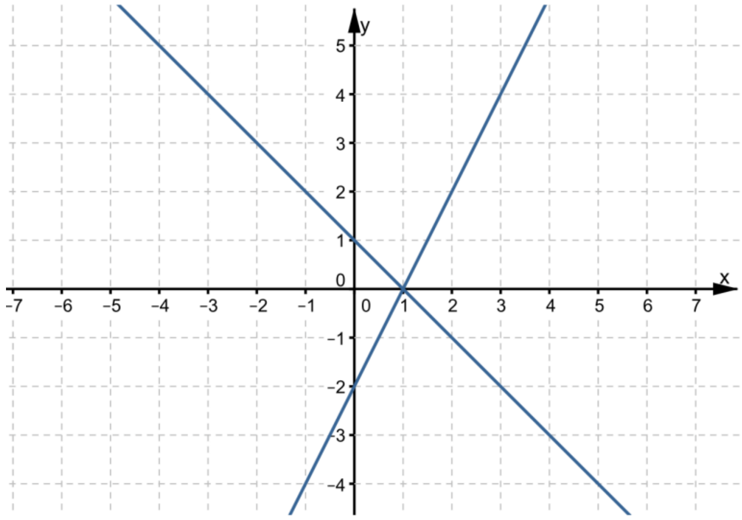
#### Priebeh vyučovacej hodiny

#### Krok 1

Pripomenutie sústavy lineárnych rovníc pre dve premenné.

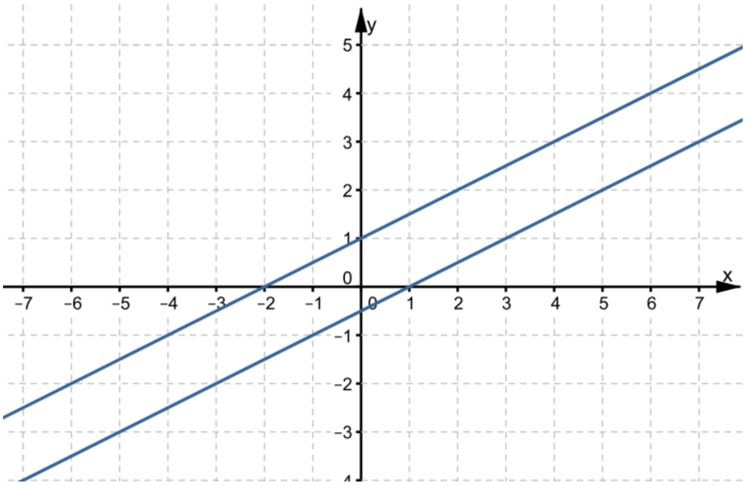
#### Krok 2

Prezentácia riešenia sústavy lineárnych rovníc na grafe.



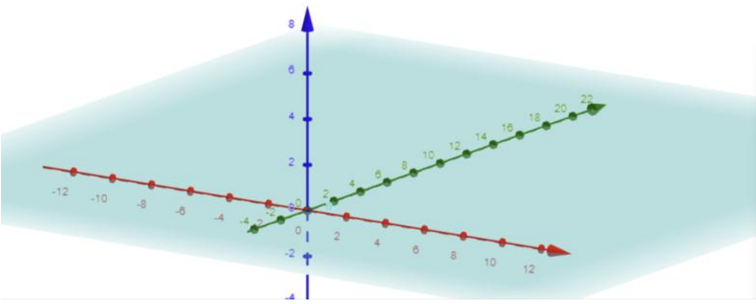
## Krok 3.

Prezentácia riešenia sústavy lineárnych rovníc na grafe.

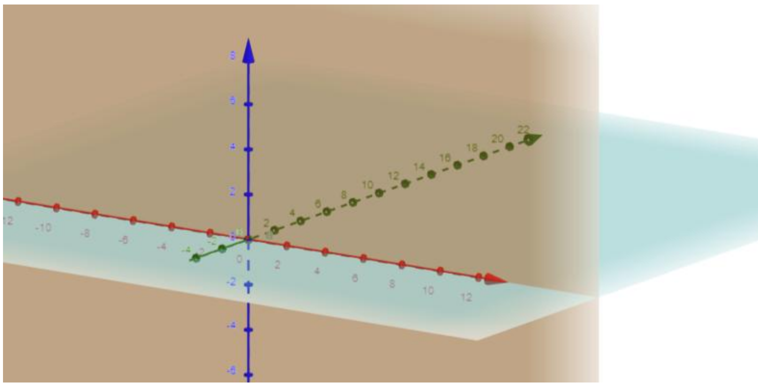



## Krok 4.

Nakreslite rovinu $x = 0$.



Nakreslite roviny $x = 0$ a $y = 0$.



## Aké otázky by sa mali položiť, aby sa študenti mohli zamyslieť nad študovaným problémom?

Aké sú možné riešenia systémov lineárnych rovníc v štvorrozmernom priestore?

## Scenár lekcie 2

### Názov lekcie

Riešenie lineárnych rovníc

### Výsledky vzdelávania

- Riešenie sústavy lineárnych rovníc v trojrozmernom priestore.

### Priebeh vyučovacej hodiny

### Krok 1

Riešenie sústavy lineárnych rovníc.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

### Krok 2

Riešenie sústavy lineárnych rovníc.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$$

### Krok 3.

Riešenie sústavy lineárnych rovníc.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

### Krok 4.

Riešenie sústavy lineárnych rovníc.

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

### Aké otázky by sa mali položiť, aby sa študenti mohli zamyslieť nad študovaným problémom?

Môže byť riešením sústavy lineárnych rovníc celý priestor?

## Návrhy a tipy pre učiteľov

5. Získajte informácie o rôznych metódach riešenia sústav lineárnych rovníc.
6. Pred začatím riešenia sústavy lineárnych rovníc sa oplatí upraviť rovnice presunutím všetkých členov s neznámymi na ľavú stranu a absolútnych členov na pravú stranu.
7. Skontrolujte riešenie sústavy lineárnych rovníc, napr. dosadením nájdeného riešenia.
8. V umelej inteligencii sa využívajú sústavy lineárnych rovníc.

9. Na riešenie sústav lineárnych rovníc môžete použiť program WOLFRAM.

## Pracovné listy pre žiakov

### Cvičenie 1.

Uveďte hodnoty parametrov $a, b$ tak, aby riešením sústavy lineárnych rovníc bola prázdna množina.

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 2 \\ 2x + y + az = b \end{cases}$$

#### Riešenie

$a = 3, b \neq 2$.

### Cvičenie 2.

Uveďte hodnoty parametrov $a, b$ tak, aby riešením sústavy lineárnych rovníc bola priamka.

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 2 \\ 2x + y + az = b \end{cases}$$

#### Riešenie

$a \neq 3, b \in R$.

### Cvičenie 3.

Uveďte hodnoty parametrov $a, b$ tak, aby riešením sústavy lineárnych rovníc bol bod.

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 2 \\ 2x + y + az = b \end{cases}$$

#### Riešenie

$a = 3, b = 2$.

### Cvičenie 4.

Uveďte hodnoty parametrov $a, b$ tak, aby riešením sústavy lineárnych rovníc bola rovina.

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 2 \\ 0x + 0y + az = b \\ 0x + y + z = 2 \end{cases}$$

#### Riešenie

$a \neq 0, b \in R$.

### Cvičenie 5.

Vyriešte sústavu lineárnych rovníc.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 2x + 2y + 4z = 6 \end{cases}$$

Riešenie

∅.

## Cvičenie 6.

Skontrolujte, či je systém Cramerov.

$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + y + 3z = 8 \\ x + 2y + z = 5 \\ 3x + 4y + 5z = 17 \end{cases}$$

Riešenie

nie

## Cvičenie 7.

Vyriešte sústavu lineárnych rovníc.

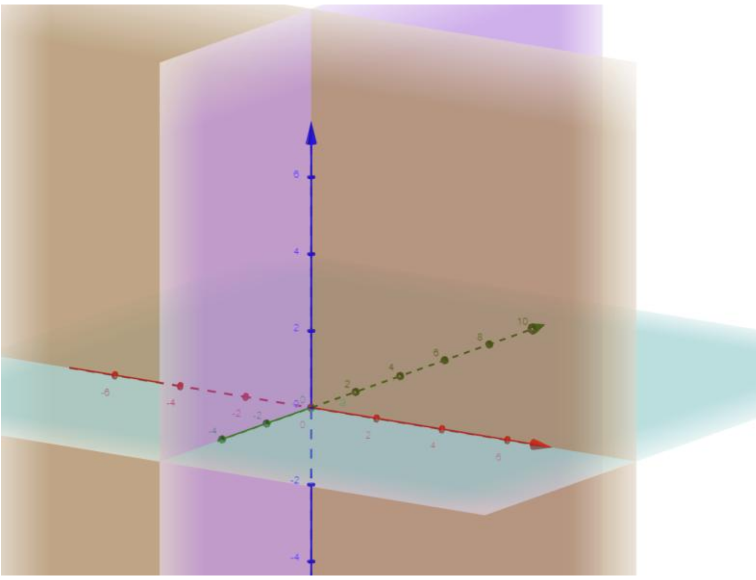
$$\{2x + y + 3z = 1$$

Riešenie

$y = -2x - 3z + 1$ alebo $[x, -2x - 3z + 1, z]$, kde $x, z \in R$.

## Cvičenie 8.

Napíšte sústavu lineárnych rovníc na základe grafu.



Riešenie

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

# Modul 7: Hranoly - rezy hranolov, siete hranolov

## Scenáre lekcií s aplikáciami VR

### Scenár lekcie 1

#### Názov lekcie

Siete hranolov

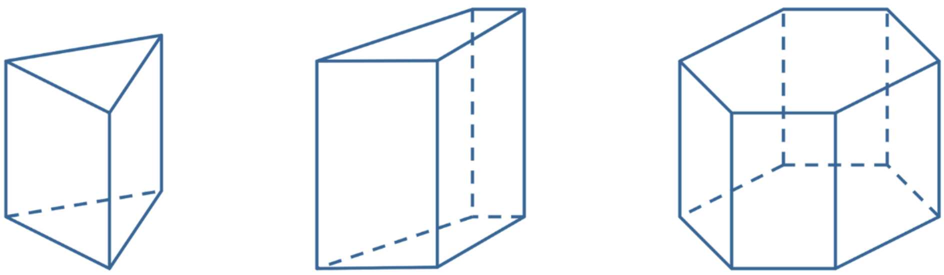
#### Učenie výsledky

- Rozpoznáva siete hranolov.

#### Priebeh vyučovacej hodiny

#### Krok 1

Kreslenie siete hranolov.



#### Krok 2

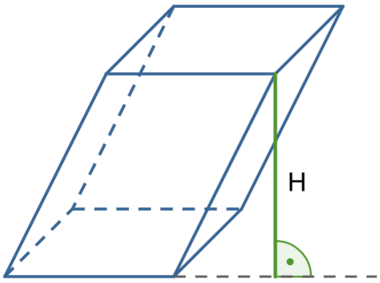
Popisuje, z akých tvarov sa skladajú siete hranolov.

#### Krok 3.

Sú na obrázkoch znázornené siete hranolov? Odôvodnenie.

#### Krok 4.

Kreslenie siete hranola znázorneného na obrázku.




Aké otázky by sa mali položiť, aby sa študenti mohli zamyslieť nad študovaným problémom?

každý hranol má iba jednu sieť?

## Scenár lekcie 2

### Názov lekcie

Výpočet celkového povrchu a objemu hranolov

### Výsledky vzdelávania

- Vypočítajte celkový povrch a objem hranola.

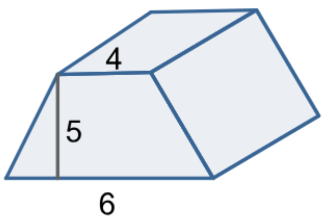
### Priebeh vyučovacej hodiny

### Krok 1

Zopakovanie vzorcov pre obsah útvarov: trojuholník, rovnobežník, lichobežník, pravidelný šesťuholník.

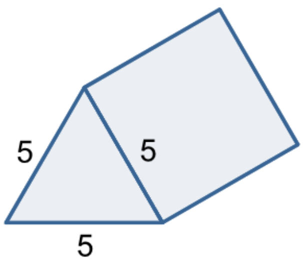
### Krok 2

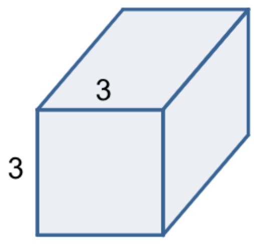
Objem hranola znázorneného na obrázku je 500. Výpočet výšky podstavy.




### Krok 3.

Určenie pomeru výšok hranolov tak, aby ich objemy boli rovnaké.



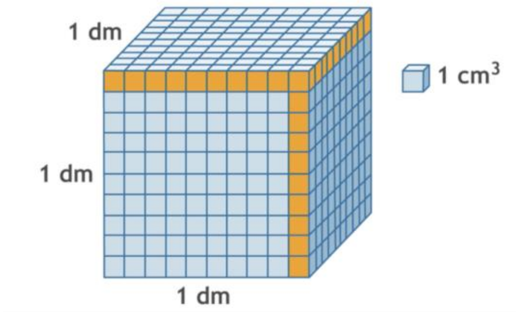



Ako sa zmení objem pravidelného šesťbokého hranola, ak

- dĺžka hrany podstavy je dvojnásobná?
- výška je dvojnásobná?

Krok 4.

Prevod jednotiek objemu. Premeňte 1 $\mathrm{dm}^3$ na $\mathrm{cm}^3$.




Krok 5.

Premeňte $1\mathrm{m}^3$ na $\mathrm{dm}^3$?
Premeňte $1\mathrm{m}^3$ na $\mathrm{cm}^3$?
Premeňte $1\mathrm{km}^3$ na $\mathrm{cm}^3$?

Aké otázky by sa mali položiť, aby sa študenti mohli zamyslieť nad študovaným problémom?

Je možné postaviť rôzne pravidelné štvorboké hranoly s rovnakými podstavami, rovnakými výškami a rovnakými objemami?

## Návrhy a tipy pre učiteľov

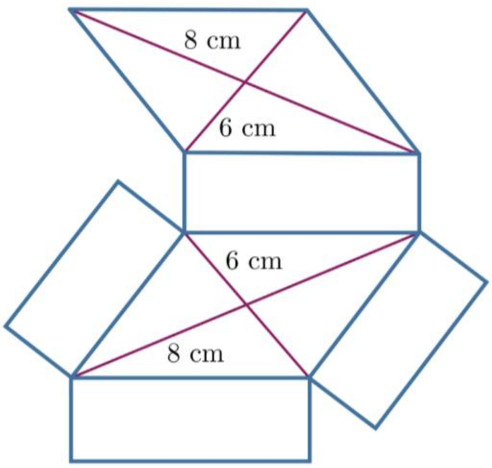
1. Otázka pre žiakov: Ako sa zmení objem hranola, ak sa jeho výška strojnásobí?
2. Otázka pre žiakov: Ako sa zmení objem pravidelného štvorbokého hranola, ak sa výška strojnásobí?
3. Otázka pre žiakov: Ako sa zmení dĺžka uhlopriečky pravidelného štvorbokého hranola, ak sa výška strojnásobí?
4. Otázka pre študentov: Ako sa zmení celkový povrch pravidelného štvorbokého hranola, ak sa jeho výška strojnásobí?
5. Na výpočet objemu a celkového povrchu hranolov môžete použiť program WOLFRAM.

# Pracovné listy pre žiakov

## Cvičenie 1.

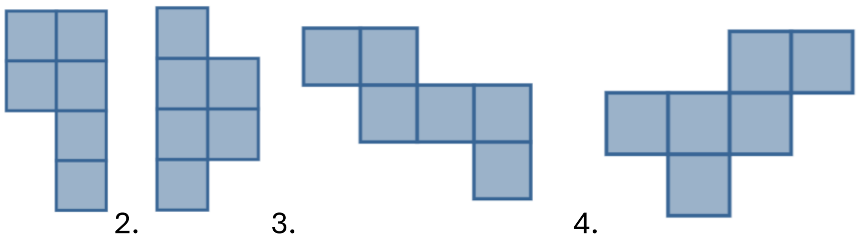
Nakreslite sieť hranola, ktorého podstavami sú kosoštvorce s uhlopriečkami $6\text{ cm}$ a $8\text{ cm}$.

### Riešenie




## Cvičenie 2.

Ktoré obrázky znázorňujú siete hranolov?



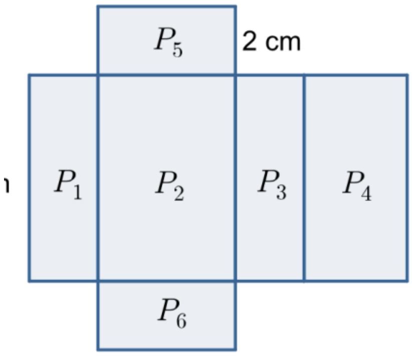
1. 2. 3. 4.

### Riešenie

1. Nie
2. Nie
3. áno.
4. áno.

## Cvičenie 3.

Objem hranola znázornený na obrázku je 24 a celková plocha povrchu je 52. Určte dĺžky zostávajúcich hrán.

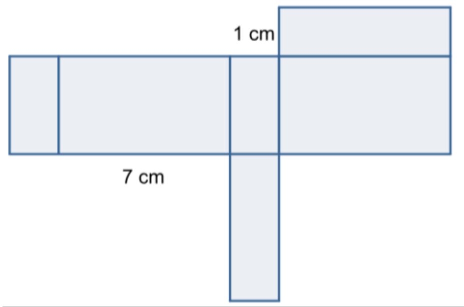



### Riešenie

$a = 2, b = 3, c = 4.$

## Cvičenie 4.

Celková plocha hranola znázornená na obrázku je 78. Určte objem hranola.

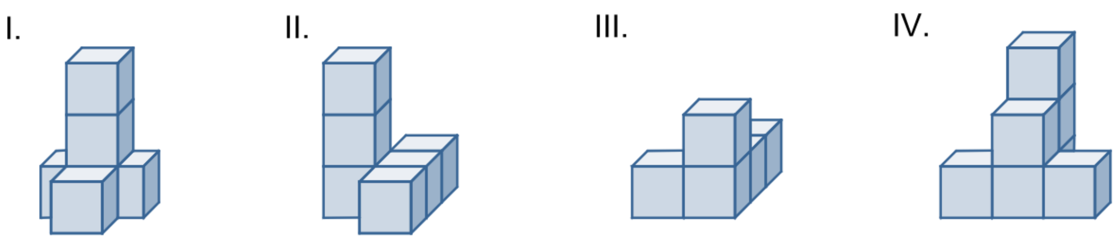



### Riešenie

$V = 28.$

## Cvičenie 5.

Ktorá zostava má najväčší objem?

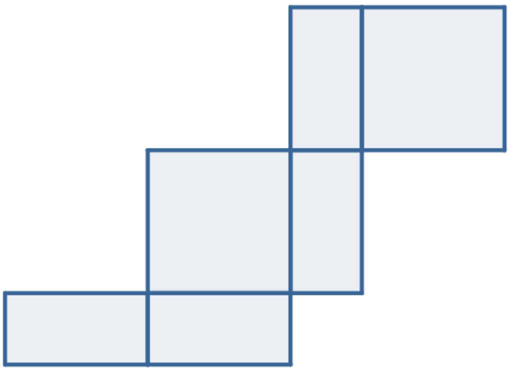



### Riešenie

IV.

## Cvičenie 6.

Zobrazuje obrázok sieť hranola?

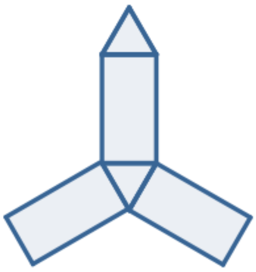


### Riešenie

áno.

## Cvičenie 7.

Aký typ hranola je znázornený na obrázku?

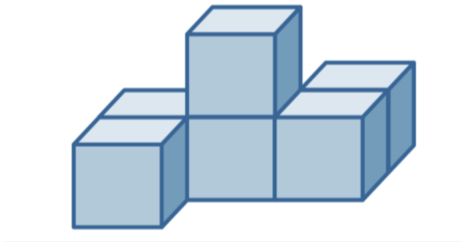


### Riešenie

Pravidelný trojboký hranol.

## Cvičenie 8.

Nakreslite sieť obrázku znázorneného na obrázku.



### Riešenie

Po nakreslení siete ju vystrihnite a skúste ju zložiť.

# Modul 8: Ihlany – časti ihlanov, siete ihlanov

## Scenáre lekcií s aplikáciami VR

### Scenár lekcie 1

#### Názov lekcie

Siete ihlanov

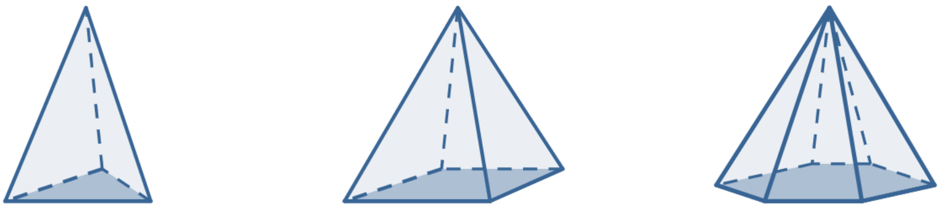
#### Výsledky vzdelávania

- Rozpoznáva siete ihlanov.

#### Priebeh vyučovacej hodiny

#### Krok 1

Kreslenie siete ihlanov.

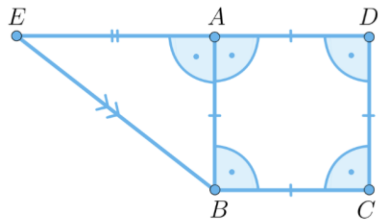


#### Krok 2

Popisuje, z akých tvarov pozostávajú siete ihlanov.

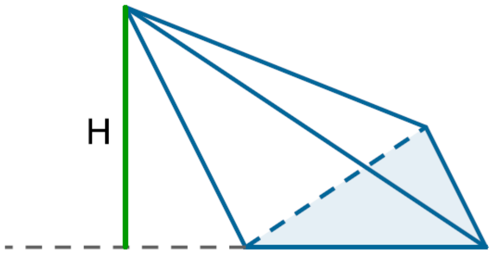
#### Krok 3.

Kreslenie siete ihlana.



### Krok 4.

Kreslenie siete ihlana znázornenej na obrázku.




### Aké otázky by sa mali položiť, aby sa študenti mohli zamyslieť nad študovaným problémom?

každý ihlan má iba jednu sieť?

## Scenár lekcie 2

### Názov lekcie

Objem ihlana

### Výsledky vzdelávania

- Vypočíta objem ihlana.

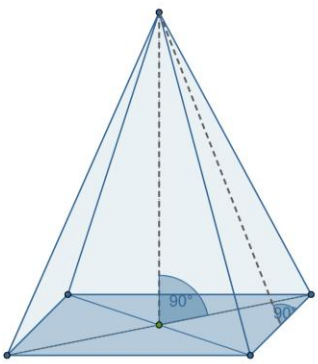
### Priebeh vyučovacej hodiny

### Krok 1

Pripomienka vzorcov pre celkový povrch útvarov: trojuholník, rovnobežník, lichobežník, pravidelný šesťuholník.

### Krok 2

Odvodenie vzorca pre objem pravidelného ihlana $V$ s dĺžkou hrany $a$ a výškou bočnej steny $h$.

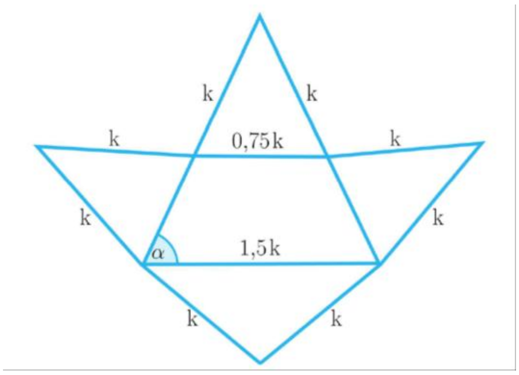


Krok 3.

Odvodenie vzorca pre objem pravidelného šesťbokého ihlana s dĺžkou hrany $a$ a výškou bočnej steny $h$.

Krok 4.

Odvodenie vzorca pre objem ihlana v závislosti od $a$, $\alpha$.




Aké otázky by sa mali položiť, aby sa študenti mohli zamyslieť nad študovaným problémom?

Je možné postaviť rôzne pravidelné štvorboké ihlany s rovnakými podstavami, rovnakými výškami a rovnakými objemami?

## Návrhy a tipy pre učiteľov

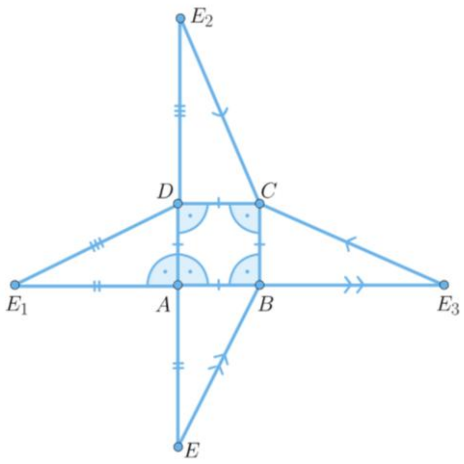
1. Otázka pre žiakov: Ako sa zmení objem ihlana, ak sa jeho výška strojnásobí?
2. Otázka pre žiakov: Ako sa zmení objem pravidelného štvorbokého ihlana, ak sa jeho výška strojnásobí?
3. Otázka pre žiakov: Ako sa zmení dĺžka uhlopriečky pravidelného štvorbokého ihlana, ak sa výška strojnásobí?
4. Otázka pre študentov: Ako sa zmení celkový povrch pravidelného ihlana, ak sa jeho výška strojnásobí?
5. Na výpočet objemu a celkového povrchu ihlana môžete použiť program WOLFRAM.

## Pracovné listy pre žiakov

### Cvičenie 1.

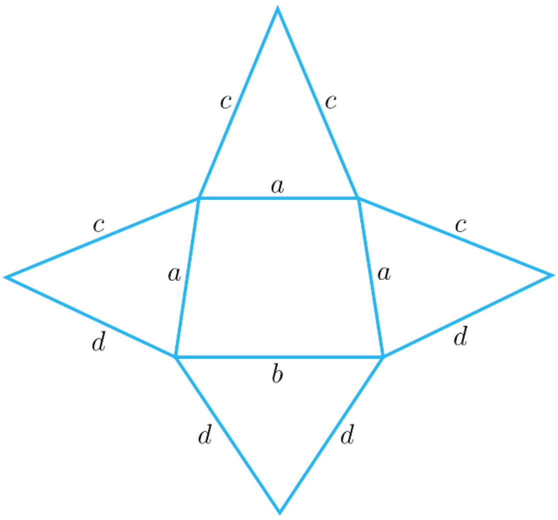
Nakreslite sieť ihlana, ktorého podstava je štvorec a jeho steny sú pravouhlé trojuholníky.

Riešenie




## Cvičenie 2.

Uveďte názov ihlana, ktorého sieť je znázornená na obrázku.

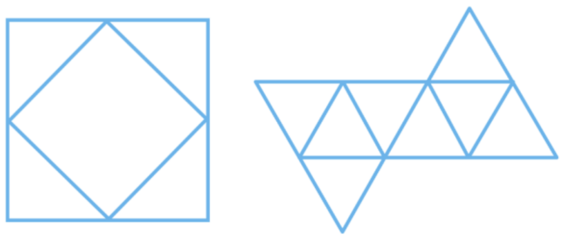



Riešenie

Štvorboký ihlan s lichobežníkovou podstavou.

## Cvičenie 3.

Ktorý obrázok znázorňuje sieť ihlana?

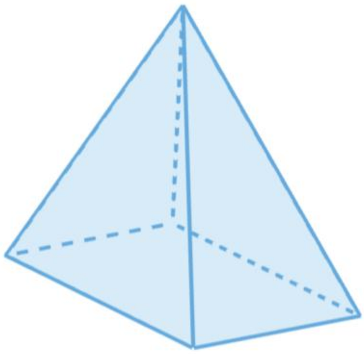


Riešenie

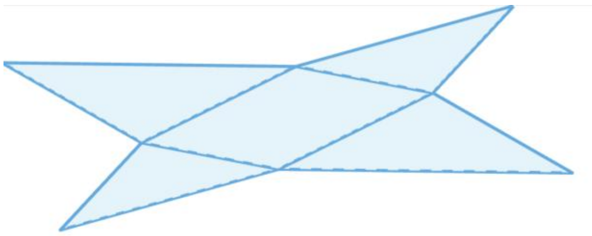
Na obrázkoch nie je žiadna sieť ihlana .

## Cvičenie 4.

Nakreslite sieť ihlana znázorneného na obrázku.



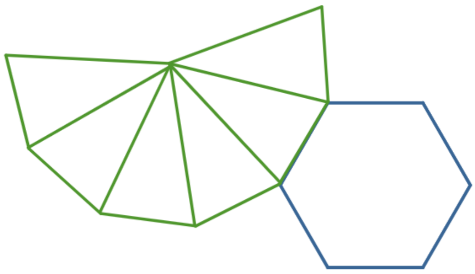
Riešenie



## Cvičenie 5.

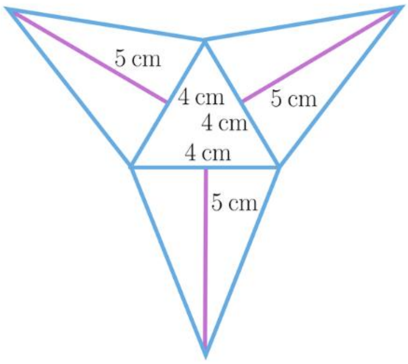
Nakreslite sieť pravidelného šesťbokého ihlana.

Riešenie



## Cvičenie 6.

Vypočítajte dĺžku výšky ihlana znázorneného na obrázku.

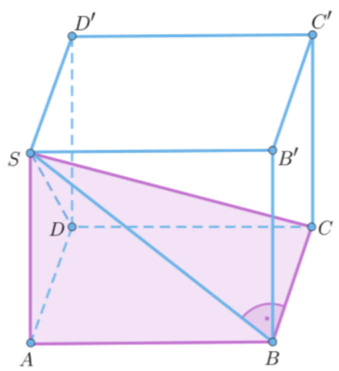



### Riešenie

$h = \sqrt{23\frac{2}{3}}.$

## Cvičenie 7.

Vypočítajte objem ihlana $ABCDS$, ak je hranol kockou s dĺžkou strany 3.

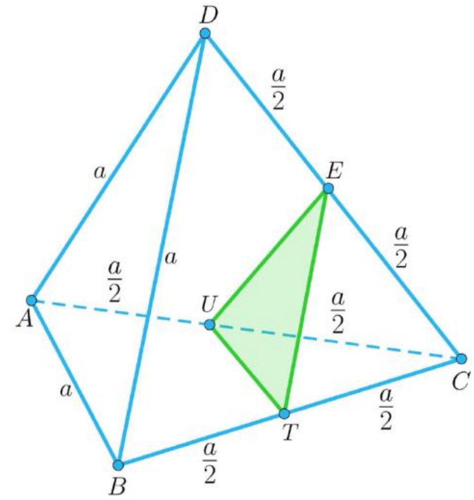



### Riešenie

$V = 9.$

## Cvičenie 8.

štvorsten $ABCD$s dĺžkou hrany 2. Vypočítajte obsah trojuholníka $UTE$.

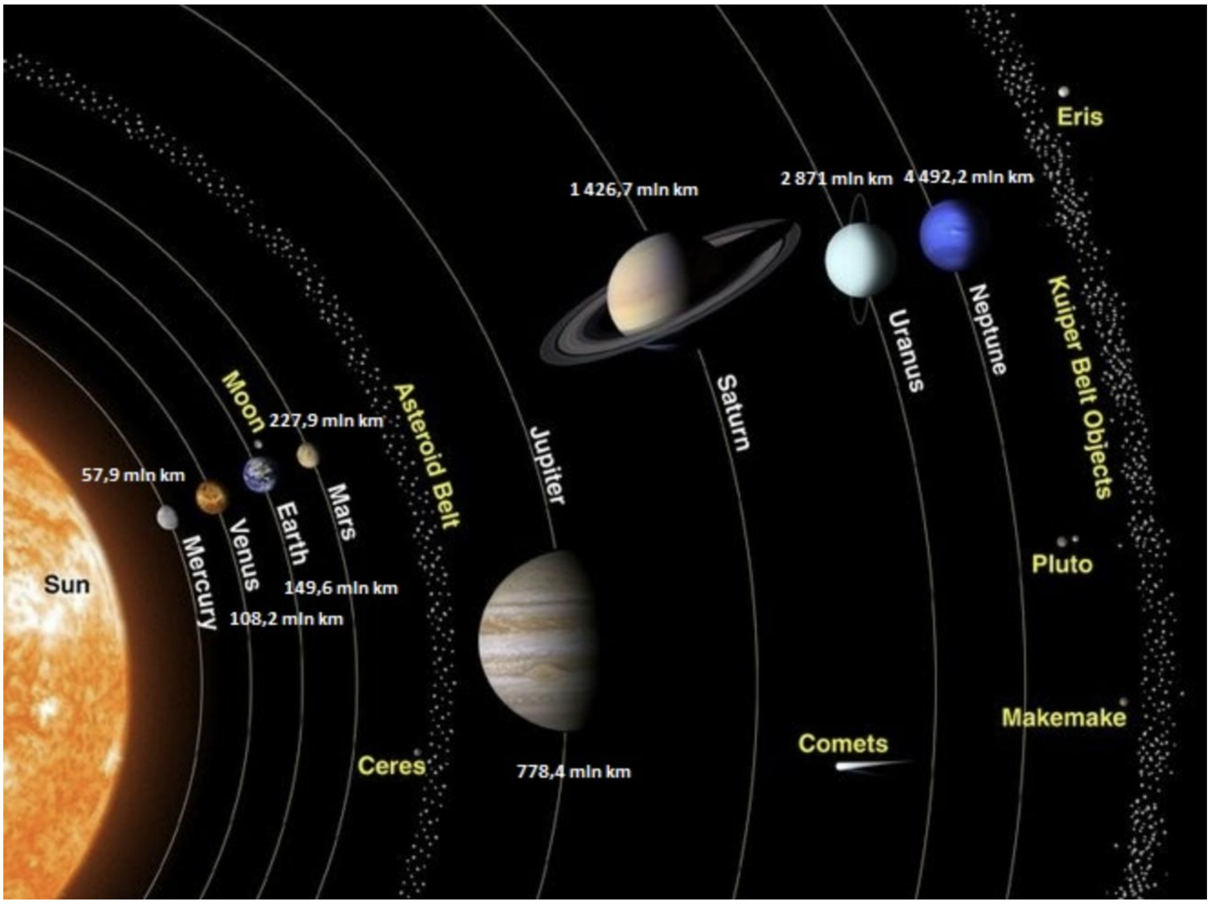



Riešenie

$P = \sqrt{3}.$

# Modul 9: Planetárny systém

## Scenáre lekcií s aplikáciami VR




### Scenár lekcie 1

#### Názov lekcie

Vzdialenosti v Slnečnej sústave

#### Výsledky vzdelávania

- Oboznámenie sa so vzdialenosťami v slnečnej sústave.

#### Priebeh vyučovacej hodiny

#### Krok 1

Zavedenie astronomickej jednotky au.

Jedna astronomická jednotka je priemerná vzdialenosť medzi Zemou a Slnkom, ktorá je približne 149 598 000 km. Pre odhadované výpočty môžeme predpokladať 150 000 000 km.

#### Krok 2

Určenie priemernej vzdialenosti Mesiaca od Zeme v au jednotke.

Riešenie. Približne $0.0026$ au.

### Krok 3.

Definovanie astronomickej jednotky svetelný rok (ly). Svetelný rok je vzdialenosť, ktorú svetlo prekoná vo vákuu za rok. $\mathrm{ly} = 63241\ \mathrm{au}$.

### Krok 4.

Výpočet, koľko kilometrov je za svetelný rok.

Riešenie. $\mathrm{ly} = 9.5 \cdot 10^{12}\ \mathrm{km}$.

### Aké otázky by sa mali položiť, aby sa študenti mohli zamyslieť nad študovaným problémom?

Rýchlosť svetla vo vákuu je $300\,000\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$. Ako dlho trvá, kým svetlo z vákua prekročí zemský rovník?

## Scenár lekcie 2

### Názov lekcie

Porovnávanie veličín v slnečnej sústave

### Výsledky vzdelávania

- Porovnáva veličiny v slnečnej sústave.

### Priebeh vyučovacej hodiny

### Krok 1

Polomer Marsu je $3\,392\ \mathrm{km}$. Priemer Zeme je $12\,756\ \mathrm{km}$.

Výpočet plochy povrchu Marsu .

Riešenie. Okolo $1.5 \cdot 10^{8}\ \mathrm{km}^2$.

### Krok 2

Výpočet objemu Marsu .

Riešenie. Okolo $1.6 \cdot 10^{11}\ \mathrm{km}^3$.

### Krok 3.

Výpočet, aká časť objemu Zeme je objemom Marsu.

Riešenie. Okolo $0.15$.

### Krok 4.

Výpočet, akú časť povrchu Zeme tvorí povrch Marsu.

Riešenie. Okolo $0.3$.

### Aké otázky by sa mali položiť, aby sa študenti mohli zamyslieť nad študovaným problémom?

Porovnajte hustoty Marsu a Zeme.

## Návrhy a tipy pre učiteľov

1. Oboznámte sa s astronomickou jednotkou parsek $(\mathrm{pc})$.
2. Ktorá planéta je najbližšie k Slnku?
3. Ako dlho bude trvať cesta na Mars?
4. Na výpočty v Slnečnej sústave môžete použiť program WOLFRAM.

## Pracovné listy pre žiakov

### Cvičenie 1.

Určte priemernú vzdialenosť Jupitera od Slnka.

#### Riešenie

$5.203\ \mathrm{au}$.

### Cvičenie 2.

Určte priemernú vzdialenosť Zeme od Slnka vo svetelných rokoch.

#### Riešenie

Okolo $8$ svetelných minút.

### Cvičenie 3.

Určte priemernú vzdialenosť Zeme od Mesiaca vo svetelných rokoch.

#### Riešenie

Okolo $1.3$ svetelných sekúnd.

### Cvičenie 4.

Určte približnú hodnotu povrchu Zeme (priemer: $12\ 756\ \mathrm{km}$).

#### Riešenie

Okolo $510\ 000\ 000\ \mathrm{km}^2$.

### Cvičenie 5.

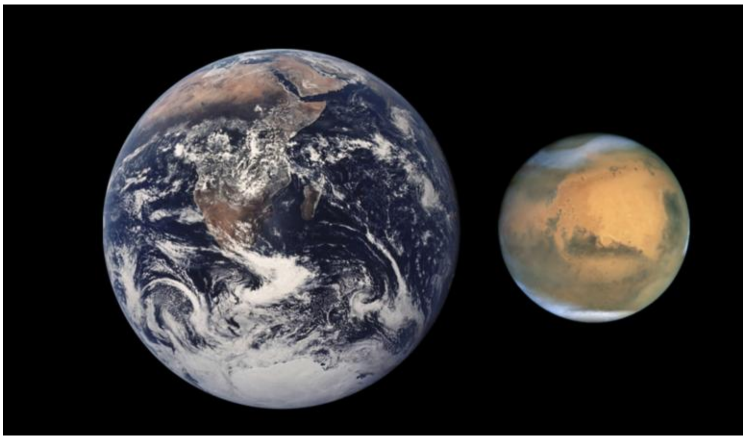
Určte približnú hodnotu objemu Zeme (priemer: $12\ 756\ \mathrm{km}$).

#### Riešenie

Okolo $10^{12}\ \mathrm{km}^3$.

## Cvičenie 6.

Obrázok ukazuje Zem a Mars v mierke. Priemer Zeme je 12 756 km. Odhadnite priemer Marsu.



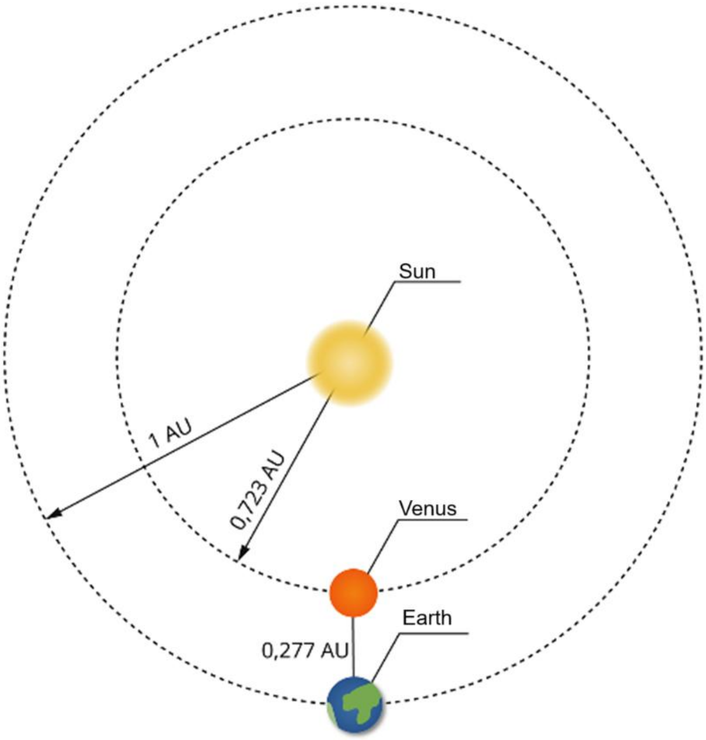
https://pl.wikipedia.org/wiki/Mars

### Riešenie

Okolo 6 800 km.

## Cvičenie 7.

Určte vzdialenosť Venuše od Slnka v kilometroch.



# Modul 10: Skúmanie slnečnej sústavy

## Scenáre lekcií s aplikáciami VR

### Scenár lekcie 1

#### Názov lekcie

Výskum vesmíru – základné pojmy

#### Výsledky vzdelávania

- Používa základné pojmy o výskume vesmíru .

#### Priebeh vyučovacej hodiny

#### Krok 1

Zavedenie definície kozmickej lode. Typy kozmických lodí.

#### Krok 2

Diskusia o problematike kozmického žiarenia.

#### Krok 3.

Diskusia o problematike gravitácie. Gravitácia na Zemi a iných planétach.

#### Krok 4.

Diskusia o vplyve gravitácie na ľudské zdravie.

#### Aké otázky by sa mali položiť, aby sa študenti mohli zamyslieť nad študovaným problémom?

Aký je súčasný právny stav priestoru?

### Scenár lekcie 2

#### Názov lekcie

Dobývanie vesmíru

#### Výsledky vzdelávania

- Diskutuje o dobývaní vesmíru.

#### Priebeh vyučovacej hodiny

#### Krok 1

Diskusia o príbehu prvého človeka vo vesmíre.

#### Krok 2

Diskusia o budúcnosti ľudstva vo vesmíre. Prehľad populárno-vedeckých článkov.

### Krok 3.

Diskusia o etických otázkach dobývania vesmíru. Prehľad populárno-vedeckých článkov.

Aké otázky by sa mali položiť, aby sa študenti mohli zamyslieť nad študovaným problémom?

Kedy bolo prvé pristátie človeka na Mesiaci?

## Návrhy a tipy pre učiteľov

1. Otázka pre študentov: Gravitácia na Zemi je $9.81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Je gravitácia rovnaká na Marse ako na Zemi?
2. Otázka pre žiakov: Kde je na Zemi najväčšia gravitácia?
3. Aké sú súčasné plány vesmírneho výskumu NASA?

## Pracovné listy pre žiakov

### Cvičenie 1.

Prezentujte svoj názor na dobývanie planét Slnečnej sústavy.

### Cvičenie 2.

Predložte svoje pozitívne argumenty o dobytí planét slnečnej sústavy.

### Cvičenie 3.

Predložte svoje negatívne argumenty o dobytí planét slnečnej sústavy.

### Cvičenie 4.

Aké sú nedávne objavy vesmírnych sond v Slnečnej sústave?

### Cvičenie 5.

Aké sú nebezpečenstvá vesmírneho odpadu?

### Cvičenie 6.

Na Zemi človek váži $50\ \mathrm{kg}$. Akú váhu bude vážiť táto osoba na Marse?

#### Riešenie

Okolo $18\ \mathrm{kg}$.

# Modul 11: Geometrická interpretácia parciálnych derivácií

## Scenáre lekcií s aplikáciami VR

### Scenár lekcie 1

#### Názov lekcie

Geometrická interpretácia parciálnych derivácií

#### Učenie výsledky

- Interpretuje parciálne derivácie.

#### Priebeh vyučovacej hodiny

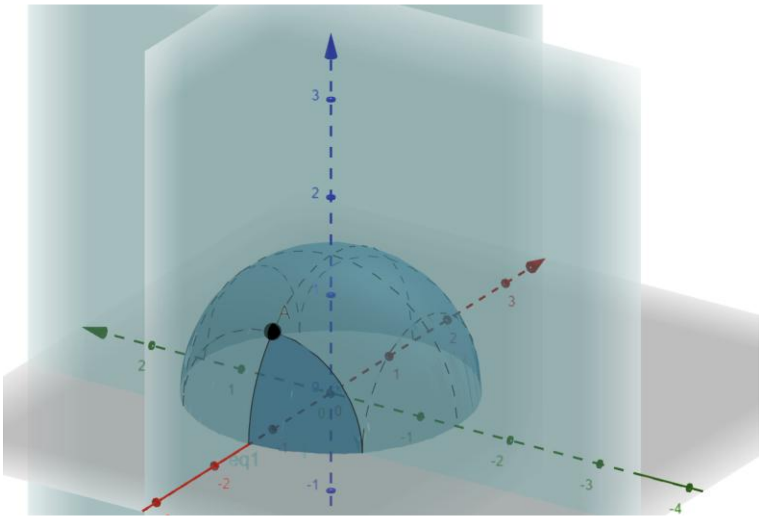
#### Krok 1

Zopakovanie interpretácie derivácie funkcie jednej premennej.

#### Krok 2

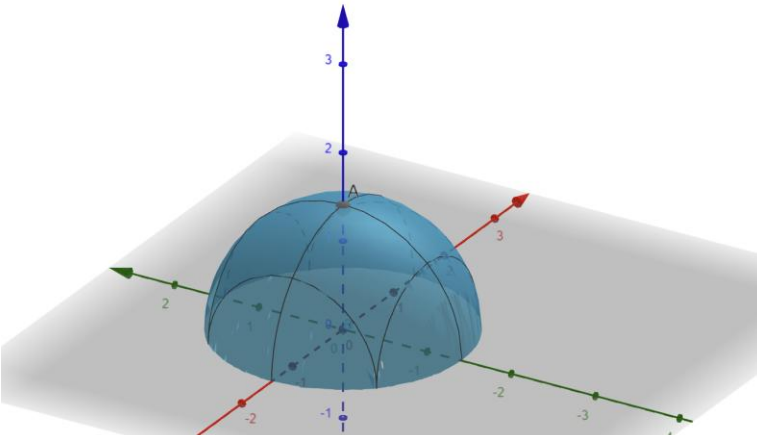
Zavedenie definície parciálnej derivácie a jej interpretácia pre funkcie dvoch premenných.

Odhad parciálnej derivácie vo vybranom bode.



### Krok 3.

Odhad parciálnej derivácie vo vybranom bode.



### Krok 4.

Hypotéza vzťahu medzi extrémom funkcie a parciálnymi deriváciami.

Aké otázky by sa mali položiť, aby sa študenti mohli zamyslieť nad študovaným problémom?

Ako zaviesť definície parciálnych derivácií pre $n$-rozmernú funkciu?

## Scenár lekcie 2

### Názov lekcie

Výpočet parciálnych derivácií

### Výsledky vzdelávania

- Vypočíta parciálne derivácie.

### Priebeh vyučovacej hodiny

### Krok 1

Výpočet z definície parciálnej derivácie funkcie $f(x, y) = y + x^2$ vzhľadom na premennú $y$.

### Krok 2

Výpočet parciálnej derivácie funkcie $f(x, y) = y + x^2$ vzhľadom na premennú $y$ z definície .

### Krok 3.

Výpočet parciálnych derivácií funkcie $f(x, y) = \sin(x^3 + y^2)$.

### Krok 4.

Výpočet parciálnych derivácií funkcie $f(x, y) = x \cdot \sin(x^3 + y^2)$.

### Krok 5.

Výpočet parciálnej derivácie s pre funkciu $f(x,y) = x \cdot \frac{\sin(x^3+y^2)}{x^2+2}$.

Aké otázky by sa mali položiť, aby sa študenti mohli zamyslieť nad študovaným problémom?

Ako vypočítať derivácie vyššieho rádu ?

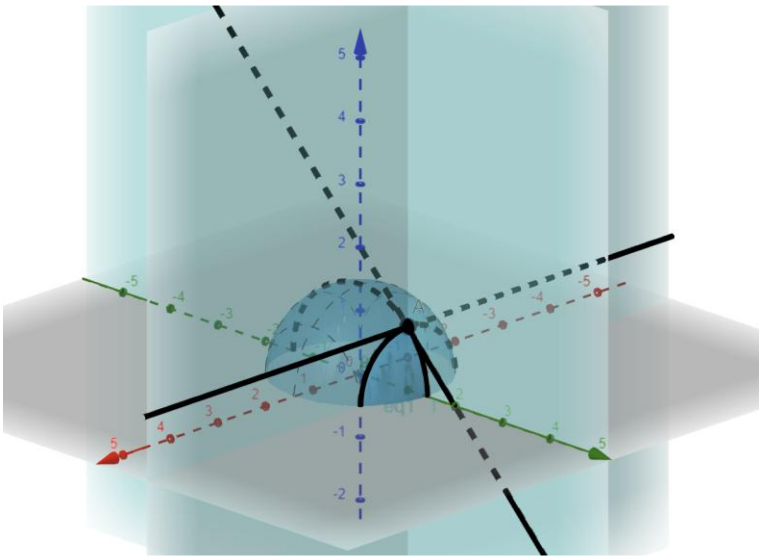
## Návrhy a tipy pre učiteľov

1. Poznámka pre študentov: Pri výpočte parciálnej derivácie podľa vybranej premennej ju vypočítame rovnako ako pri funkcii jednej premennej, so zvyšnými premennými zaobchádzame ako s konštantami.
2. Otázka pre študentov: Ako vypočítať parciálnu deriváciu podľa premennej $x$funkcie troch premenných? Použite vyššie uvedené pravidlo a vypočítajte$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}$ ak $f(x,y,z) = x^2zy + x$.
3. Funkcia $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$nie je spojitá a má v bode parciálne derivácie $(0,0)$.
4. Dôležité: funkcia nesmie byť nespojitá, ak existujú parciálne derivácie.
5. Na výpočet parciálnych derivácií môžete použiť program WOLFRAM.

## Pracovné listy pre žiakov

### Cvičenie 1.

Uveďte parciálne derivácie v bode $A$ pre funkciu znázornenú na obrázku.

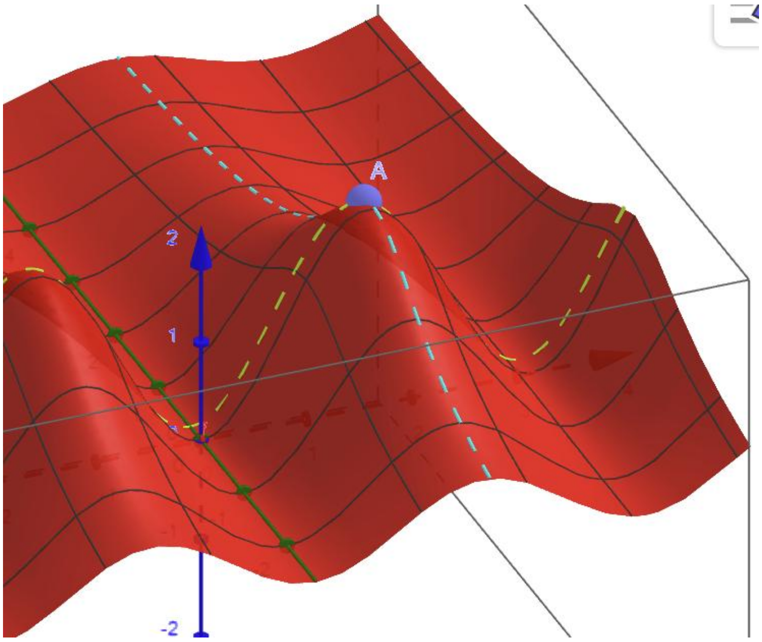


### Riešenie

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 1, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0.$

## Cvičenie 2.

Uveďte parciálne derivácie v bode $A$pre funkciu znázornenú na obrázku.




Riešenie

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0.$

## Cvičenie 3.

Vypočítajte parciálne derivácie funkcie $f(x,y) = x^3y + y^2 + 4$.

Riešenie

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 3x^2y, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^3 + 2y.$

## Cvičenie 4.

Výpočet z definície parciálnej derivácie funkcie $f(x,y) = x$^2 $y + x$ podľa premennej $x$.

Riešenie

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2y+x+h-(x^2y+x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xhy+h^2}{h} = 2xy.$

## Cvičenie 5.

Vypočítajte parciálne derivácie funkcie $f(x,y) = xe^{x^2+y^2}$.

Riešenie

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^{x^2+y^2}(1+2x^2), \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2xye^{x^2+y^2}.$

## Cvičenie 6.

Sú definičné obory funkcie$f(x,y) = \sqrt{x+y}$ a parciálnych derivácií rovnaké?

### Riešenie

Nie

## Cvičenie 7.

Funkcia je daná $f(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$. Zdôvodnite to

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = (2x + 2y) \cdot f(x,y).$$

### Riešenie

$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2x\sin(x^2 + y^2) + 2y\sin(x^2 + y^2) = (2x + 2y) \cdot f(x,y).$

## Cvičenie 8.

Uveďte príklad funkcie$f(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$ ktorý spĺňa podmienku

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0.$$

### Riešenie

$f(x,y) = x - y.$

# Modul 12: Sférické súradnice

## Scenáre lekcií s aplikáciami VR

### Scenár lekcie 1

#### Názov lekcie

Polárne súradnice

#### Výsledky vzdelávania

- Používa polárne súradnice.

#### Priebeh vyučovacej hodiny

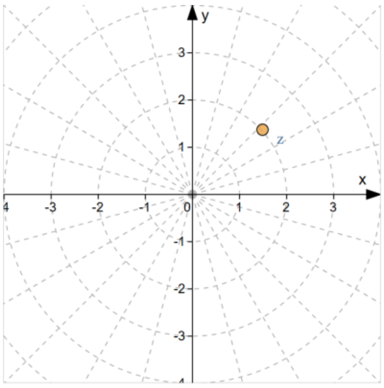
#### Krok 1

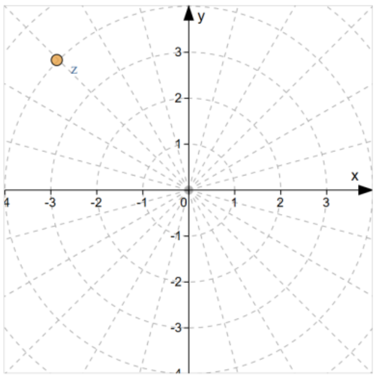
Pripomenutie vlastností a grafov funkcií $\sin(x)$ a $\cos(x)$.

#### Krok 2

Diskusia k problematike polárnych súradníc $\begin{cases} x = r\cos(\alpha) \\ y = r\sin(\alpha) \end{cases}$.

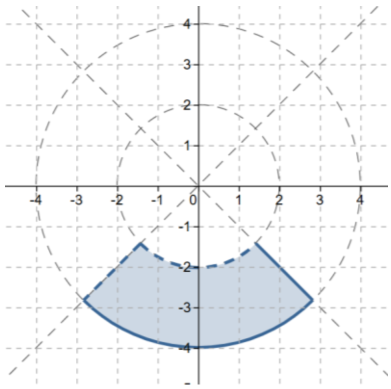
Určenie polárnych súradníc bodov znázornených na obrázku.



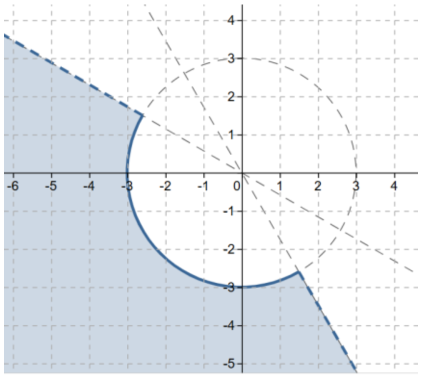

#### Krok 3.

Popis oblasti pomocou polárnych súradníc.



### Krok 4.

Popis oblasti pomocou polárnych súradníc.




### Aké otázky by sa mali položiť, aby sa študenti mohli zamyslieť nad študovaným problémom?

Ako sa líšia polárne súradnice od karteziánskych súradníc?

## Scenár lekcie 2

### Názov lekcie

Sférické súradnice

### Výsledky vzdelávania

- Používa sférické súradnice.

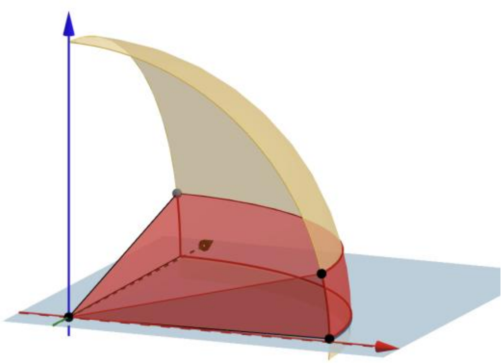
### Priebeh vyučovacej hodiny

### Krok 1

Zavedenie sférických súradníc $\begin{cases} x = r\cos(\theta)\cos(\alpha) \\ y = r\cos(\theta)\sin(\alpha). \\ z = r\sin(\theta) \end{cases}$

### Krok 2

Diskusia o množinách v sférických súradniciach.



$$\begin{cases} 0 \leq r \leq 4 \\ 0° \leq \alpha \leq 90° \\ 0° \leq \theta \leq 20° \end{cases}$$

Krok 3.

Vypočítajte vzdialenosť medzi bodmi, ak sú zadané v sférických súradniciach.

Aké otázky by sa mali položiť, aby sa študenti mohli zamyslieť nad študovaným problémom?

Aké sú ohraničenia hodnôt sférických súradníc?

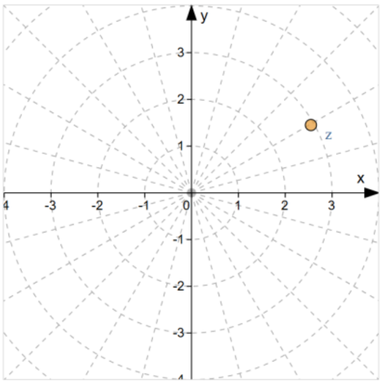
## Návrhy a tipy pre učiteľov

1. Otázka pre žiakov: Ako napísať rovnicu kružnice v polárnych súradniciach?
2. Otázka pre žiakov: Ako napísať rovnicu gule v sférických súradniciach?
3. Ako previesť polárne súradnice na karteziánske súradnice?
4. Ako previesť sférické súradnice na karteziánske súradnice?
5. Na výpočet sférických súradníc môžete použiť program WOLFRAM.

## Pracovné listy pre žiakov

### Cvičenie 1.

Určte polárne súradnice bodu znázorneného na obrázku.

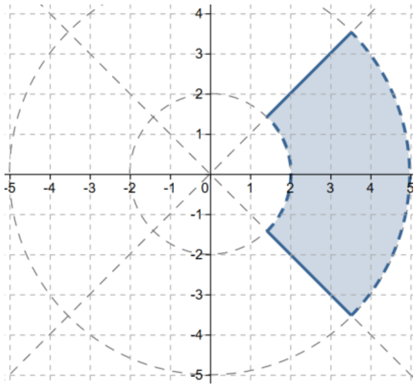



Riešenie

Polárne súradnice: $r = 3, \alpha = 30°$.

## Cvičenie 2.

Opíšte oblasť znázornenú na obrázku pomocou polárnych súradníc.



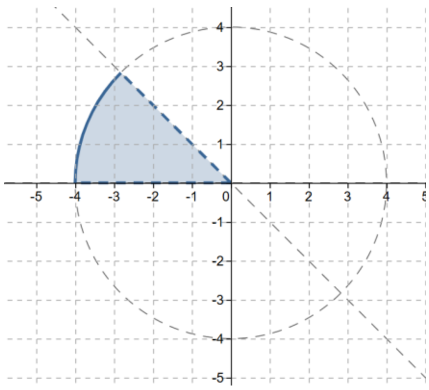
### Riešenie

$$\begin{cases} 2 < r < 5 \\ -45° \leq \alpha \leq 45° \end{cases}.$$

## Cvičenie 3.

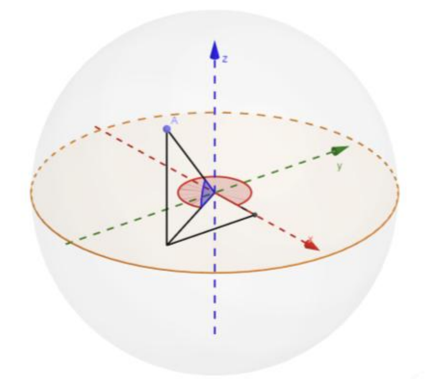
Nakreslite oblasť $\begin{cases} 0 \leq r \leq 4 \\ 135° < \alpha < 180° \end{cases}$ uvedenú v polárnych súradniciach.

### Riešenie



## Cvičenie 4.

Odhadnite sférické súradnice na základe obrázku.



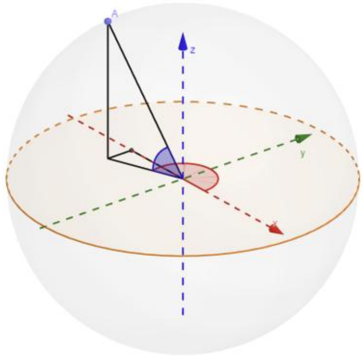
Riešenie

$\alpha = 300°, \theta = 45°, r = 3.$

## Cvičenie 5.

Zobrazte bod s polárnymi súradnicami: $\alpha = 200°, \theta = 60°, r = 3.$

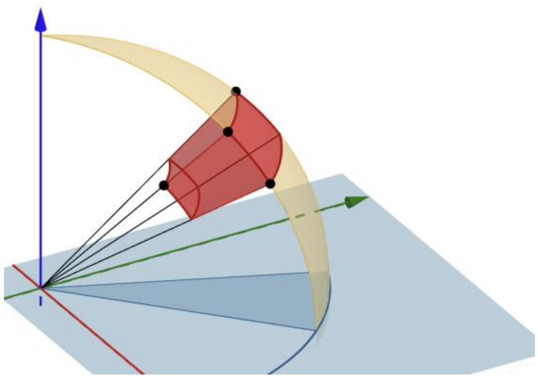
Riešenie



## Cvičenie 6.

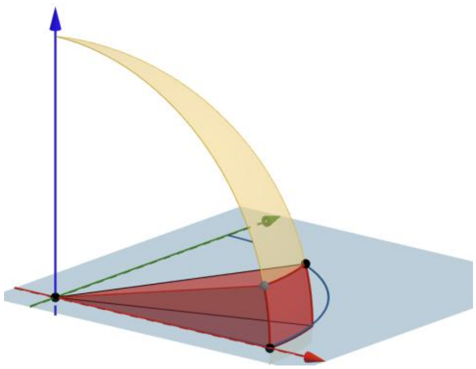
Nakreslite oblasť $\begin{cases} 2 \leq r \leq 4 \\ 30° \leq \alpha \leq 60° \\ 40° \leq \theta \leq 50° \end{cases}$.

Riešenie



## Cvičenie 7.

Opíšte oblasť pomocou sférických súradníc.



### Riešenie

$$\begin{cases} 0 \leq r \leq 4 \\ 0° \leq \alpha \leq 20°. \\ 0° \leq \theta \leq 20° \end{cases}$$

# Modul 13: Vektory, operácie s vektormi, skaláry

## Scenáre lekcií s aplikáciami VR

### Scenár lekcie 1

#### Názov lekcie

Geometrická interpretácia vektorov v trojrozmernom priestore, operácie s vektormi

#### Výsledky vzdelávania

- Interpretuje vektory v trojrozmernom priestore

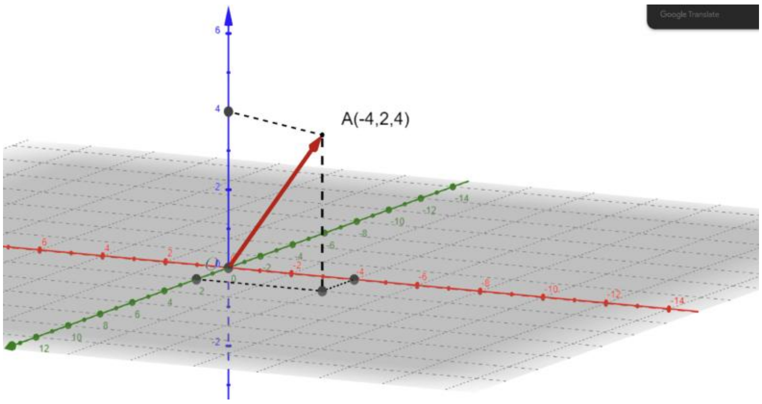
#### Priebeh vyučovacej hodiny

#### Krok 1

Pripomienka interpretácie vektora v rovine a operácie s vektormi.

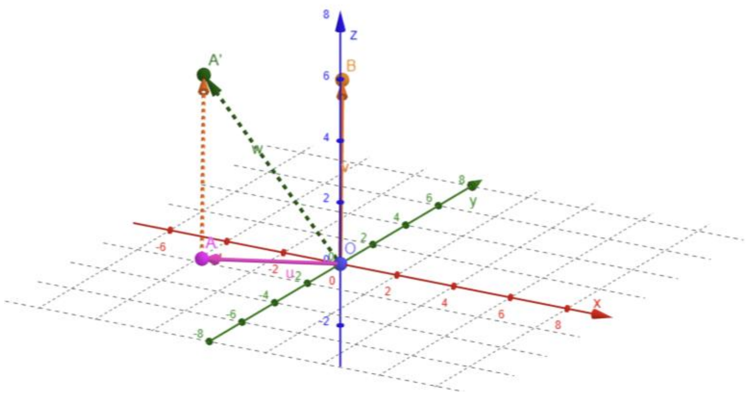
#### Krok 2

Kreslenie vektora so súradnicami $\vec{v} = [-4,2,4]$.




#### Krok 3.

Prezentácia súčtu vektorov, $\vec{u}, \vec{v}$ak $\vec{u} = [-4,-2,0]$, $\vec{v} = [0,0,6]$.



### Krok 4.

Vykonanie operácie $\vec{u} + 3\vec{v} - 2\vec{s}$ na vektoroch $\vec{u} = [1,3,0]$, $\vec{v} = [-1,1,2]$, $\vec{s} = [1,0,0]$.

Riešenie: $\vec{u} + 3\vec{v} - 2\vec{s} = [-4,6,6]$.

### Aké otázky by sa mali položiť, aby sa študenti mohli zamyslieť nad študovaným problémom?

Ako definovať vektory, operácie s vektormi v $n$-rozmernom priestore?

## Scenár lekcie 2

### Názov lekcie

Skalárny súčin, vektorový súčin v trojrozmernom priestore

### Výsledky vzdelávania

- Vypočíta skalárne a vektorové súčiny v trojrozmernom priestore.

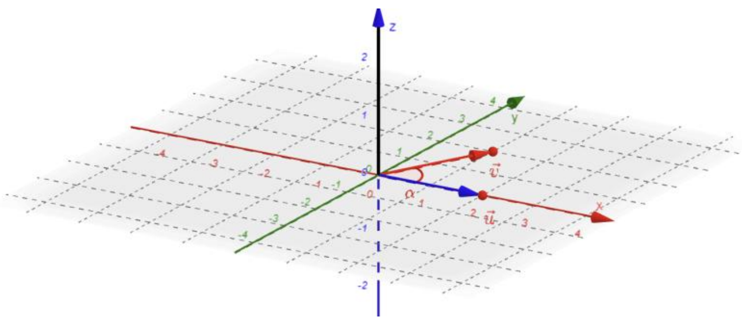
### Priebeh vyučovacej hodiny

### Krok 1

Pripomienka interpretácie skalárneho súčinu v rovine.

### Krok 2

Grafické znázornenie interpretácie vektorového súčinu pre vektory $\vec{u}, \vec{v}$ v priestore.



### Krok 3.

Výpočet skalárneho súčinu v priestore pre vektory $\vec{u} = [1,4,0]$, $\vec{v} = [3,1,1]$.

### Krok 4.

Úvod do definície a interpretácie vektorového súčinu.

### Aké otázky by sa mali položiť, aby sa študenti mohli zamyslieť nad študovaným problémom?

Ako definovať skalárny súčin a vektorový súčin v $n$-rozmernom priestore.

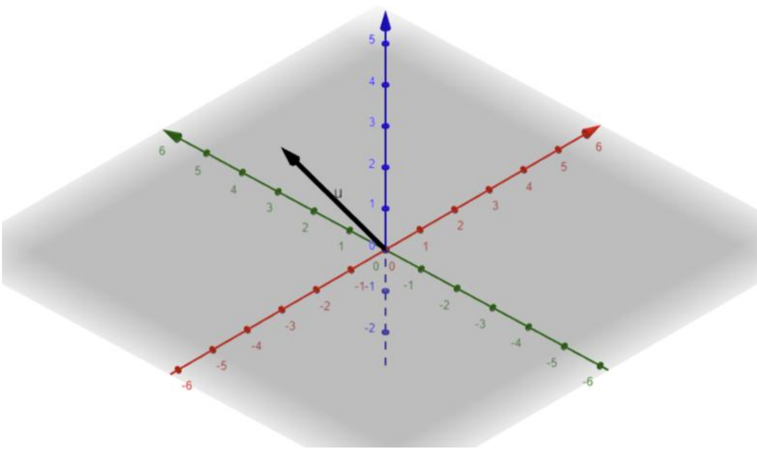
## Návrhy a tipy pre učiteľov

1. Aké sú praktické aplikácie skalárneho súčinu?
2. Aké sú praktické aplikácie vektorového súčinu, napr. v počítačovej grafike?
3. Diskutujte o základných vlastnostiach skalárneho súčinu.
4. Diskutujte o základných vlastnostiach vektorového produktu.
5. Ako skontrolovať, či sú vektory rovnobežné alebo kolmé?
6. Na výpočet skalárneho alebo vektorového súčinu môžete použiť program WOLFRAM.

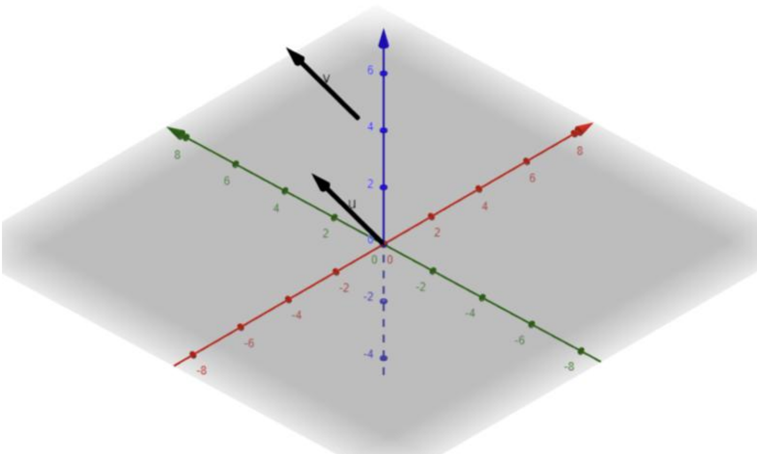
## Pracovné listy pre žiakov

### Cvičenie 1.

Vektory $\vec{u}, \vec{v}$ sú rovnaké. Nakreslite vektor $\vec{v}$, ak viete, že $\vec{u} = [-2,1,3]$.

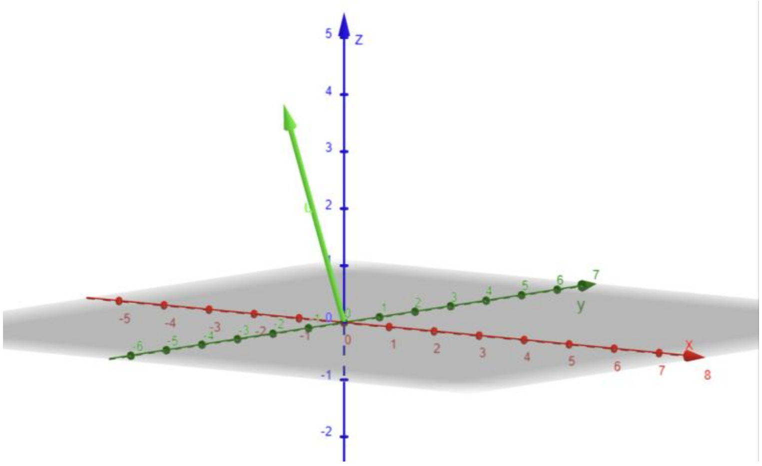



Riešenie

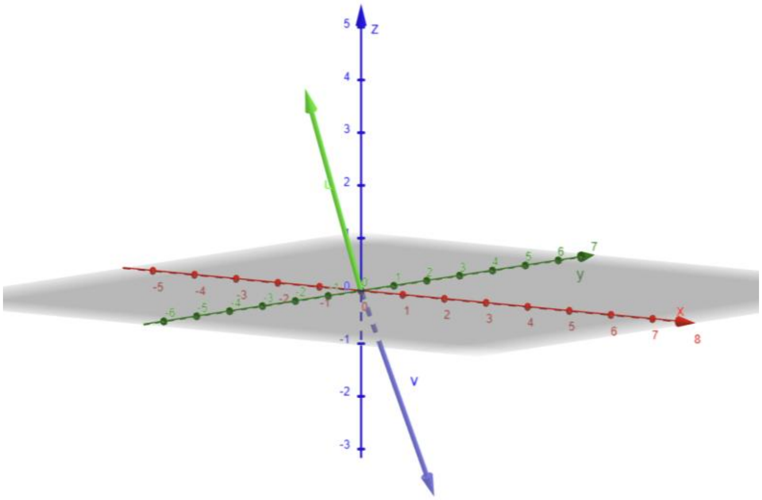


## Cvičenie 2.

Vektory $\vec{u}, \vec{v}$ sú opačné. Nakreslite vektor $\vec{v}$ ak viete, že $\vec{u} = [0{,}2{,}4]$.




Riešenie




## Cvičenie 3.

Vypočítajte súradnice vektora , $\overrightarrow{AB}$, ak $A = (2{,}5, -1)$, $B = (0{,}2{,}4)$.

Riešenie

$\overrightarrow{AB} = [-2, -3{,}5]$.

## Cvičenie 4.

Vypočítajte dĺžku vektora $\vec{u} = [3{,}4{,}0]$.

Riešenie

$|\vec{u}| = 5$.

## Cvičenie 5.

Určte parametre $a, b, c$ tak, aby sa vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{CD}$ rovnali, ak $A = (2{,}5, -1)$, $B = (0{,}2{,}4)$, $C = (a, 0, c)$, $D = (0, b, 4)$.

Riešenie

$a = 2, b = -3, c = -1.$

## Cvičenie 6.

Vypočítajte vektorový súčin vektorov $\vec{u} = [1,4,0]$, $\vec{v} = [3,1,1]$.

Riešenie

$\vec{u} \times \vec{v} = [4, -1, -11].$

## Cvičenie 7.

Vypočítajte skalárny súčin vektorov $\vec{u} = [3,4,0]$, $\vec{v} = [2,4,1]$.

Riešenie

22.

## Cvičenie 8.

Overte, či je trojuholník pravouhlý $A = (2,5,-1)$, $B = (0,2,10)$, $C = (0,0,0)$.

Riešenie

Áno.

## Cvičenie 9.

Dokáž to $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$.

Riešenie

Predpokladajme, že $\vec{u} = [a, b, c]$. Potom $\vec{u} \cdot \vec{u} = [a, b, c] \cdot [a, b, c] = a^2 + b^2 + c^2 = |\vec{u}|^2$.

## Cvičenie 10.

Dokáž to $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$.

Riešenie

Predpokladajme, že $\vec{u} = [a, b, c]$. Potom $\vec{u} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} = \vec{0}$.

## Cvičenie 11.

Vypočítajte objem telesa definovaného vektormi $\vec{u} = [1,4,0]$, $\vec{v} = [3,1,1]$, $\vec{s} = [1,1,0]$.

Riešenie

$\vec{u} \times \vec{v} = [4, -1, -11]$. $V = \vec{s} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 3$.